

# 計算機の変数精度の向上によるカオス時系列の性質の保証 ——多重積分モンテカルロ計算への適用例

月 江 伸 弘<sup>†</sup> 松 永 俊 雄<sup>†</sup>

本論文は、計算機の浮動小数点数の精度の向上によるカオス時系列の性質の保証について、多重積分のカオスモンテカルロ計算を例に検討した結果について述べるものである。時系列として Ulam-von Neumann 写像（ロジスティック写像において定数を 4 とおいたもの）により生成されるカオス時系列を用い、変数精度を 9 種類（IEEE754 浮動小数点倍精度、有効桁数 10 進 7～14 桁精度）変えて検討した。カオス時系列のランダム性の評価関数として、非線形システムにおける時系列のデータ間の相関関係を表す相互情報量に着目し、遅れ時間に対する相互情報量の推移を求め、相互情報量と多重積分の誤差との関係を調べた。その結果、変数精度の変更および適切な変数精度の選定に際し、相互情報量は有効な評価関数となりうることが分かった。また、動的再構成可能なプロセッサへの実装を前提として、カオス時系列の計算過程において相互情報量をモニタすることにより、変数精度を必要な精度まで動的に高める 1 つのアルゴリズムを提案した。

## Validation of Properties of Computed Chaos Time-series by Improvement in Accuracy of Floating-point Numbers —Application to Monte Carlo Computation of Multiple Integration

NOBUHIRO TSUKIE<sup>†</sup> and TOSHIO MATSUNAGA<sup>†</sup>

This paper is concerned with validation of properties of the computed chaos time-series by improvement in the accuracy of floating-point numbers; an application to Monte Carlo computation of the multiple integration is investigated as an example. Nine kinds of chaos time-series computed by Ulam-von Neumann map in IEEE754 double precision and 7～14 decimal digits precision are used in the calculation of the multiple integration. Mutual information which represents the correlation among time-series data in a non-linear system is chosen as a criterion for the randomness of the chaos time-series. The change of mutual information with the delay time and the relation between mutual information and the error of the multiple integral are investigated. It becomes clear that mutual information can be an effective criterion for changing the variable precision and for selecting the appropriate variable precision. Furthermore, on the premise of applying to a dynamically reconfigurable processor, proposed is an algorithm which dynamically improves variable precision to a desired value by monitoring mutual information in the computation of the chaos time-series.

### 1. ま え が き

カオスの重要な特徴は初期条件に対する鋭敏性（予測不可能性）である。一般に、カオス方程式により生成される時系列は、初期条件の情報が残っている部分と消失している部分の 2 つに大きく分けられる。前者は短期予測が可能な時系列で、その計算には精度保証付き計算<sup>1),2)</sup> など精度を考慮した計算手法が必要である。一方、後者は定常確率過程と考えられる時系列で、対象とするカオスの統計的な性質を内包するものであ

る。計算機によるカオス時系列の計算においては、上のいずれの時系列の場合も、使用する変数精度の適用性を確かめておく必要がある。

後者の時系列を応用する分野として、カオス暗号<sup>3)</sup>、多重積分のカオスモンテカルロ計算<sup>4),5)</sup> などがある。一般に、計算機によるカオス時系列の計算は“有限桁の浮動小数点数”（有限桁の変数精度）を使用するため、数学的には非周期解である場合でも、計算機による計算では時系列の中に周期解が現れることがある。そのため、時系列中に周期解が存在する場合でも、使用上問題のないことを確認しておく必要がある。カオス暗号では秘密通信や多重通信の信頼性を得る必要があるため、カオス時系列の評価法についての研究が行

<sup>†</sup> 東京工科大学工学部情報工学科  
Department of Information Technology, School of Engineering, Tokyo University of Technology

われている<sup>6)</sup>。

また、梅野による多重積分のモンテカルロ計算へのカオス時系列の応用に関する研究では、Ulam-von Neumann 写像（ロジスティック写像において定数を4とおいたもの）により生成される“良い乱数”とはいえない時系列<sup>7)</sup>が、カオスの性質である負の相関性のために積分の収束性が良くなること、また“解けるカオス”のために不変測度が関数化できるなどの点において一様乱数に比べて有用であることが示されている。しかし、時系列中に周期解が存在すると、経験測度が必ずしも不変測度にはならないため、積分値の収束性は悪くなる<sup>8)</sup>。

カオス時系列は今後幅広い分野に応用されると考えられるが、その応用に際しては、その時系列がカオスの性質を内包していることを保証する必要がある。

## 2. プロセッサによるカオス時系列の性質の保証

計算機で計算されるカオス時系列において、カオスの性質が消失する主な要因は有限桁の変数精度に由来する周期解の存在であると考えられる。しかし、現在の計算機では動作中に変数精度を自由に变化させることができないため、カオス時系列の適用の可否は実証実験に頼らざるをえない。

近年、論理回路の構成を動作中に動的に変更することができるプロセッサの開発が進められている<sup>9),10)</sup>。このようなプロセッサの登場により、カオスの計算において、カオス時系列としての精度を意識した計算が可能になると考えられる。

本論文は、計算機の変数精度の向上によるカオス時系列の性質の保証について、多重積分のカオスモンテカルロ計算を例に検討した結果について述べるものである。カオス時系列のランダム性の評価関数として、時系列データ間の相関関係を表す相互情報量に着目し、遅れ時間に対する相互情報量の推移を求め、相互情報量と多重積分の誤差との関係を調べる。

最後に、動的再構成可能なプロセッサへの実装を前提として、カオス時系列の計算過程において相互情報量をモニタし、これにより変数精度を必要な精度まで動的に高める1つのアルゴリズムを提案する。

ここでの検討は、時系列中に比較的短周期の周期解が現れその影響を調べることが容易であるため、IEEE754倍精度以下の精度でしかなされていないが、カオス時系列の性質の保証に対する考え方および提案する上述のアルゴリズムは、倍精度より高い精度の場合に対しても応用できるものである。

## 3. 方法

カオス時系列を発生させるために、次のUlam-von Neumann 写像

$$X_{n+1} = F(X_n) = 4X_n(1 - X_n) \quad (1)$$

を使用する。一般に、計算機上で扱うプログラム言語で実数として宣言する変数精度は、IEEE754国際標準規格で定められた単精度（有効桁数10進約7桁）および倍精度（有効桁数10進約16桁）である。ここでは、さらに単精度・倍精度と異なる変数精度（倍精度より低い変数精度）を用いることにより比較的短周期の周期解をあえて発生させ、周期解を含む時系列と含まない時系列について、遅れ時間 $\tau$ に対する相互情報量の推移を調べる。また、その時系列を用いて文献4)で梅野が扱った2重積分 $\int_0^1 \int_0^1 x^2 y^3 dx dy$ を計算し、誤差を調べる。

時系列の相互情報量は

$$I(\tau) = \sum_{x_n, x_{n-\tau}} P(x_n, x_{n-\tau}) \log_2 \frac{P(x_n, x_{n-\tau})}{P(x_n)P(x_{n-\tau})} \quad (2)$$

で与えられる<sup>11)</sup>。ただし、 $\tau$ は遅れ時間、また、 $P(x_n)$ 、 $P(x_{n-\tau})$ は1次元ヒストグラム、 $P(x_n, x_{n-\tau})$ は2次元ヒストグラムである。相互情報量は、 $x_n$ が分かっているとき $x_{n-\tau}$ がどの程度推定できるかを表す1つの指標であり、カオス時系列の解析では一般に遅れ時間 $\tau$ の決定手法として使用され<sup>12),13)</sup>、 $I(\tau)$ の値が最初に極小値をとるときの $\tau$ を選ぶことが多い。カオス時系列の中の周期解の影響は式(2)における各ヒストグラムに現れると考えられることから、ここでは相互情報量をカオス時系列のランダム性判定の評価関数として用いる。

Ulam-von Neumann 写像の変数 $X$ に使用する変数精度として、次のものを使用する。

- (1) IEEE754浮動小数点 倍精度
- (2) 有効桁数10進7~14桁精度

上記(2)の変数精度に対しては、仮想計算機（倍精度により求めた10進の数値を指定した変数精度まで残し、それ以外の桁を切り捨てる）により計算を行った。C言語を使用した仮想計算機における処理手順は、以下のとおりである。

- (1) 関数 $f()$ より求められた値 $x$ を文字型配列変数に格納する。
- (2) 配列変数に格納した値から、指定した変数精度

最上位桁から見て、初めて0以外の数値が現れた以後の桁数

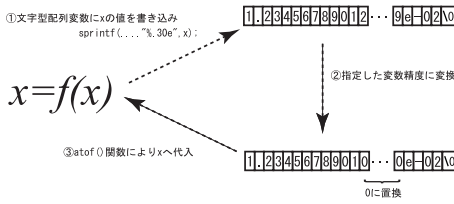


図 1 仮想計算機の例 (10 進 11 桁精度の場合)

Fig.1 Example of virtual computer with 11 decimal digits precision.

より下を 0 に置換 .

(3) atof() 関数により  $x$  へ値を戻す .

図 1 に 10 進 11 桁精度を指定した仮想計算機の例を示す . 図 1 において配列変数への数値の出力に “%.30e” と指定しているのは、出力時における丸め (出力誤差) の影響を上位桁へ伝播するのを抑えるためである . なお、単精度では、初期値によって求められた値が 0.0, 0.5, 1.0 などの値に容易に丸められてカオス解を得られなくなることから、ここでは使用しない .

なお、本計算に用いた CPU は Pentium4 2.8 GHz , OS は FreeBSD , コンパイラは gcc コンパイラ ver2.95.3 であり、計算プログラムは C 言語により作成した .

## 4. 結 果

### 4.1 時系列における周期性

9 種類の変数精度において、異なる初期値 (0.3, 0.3001, 0.31, 0.31001, 0.4) を与えた時系列の周期解開始までの時系列 (領域 A) の長さ (A) と周期解の 1 周期の長さ (B) について調べた結果を表 1 に示す . 時系列中の 2 つの時刻における値が同じ場合、時系列中に周期解が存在するとした . 表 1 より、周期解の開始点は初期値および変数精度に依存し、予測することができない . 一方、1 周期の長さ (B) は、各変数精度において同じステップ数になる傾向が強く、また、変数精度を増やすと 1 周期の長さは増加する傾向がある . なお、倍精度の一部の結果は、丸め操作の影響により  $X$  の値が 0 になり、(A) (B) の長さが観測不可能であった .

### 4.2 時系列のランダム性に関する評価関数

#### 4.2.1 相互情報量

表 1 をもとに、初期値  $X_0 = 0.4$  の A の領域を除いた時系列に対して相互情報量を式 (2) により求めた . 式 (2) における遅れ時間  $\tau$  の単位はステップであり、また、ヒストグラム  $P$  は  $X$  の解領域 ( $0 < X < 1$ ) を 100 等分した小領域を通過する軌道の数カウン

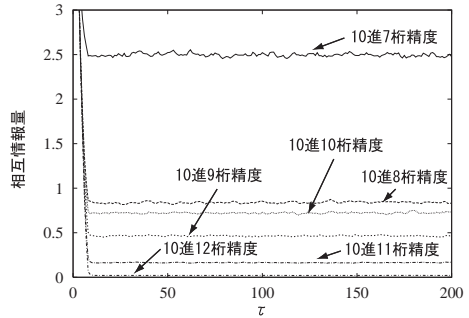


図 2 いろいろな時系列における相互情報量 (10 進 7 ~ 12 桁精度)

Fig.2 Mutual information in various time-series (7 ~ 12 decimal digits precision).

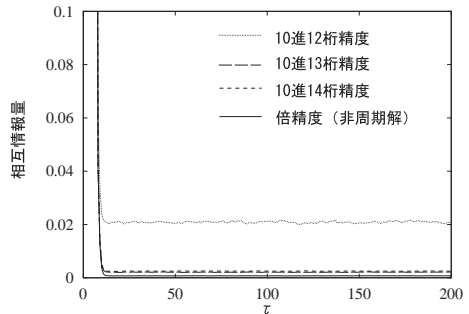


図 3 いろいろな時系列における相互情報量 (10 進 12 ~ 14 桁精度、倍精度)

Fig.3 Mutual information in various time-series (12 ~ 14 decimal digits precision, IEEE double precision).

トすることにより求めた . 相互情報量の計算には  $10^7$  ステップを用いた . それぞれの結果を倍精度の領域 A (非周期解、初期値  $X_0 = 0.3$ ) の  $10^7$  ステップから求めた相互情報量と比較する . 10 進 7 ~ 12 桁精度における相互情報量を図 2 に、10 進 12 ~ 14 桁精度および倍精度における相互情報量を図 3 に示す .

図 2 より、変数精度が高く周期が長いほど相互情報量が小さくなるのが分かる . また、図 3 より、10 進 13 桁精度、10 進 14 桁精度の相互情報量は倍精度のものほとんど差がないのが分かる .

#### 4.2.2 他の評価関数との比較

時系列解析には、相互情報量以外にもいくつかの評価基準がある . ここでは、2 次の自己相関関数と相関積分について調べる . 時系列  $x(t)$  に対する 2 次の自己相関関数  $\kappa$  は

$$\kappa = \frac{1}{n - \tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} (x_t - \bar{x})(x_{t+\tau} - \bar{x}) / \sigma^2 \tag{3}$$

である . ここで、 $\bar{x}$ 、 $\sigma$  は時系列  $x_t$  の平均、分散である . また、相関積分  $C^m$  は

表 1 周期解開始までの長さ (A) と 1 周期の長さ (B) (単位: ステップ)

Table 1 Beginning point of periodic time-series (A) and one period length (B) (unit: step).

精度/初期値		0.3000	0.3001	0.31000	0.31001	0.4
7	(A)	2929	3743	1510	4498	965
	(B)	1321	1321	1321	1321	1321
8	(A)	1847	4007	1111	1198	3720
	(B)	8689	8689	8689	8689	8689
9	(A)	21149	25024	22110	3150	24668
	(B)	17205	17205	17205	17205	17205
10	(A)	33656	25998	5930	31657	46005
	(B)	114510	15333	114510	114510	10456
11	(A)	171424	95870	173333	160723	173868
	(B)	46954	46954	46954	46954	46954
12	(A)	96886	222900	248334	260586	33675
	(B)	407105	340820	407105	407105	340820
13	(A)	699360	468861	349062	1000356	377709
	(B)	3034499	3034499	3034499	3034499	3034499
14	(A)	4150389	844590	3289294	5283179	5614691
	(B)	2869318	3742289	2869318	2869318	2869318
倍精度	(A)	17177194	15025109	56077491	20567570	観測不可能
	(B)	5638349	5638349	5638349	5638349	観測不可能

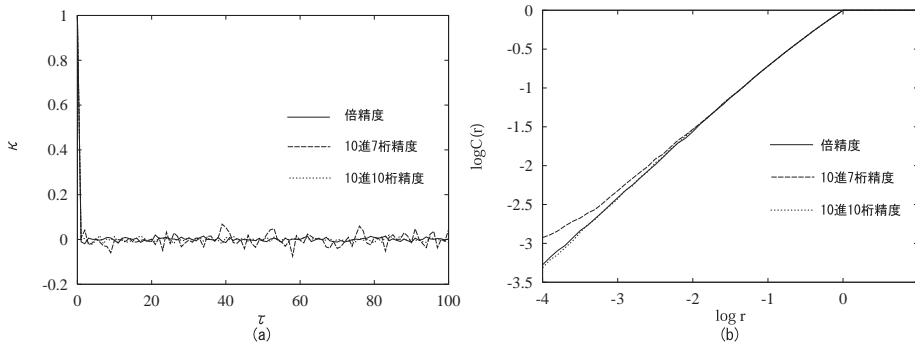


図 4 10 進 7 桁精度, 10 進 10 桁精度, IEEE 倍精度の時系列における (a) 自己相関関数と (b) 相関積分

Fig.4 (a) Auto-correlation function and (b) Correlation integral in three time-series (7 decimal digits precision, 10 decimal digits precision, and IEEE double precision).

$$C^m(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N H(r - |x_i - x_j|) \quad (4)$$

である<sup>14)</sup>. ここで,  $N$  はサンプルデータ数,  $r$  は  $x_i$  を中心とした  $m$  次元超球の半径, また,  $H(t)$  はヘビサイド関数で

$$H(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

である.

4.2.1 項で使用した時系列に対して,  $\kappa$  と  $C^m$  を計算した. なお, 相関積分における  $N$  の値は  $N = 8192$  とした. これは, 異なる  $N$  の値 ( $N = 1024, N = 2048, N = 4096$ ) から相関積分を求めた結果,  $N = 8192$  における  $r$  の小さい領域において比較的安定した収束

傾向を示したことから判断したものである. 10 進 7 桁精度, 10 進 10 桁精度, IEEE 倍精度における時系列の自己相関関数および相関積分を図 4 に示す. 図 4 (a) より, 短周期解の存在する 10 進 7 桁精度が倍精度と同じ推移を示しほとんど区別がつかないことから, 自己相関関数は評価関数としては適していないことが分かる. また, 図 4 (a) には 2 次の自己相関関数のみを示したが, 3 次・4 次の自己相関関数もその推移は倍精度とほとんど差がないことを確認した.

図 4 (b) に示した相関積分は, 10 進 7 桁精度において  $r$  の値が小さい場合, 倍精度と大きな差があることが分かる. しかし, 差が確認できたのは 10 進 7 桁精度の場合のみであり, それ以上の変数精度では倍精度と同じ推移をする. 10 進 7 桁, 10 進 8 桁精度の時系列の相関積分を図 5 に示す. 図 5 より, 10 進 8 桁精

度においては表 1 から短周期の周期解が存在するためカオス時系列として使用するの是不適当であるにもかかわらず、結果は倍精度と同じ推移をしていることが分かる。

一方、相互情報量に関しては、カオス時系列として不適当と思われる短期の周期性が含まれている場合だけでなく、見逃しやすい長期の周期性が含まれている場合も、他の 2 つの評価関数（自己相関関数、相関積分）とは異なり、倍精度と異なる推移をしていることが分かる。

相互情報量は、本来持つてはならないカオス時系列中の周期性の影響を受けていることから、時系列のランダム性に対する有効な評価関数となりうることが分かる。カオス時系列の性質を利用する計算においては、相互情報量をモニタすることにより、適切な変数精度を選定することができると思われる。

4.3 多重積分のカオスモンテカルロ計算に及ぼすカオス時系列の周期性の影響

ここでは、2重積分  $\int_0^1 \int_0^1 x^2 y^3 dx dy$  を変数精度

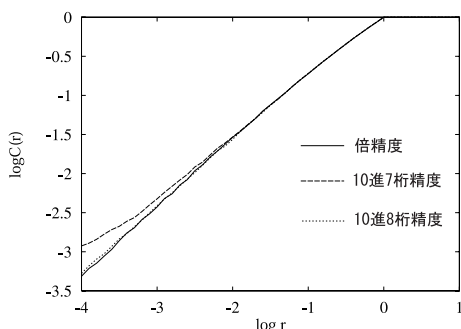


図 5 10 進 7 桁精度, 10 進 8 桁精度, IEEE 倍精度の時系列における相関積分

Fig. 5 Correlation integral in three time-series (7 decimal digits precision, 8 decimal digits precision, and IEEE double precision).

を変えて計算した。表 1 より周期解の開始点 (A) が分かっている異なる初期値を  $x_0, y_0$  にそれぞれ代入し、計算結果と厳密な値 (1/12) との差の 2 乗を求めた。乱数の個数  $N_r$  による誤差の 2 乗の推移を図 6 に示す。

図 6 には、C 言語で用意されている一様乱数を使用したモンテカルロ計算 (倍精度) を 50 回行ったときの誤差の 2 乗平均の結果も示した。図 6 の左の 2 つの図より、各変数精度における誤差の推移には、一様乱数による計算結果に比べて収束が速い部分と、一様乱数の結果に比べて収束が遅く、一様乱数の結果から外れていく部分があることが分かる。これらの結果を表 1 のステップ数と比較すると、前者は領域 A の時系列を使用した場合、後者は周期解を含めた時系列を使用した場合にほぼ対応していることが分かる。このことより、周期性を持つ時系列の使用の影響が 2 重積分の計算結果に現れていることが分かる。しかし、図 6 右端の 10 進 13 桁の変数精度の場合には上述の傾向は認められない。図 7 は、初期値  $x_0, y_0$  それぞれにランダムに生成した 50 個の異なる値を入力して求めた 2 重積分の値の誤差の 2 乗平均である。図 6、図 7 より、周期が 10 進 13 桁以上で確認された周期より長ければ、周期解を含む解を使用した場合でもカオス時系列の性質が保持されていることが分かる。また、相互情報量は、カオス時系列の性質の保証に関して有効な評価関数であることが分かる。

ある変数精度のもとで求められたカオス時系列の中で、カオスモンテカルロ計算に適用できるのは以下のものである。

- (1) 領域 A の時系列 (周期解が始まるまでの時系列)
- (2) 周期解開始以後の時系列において、周期が十分に長い周期解

Ulam-von Neumann 写像により生成されるカオス

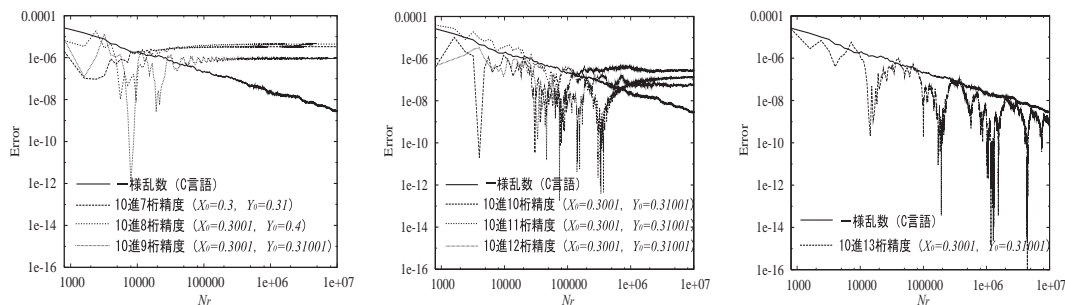


図 6 いろいろな変数精度の時系列および一様乱数の時系列を用いた  $\int_0^1 \int_0^1 x^2 y^3 dx dy$  のモンテカルロ計算の 2 乗誤差

Fig. 6 Square error of Monte Carlo computation of  $\int_0^1 \int_0^1 x^2 y^3 dx dy$  in time-series of various variable precision and in time-series of uniform random numbers.

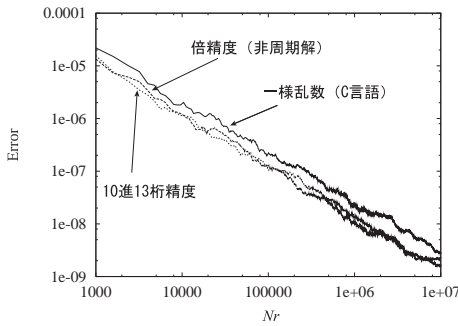


図 7 50 個の初期値から計算した時系列および一樣乱数の時系列を用いた  $\int_0^1 \int_0^1 x^2 y^3 dx dy$  のモンテカルロ計算の平均 2 乗誤差

Fig. 7 Mean square error of Monte Carlo computation of  $\int_0^1 \int_0^1 x^2 y^3 dx dy$  in three time-series: two chaos time-series starting with 50 different initial values (13 decimal digits precision, IEEE double precision) and time-series of uniform random numbers.

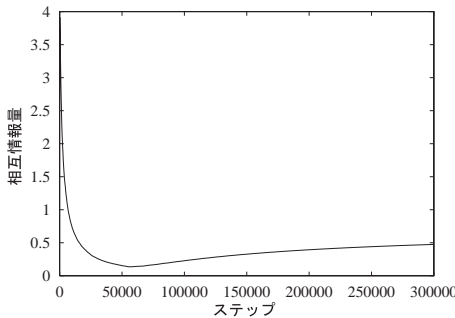


図 8 ステップごとにおける相互情報量 (10 進 10 桁精度)

Fig. 8 Change of mutual information with time step (10 decimal digits precision).

時系列の場合、少なくとも 10 進 13 桁以上の変数精度であれば項目 (2) を満足し、カオス時系列の性質の効果を得ることができる。

4.4 動的再構成可能なプロセッサへの応用

各変数精度におけるカオス時系列の相互情報量を調べた結果、次のことが分かった。

- 遅れ時間  $\tau$  がある程度大きくなると相互情報量はほとんど変化しない。
- 周期解を含んだ時系列の相互情報量は大きくなる。また、相互情報量の計算に用いたステップ数の増加に対する相互情報量を調べた結果、次のことが分かった。
- 周期解が現れるまでの時系列の相互情報量は変数精度に依存することなく 0 に近づく。

10 進 10 桁精度において初期値  $X_0 = 0.4$ 、遅れ時間  $\tau$  を 20 に固定し、ステップ数の増加に対する相互情報量を求めたときの結果の推移を図 8 に示す。図 8 より、周期解が始まる前の時系列では相互情報量は単調に 0 に近づくこと、また、時系列が周期解を含むよ

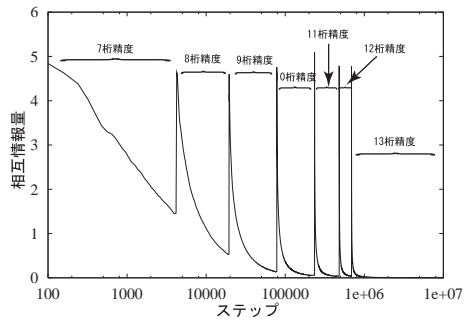


図 9 提案したアルゴリズムによるカオス時系列の相互情報量の変化  
Fig. 9 Change of mutual information in chaos time-series by proposed algorithm.

うになると相互情報量が増加することが分かる。同様な結果は、本論文で使用したすべての変数精度の場合に対しても得られる。

上述の 3 つの事項に基づき、変数精度を変更する以下のアルゴリズムを提案する。

計算開始時において使用する変数精度を 10 進  $F_s$  桁、図 8 の相互情報量の増加に対する許容値を  $D$  とする。

- (1) 遅れ時間  $\tau$  を定める。このとき  $\tau$  は小さい値を避ける (10~40 ステップ程度が望ましい)。
- (2) 式 (2) の 1 次元ヒストグラム, 2 次元ヒストグラムを 0 とおく。
- (3) 初期値  $X_0$  から時系列の計算を始め、 $\tau$  ステップごとに相互情報量を求める。短期間内 (領域 A 内) において相互情報量を求め、これを  $I_{min}$  とする。
- (4) 以後、 $\tau$  ステップごとの相互情報量を  $I_{min}$  と比較し、その差が  $D$  を超えたとき  $F_s = F_s + 1$  を行い、項目 (2) へ、もし、 $I_{min}$  以下の値のときは  $I_{min}$  を更新し、項目 (4) へ戻る。

上述のアルゴリズムを用いてシミュレーションを行った。 $F_s = 7, \tau = 20, D = 0.005$  として相互情報量を求めた結果を図 9 に示す。

図 9 より、提案したアルゴリズムによってカオス時系列の計算過程で変数精度が動的に変化し、多重積分のカオスモンテカルロ計算の変数精度として必要な精度へ移り変わる様子が分かる。高精度の多重積分のモンテカルロ計算では、より多くの乱数 ( $N_r$ ) を必要とするため 10 進 13 桁精度でも十分でないことが考えられる。この場合、変数精度を高めて 1 周期の長さをより長くする必要があるが、これは許容量  $D$  を小さくすることにより行うことができる。許容量  $D$  を小さくすると、各変数精度における相互情報量が下降 (領域 A 使用時) から上昇に転じたのち短期間で許容

量  $D$  を超えることになり、必要な変数精度までへの切替えをすばやく行うことが可能になる。

このアルゴリズムを動的再構成可能なプロセッサへ実装する場合、動的に変化させる部分は一時的にデータを格納するレジスタおよび ALU (加算器) である。今後は動的再構成可能なプロセッサとして NTT において開発が進められている PCA (Plastic Cell Architecture) を使用し、このアルゴリズムによる動作を調べることを予定している。

## 5. 考 察

### 5.1 倍精度におけるカオスモンテカルロ計算に対する注意

表 1 において、IEEE754 倍精度における結果では、丸め操作による影響により  $X$  の値が 0 となるものが一部の初期値において確認された。これは、極端に 0.5 に近い  $X$  の値に対して次ステップで 1 へ丸め操作が行われることに起因する。倍精度を使用したカオスモンテカルロ計算では、丸め操作の制御が必要になる場合がある。

### 5.2 周期解の開始点

表 1 より、周期解の開始点は初期値および変数精度に依存していることが分かる。この理由は、初期値に対する依存性のほかに、各変数精度の持つ有効桁数 (より高い変数精度における計算結果と比較したとき、最上位桁から数字が一致している桁数) が 0 になる時刻にも依存しているためと考えられる。すなわち、Ulam-von Neumann 写像における有効桁数の減少が変数精度の仮数部の bit 数 (ステップ数) 付近 (倍精度であれば 52 ステップ付近) で 0 になり<sup>15)</sup>、この有効桁数が 0 になる時刻およびそれまでの丸め誤差の影響により、周期解の開始点 (A) は変数精度を上げても予測することができない。

### 5.3 相互情報量の分割数 $l$ に対する精度

相互情報量を用いて周期解の影響を得るためには、1 次元における細かい分割数 ( $l$ ) に対するヒストグラムが必要である。図 2 および図 3 における結果は、 $l = 100$  として計算した結果であるが、図 3 より、相互情報量は 10 進 13 桁精度における周期解の影響を受けていることが分かる。

図 10 は、10 進 13 桁精度において 4.2.1 項で示した計算と同様の計算のもと、分割数のみを変化させた場合の相互情報量の推移である。図 10 より、 $l = 60$  の場合、非周期解の相互情報量とほぼ同じになることが分かる。分割数を 60 以下にした場合、10 進 13 桁精度で検知された周期解を得ることができないと考え

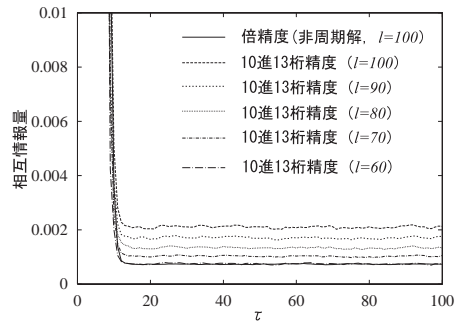


図 10 分割数に対する相互情報量

Fig. 10 Mutual information in various number of partitions.

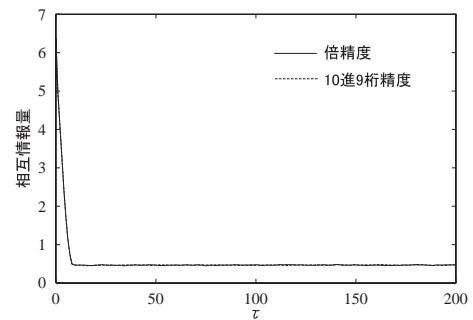


図 11 1 周期内の時系列 (10 進 9 桁精度) と IEEE 倍精度の時系列の相互情報量の比較

Fig. 11 Mutual information in time-series within one period (9 decimal digits precision, IEEE double precision).

られる。一方、分割数が 60 を超える値であれば、周期解の影響を相互情報量より得ることが可能であり、本論文で使用した  $l = 100$  は十分な精度を満たしていることが分かる。

### 5.4 1 周期内の時系列について

周期性のある時系列を使用すると多重積分の誤差が大きくなることを示したが、1 周期内の時系列のみを使用した場合は別である。すなわち、周期性が始まる時刻を時刻 0 として時系列を見たとき、次の周期が現れるまでの時系列は、周期解が現れる点 (A) までの時系列と同じであると考えられる。10 進 9 桁精度の時系列において 1 周期内の時系列を使用したときの相互情報量と IEEE 倍精度における相互情報量との比較を図 11 に示す。

この結果から、4.3 節で述べた使用可能な時系列 (1)、(2) に “1 周期内の時系列” を追加することができる。

### 5.5 3 重積分に対する結果

これまでは 2 重積分に対する結果について述べてきたが、3 重積分に対しても同様の結論が導けるかどうかを調べるために、 $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^2 y^3 z^4 dx dy dz$  の計算

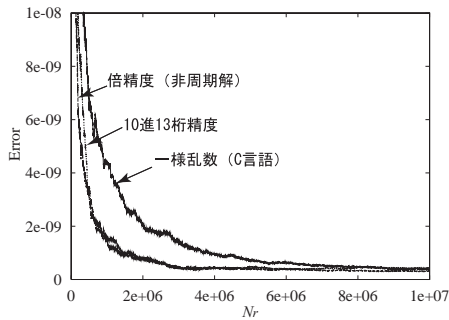


図 12 50 個の初期値から計算した時系列および一様乱数の時系列を用いた  $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^2 y^3 z^4 dx dy dz$  のモンテカルロ計算の平均 2 乗誤差

Fig. 12 Mean square error of Monte Carlo computation of  $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^2 y^3 z^4 dx dy dz$  in three time-series: two chaos time-series starting with 50 different initial values (13 decimal digits precision, IEEE double precision) and time-series of uniform random numbers.

を行った。初期値  $x_0, y_0, z_0$  にそれぞれランダムに生成した 50 個の異なる値を入力したときの誤差の 2 乗平均を図 12 に示す。図 12 より、10 進 13 桁精度における結果は倍精度の結果とほぼ同じ推移をしており、3 重積分においても 10 進 13 桁精度以上の変数精度が必要であるといえる。

## 6. 結 論

計算機の浮動小数点数の精度（変数精度）の向上によるカオス時系列の性質の保証について、多重積分のカオスモンテカルロ計算を例に検討した。また、動的再構成可能なプロセッサへの実装を前提とし、相互情報量をモニタすることにより、変数精度を必要な精度まで動的に変える 1 つのアルゴリズムを提案した。本研究の結論を以下に示す。

- (1) カオス時系列の変数精度の変更および適切な変数精度の選定に際して、相互情報量は有効な評価関数となる。
- (2) Ulam-von Neumann 写像（ロジスティック写像において定数を 4 とおいたもの）によるカオス時系列の計算において、変数精度が有効桁数 10 進 7~14 桁精度および IEEE754 倍精度の場合、ある時刻以後の時系列に周期解が現れ、時系列のランダム性が失われる。カオス時系列のランダム性を評価する有効な評価関数は相互情報量である。
- (3) 多重積分のモンテカルロ計算においては、使用する時系列の相互情報量が大きいほど、多重積分の誤差は大きくなる。

- (4) 多重積分のモンテカルロ計算に使用できるカオス時系列は、周期解が現れ始めるまでの十分な長さの非周期解、周期解開始以後の時系列の中で周期が十分に長い 1 周期解および 1 周期解の中に含まれる時系列である。
- (5) 多重積分のモンテカルロ計算に使用するカオス時系列の計算における変数精度の最低条件は、有効桁数 10 進 13 桁以上である。
- (6) 動的再構成可能なプロセッサへの実装を前提として、カオス時系列の計算過程において、相互情報量をモニタすることにより、変数精度を必要な精度まで動的に高める 1 つのアルゴリズムを提案した。

謝辞 本研究にあたりいろいろご意見、ご指摘をいただきました、小澤智教授に深く感謝いたします。

## 参 考 文 献

- 1) 大石進一：カオスと計算，数理科学，No.348 (1992/6).
- 2) 大石進一：精度保証付き数値計算，コロナ社 (2000).
- 3) 西尾芳文：カオス秘密通信とカオス暗号，*Computer Today*, No.86 (1998/7).
- 4) 梅野 健：カオスと計算，臨時別冊数理科学 カオス研究の最前線，pp.159-168 (1999).
- 5) 梅野 健：モンテカルロ法におけるカオス乱数の有効性，電気学会研究資料，情報処理研究会，IP-99-7，pp.29-36 (1999).
- 6) 畠田光輝，上島直樹，茶谷芳裕，鎌田弘之：カオスシステムにおける有限桁演算の影響度の評価について，第 17 回回路とシステム軽井沢ワークショップ論文集，pp.13-18 (2004).
- 7) 香田 徹，柿本厚志：擬似乱数とカオス，情報処理学会論文誌，Vol.27，No.3，pp.289-296 (1986).
- 8) 月江伸弘，松永俊雄：カオスモンテカルロ計算における変数精度の影響，第 65 回情報処理学会全国大会論文集，Vol.1，pp.17-18 (2003).
- 9) 名古屋彰，小栗 清：プラスチックアーキテクチャ (PCA) の技術概要，*NTT R&D*, Vol.49，No.9，pp.513-517 (2000).
- 10) 本村真人，若林一敏，山品正勝：ソフトの柔軟性とハードの高速性を両立する動的再構成 LSI を開発，*日経マイクロデバイス*，No.210，pp.150-154 (2002).
- 11) 松葉育雄：非線形時系列解析，朝倉書店 (2000).
- 12) Fraser, A.M. and Swinney, H.L.: Independent coordinates for strange attractors from mutual information, *Phys. Rev. A*, Vol.33, No.2, pp.1134-1140 (1986).
- 13) Sprott, J.C.: *Chaos and Time-Series Analysis*, Oxford University Press (2003).



- 14) 合原一幸：カオス時系列解析の基礎と応用，産業図書(2000).
- 15) 月江伸弘，小澤 智：カオス方程式の数値解における有効桁数の減少，情報処理学会論文誌，Vol.44, No.11, pp.2778-2786 (2003).

(平成 15 年 12 月 1 日受付)

(平成 16 年 9 月 3 日採録)



月江 伸弘 (正会員)

1974 年生．1997 年東京工科大学工学部情報工学科卒業．1999 年同大学院工学研究科システム電子工学専攻修士課程修了．2002 年同大学院博士課程満期退学．現在，同大学工学部情報工学科助手．非線型問題および計算機アーキテクチャに関する研究に従事．2003 年第 65 回情報処理学会全国大会大会奨励賞受賞．電子情報通信学会会員．



松永 俊雄 (正会員)

1943 年生．1965 年東北大学工学部通信工学科卒業．同年日本電信電話公社(現 NTT)に入社．電気通信研究所，情報通信処理研究所等において主に大型コンピュータ(DIPS)の本体装置の構成および論理方式の研究実用化に従事．1991 年博士(工学)東北大学．1993 年東京工科大学工学部情報工学科教授．2001 年工学部長，2002 年工学研究科長を兼務，現在に至る．IEEE，ACM，電子情報通信学会，電気学会各会員．