

1次元セル・オートマトンの ネットワーク表現におけるクラスタ構造

今村 泰正 香山 喜彦

梅花女子大学 文化表現学部 情報メディア学科[†]

1. はじめに

セル・オートマトン(CA)は、格子状のセルとその内部状態が単純なルールで決定される離散的計算モデルである。実行すると予測のつかないビットパターンが現れるため、数学、物理、計算機科学の研究対象として多くの研究がなされてきた。一方、ネットワークは、実社会での複雑なシステムを解析する手段として、様々な指標が導入されてきた。そこで本発表では、セル・オートマトンのダイナミクスを、そのネットワーク表現[1]により構造的な特性指標を用いて議論する。特に1次元2状態4近傍外部総和型ルール(4OTCA)を取り上げ、ネットワーク表現の特性指標とビットパターンとの相関およびWolframクラス[2]との関連性について考察する。

2. 外部総和型 CA とは

通常の5近傍総和型CA(5TCA)が中央のセルの状態値を総和に含めるのに対して、4OTCAはそれを除外する。このとき時間発展は、

$$x_i(t+1) = f_R^{OT}(x_{i-2}(t) + x_{i-1}(t) + x_{i+1}(t) + x_{i+2}(t))$$

で表される。ここで f_R^{OT} は外部総和型CAのルール番号 R の遷移関数である。各ルールに番号を付与するために、中央のセルの状態値{0,1}の遷移パターン{0,1}→{0,0}, {0,1}→{1,0}, {0,1}→{0,1}, {0,1}→{1,1}にそれぞれ0, 1, 2, 3を割り当て、4近傍セルの状態総和{4,3,2,1,0}の大きい方から高位とする4進数(abcde)で表現する。このとき10進数値は以下の式で与えられる。

$$R = a \times 4^4 + b \times 4^3 + c \times 4^2 + d \times 4 + e, \\ (a, b, c, d, e = 0 \sim 3)$$

なお、5TCAは上記の4OTCAに含まれ、例えばT20やT52は、それぞれOT408とOT920に対応する。

3. ネットワーク指標の分析

CAのネットワーク表現は[1]で与えられ、3近傍及び5TCAの考察に有効であることが示されている。そこで以下では4OTCAについて議論する。

る。

3.1 Efficiency とクラスタリング係数

CAから導出されたネットワークのEfficiency(Eff)とクラスタリング係数(CC)を4OTCAの独立なルールすべてについて、セル数401, 801, 1601, 3201で調べた。その結果、セル数が増加するに従って次の4つのケースが見られた。

- ケース1: Eff→0, CC→0 (ex. OT536)
- ケース2: Eff→0, CC≠0 (ex. OT608)
- ケース3: Eff, CC共に大きな値に留まる (ex. OT102)
- ケース4: 上記に分類できない (ex. OT408, OT600, OT920)

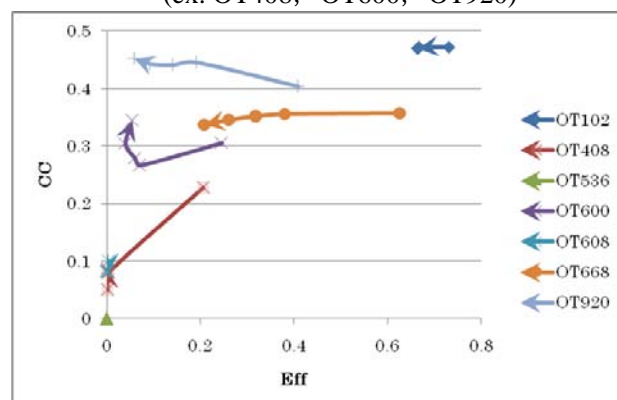


図1. 代表的ルールのEff及びCCのセル数依存性

各ケースに属するルールの示すビットパターンとWolframクラスとの対応を考察すると、ケース1はクラスI、ケース2はクラスII、ケース3はクラスIIIに属すると考えられる。ケース4に関しては、不確定の部分が多いが、クラスIVと考えられているOT408(T20)やOT920(T52)に類似したルールの存在が確認できた(図2, 3)。



図2. OT600

図3. OT668

Clustering structure of networks derived from one-dimensional cellular automata

Imamura Yasumasa, Yoshihiko Kayama

[†]Department of Media and Information, BAIKA Women's University

特に OT600 は、OT408 と OT920 の中間に位置し、クラス IV ライクな興味深い振る舞いを示している。これらのネットワーク構造をさらに詳しく考察するために、次節では次数分布と媒介中心性をを用いてクラスタ構造について議論する。

3.2 媒介中心性と次数分布

前節で抽出したルール OT600 及び OT408, OT920 に対し、セル数 3201, ステップ数 800 で媒介中心性(BC)と次数分布(DD)を求めると図 4 のようになる。

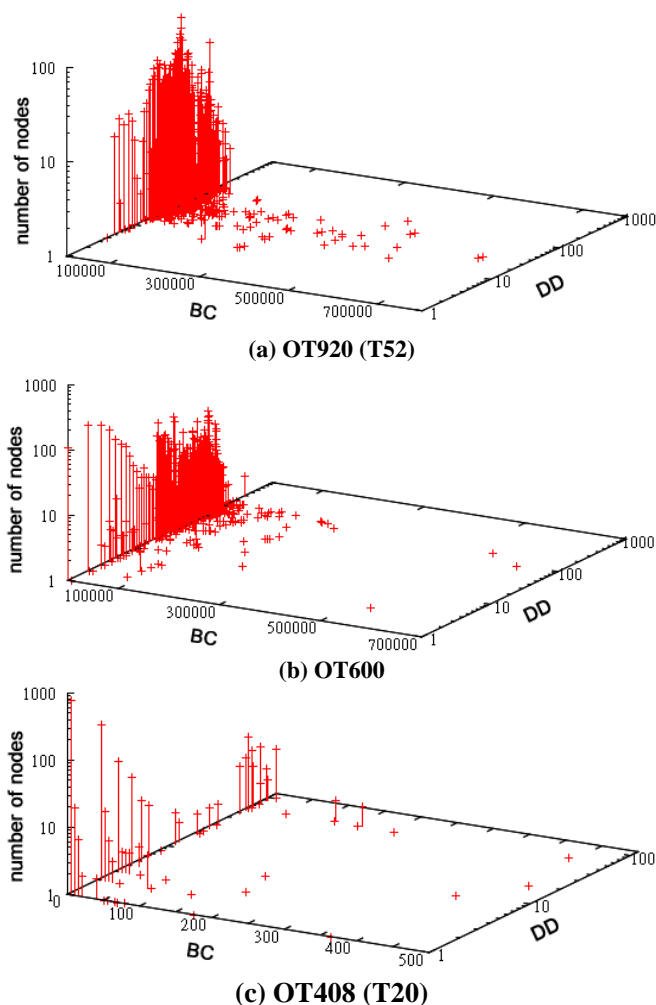


図 4. BC と DD の分布(N=3201)

上図より、クラス IV ルールである OT920(T52) は、非常に大きな BC を持つノードが存在することから、比較的大きなクラスタ同士が少数のノードで連結している構造を持つと推測される。一方 OT408(T20)では、DD がスケールフリー性を示すとともに、BC が低い値で分布することから、様々なサイズのクラスタが非連結で混在すると推測される。OT600 は、まさにこれらの中間的な性質を示している。実際に OT600 のネットワーク図を描画すると図 5 のようになる。

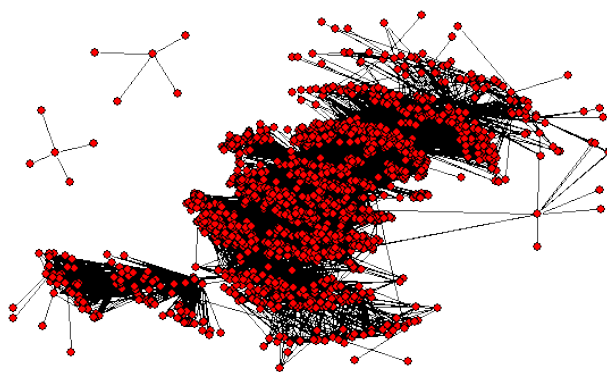


図 5. OT600 のネットワーク(N=1601)

予想通り、大規模なクラスタを連結した構造と、非連結の小規模なクラスタが存在していることが分かる。

4. 結論

1次元 2状態 4近傍外部総和型 CA ルールから得られたネットワーク表現の Efficiency とクラスタリング係数を求め、クラス IV ライクなルールを抽出することができた。さらにそれらの次数分布と媒介中心性を調べることで、OT920 と OT408 は、2種類の特徴的なクラスタ構造を代表するルールであり、クラス IV のグローバル構造を維持するものと、そうでないものに対応していることが明らかとなった。また、それらの中間に位置するルールの存在も確認できた。以上のように CA のネットワーク表現は、その動的な特徴を定量的に分析する道具として有効であることが示され、今後、クラス IV に属すると考えられるルールの振る舞いを考察することで、境界領域の理解を深めたいと考えている。

参考文献

- [1] Y. Kayama: Complex networks derived from cellular automata, arXiv:1009.4509 (2010).
- [2] S. Wolfram: Statistical mechanics of cellular automata, Rev. Mod. Phys. 55, pp.601-644 (1983).
- [3] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez and D.-U. Hwang: Complex networks: Structure and dynamics, Physics Reports Volume 424, pp.175-308 (2006).
- [4] V.Latora, M. Marchiori: Efficient Behavior of Small World Networks, Phys. Rev. Lett. 87, pp.198701-198704 (2001).