

ずり依存流のシミュレーションの一手法

楽 詠瀨^{1,a)} Breannan Smith¹ Christopher Batty² Changxi Zheng¹ Eitan Grinspun¹

概要：本稿では、極小の泡から構成された密泡（フォーム, foam）のためのシミュレーション手法を考慮する。提案法では、個々の泡（バブル, bubble）を別々に扱わず、バブルの集合を連続体として扱い、物質点法（material point method）を用いてハーシェル・バークレーモデルに基づく超弾性の構成方程式を離散化する。ハーシェル・バークレーモデルは非ニュートン性塑性流動を扱うモデルの一つであり、フォームの挙動をよく近似できることが知られている。提案法の評価として、様々なフォームについて提案法が適用できることを示し、また実世界のフォームの挙動との比較を行う。

1. はじめに

フォームを構成する泡（バブル, bubble）の空間スケールは広範囲にわたり、お風呂のバブルなどのような、センチメートルオーダーの大きなものから、シェービングクリームやホイップクリームなどのように数十マイクロメートルオーダーの極小のものを含む。本研究では、（そのシミュレーションが）比較的未開拓である密泡（dense foam）^{*1} に注目し、シェービングクリームやホイップクリームなどに例示される物質を扱う。

密泡は無数のバブルを含み、個々のバブルは小さいため視認が難しい。例えば典型的なシェービングクリームのバブルは、直径 40 マイクロメートル程度である。密泡は互いに（物理的に）作用する多数のバブルを含むが、巨視的には、シームレスな連続体としてのふるまいが観測される。連続体としてみた場合、密泡は非ニュートン性^{*2}の力学的応答を示す。微視的には、確率論的なバブルの再配置により、密泡は粘塑性を示し、ずり^{*3}速度依存の永久的な変形を起こす。また、密泡はずり流動化（shear thinning）の効果を示し、応力が大きい場合、連続体はより流動的になる。

本研究ではフォームを連続体としてシミュレートする。これにより、個々のバブルのシミュレーションを行う場合に比べて、より多量のフォームを扱うことができる。フォームの構成関係（constitutive relation）にはハーシェル・バークレーモデルを適用する [23]。微視的なバブルのメカニズ

ムと、巨視的なスケールにおける集合体としてのフォームの関係の厳密な理解は、まだ十分に解明されていない [22] が、流動学分野の実験により、ハーシェル・バークレーモデルは非常に有効な現象論的近似であることが示されている。

フォームは極端な形状変化を呈するので、チャレンジングなシミュレーション対象である。これに対して、粒子と格子のハイブリッドな方法として知られる物質点法（material point method, MPM）を適用する。物質点法は、大変形とトポロジー変化の扱いを比較的容易にする方法として知られている [18], [19]。

本研究では、リアルなフォームのシミュレーションのため、粒子の再サンプリングと明示的な断裂モデルを導入し、大きなせん断流に伴って生ずる非物理的な空洞を防ぎ、フォームが自然にちぎれる様子をモデリングする。

いくつかの事例により提案法の有効性を示し、また、実世界のフォームとの比較検証を行った。

2. 関連研究

フォームの物理

フォームは応用範囲が広いいため、流動学分野における研究を含め、その物性と挙動に関する研究が相当数なされている。文献 [23] では、フォームの物理についての理論的、実験的、計算論的な先行アプローチが概説されており、フォームの有力な連続体モデルは、非ニュートン性流体を一般化したモデルの一つである（非線形な）ハーシェル・バークレーモデルとされている。フォームの集合体としての挙動は、その構成要素である小さいスケールのバブルの力学によっても予測できるが、ハーシェル・バークレーモデルは多くの場面で実用的である。

¹ Columbia University, New York, NY, 10027, USA

² University of Waterloo, Waterloo, ON, N2L 3G1, Canada

a) Yonghao Yue: yonghao@acm.org

*1 以下では、フォームとは特に区別せず、密泡の意味でフォームという用語を用いる。

*2 ニュートン性とは、ひずみに応じて流動が線形である性質をいう。

*3 ずり:shear. せん断ともいう。

粘塑性性と非ニュートン性材質を扱う方法

CG 分野では、流体や固体に明確に分類されない物質のアニメーションのためのシミュレーション法が開発されてきた。初期には、Terzopoulos と Fleischer は粘塑性と破碎効果を含む変形モデルを提案した [21]。Goktekin ら [6] は、オイラー流体ソルバーにひずみを追加して弾性力を扱った。Bargteil ら [1] は、ラグランジュ有限要素法 (FEM) 弾性ソルバーにリメッシュ法を追加して、動的な粘塑性流をロバストに扱える方法を開発した。ラグランジュ有限要素法の後続の研究では、リメッシュの高速化や数値拡散の低減に焦点を当てている [24], [25]。また、非ニュートン性材質のシミュレーションのため、SPH と MLS を用いた点群ベースの方法も開発されてきた [5], [10], [11], [17]。

構成モデルという観点からは、O'Brien ら [13] は、単純な加法的塑性モデルを導入し、後に研究者たちはよりパワフルな乗法的塑性モデル [8] を導入した。Bargteil ら [1] は、クリープ (creep) の効果と加工硬化 (work hardening) や加工軟化 (work softening) の効果をサポートした。我々の研究動機はフォームであるが、我々の用いる構成モデルはよりフレキシブルなモデルであり、完全塑性、粘塑性、ずり流動化やずり粘稠化を含む広範囲な効果を扱うことができる。

FLIP・MPM 法

提案法は、弾塑性物体のために開発された、粒子と格子のハイブリッドなフレームワークである物質点法 (MPM) [20] に基づく。物質点法は、ラグランジュ粒子を用いて空間における情報の移流を扱い、背景格子を用いて弾性力を計算する。以下 (§3) で議論するように、これによってラグランジュ法とオイラー法の多くの恩恵を受けることができる。物質点法は、もともと圧縮性流れのための FLIP 法を弾性体に応用した手法として開発された [2]。Zhu と Bridson は、非圧縮性流体アニメーションにおける数値拡散を低減するために FLIP 法を導入した [26]。また、彼らは個々の粒子を扱う代わりに流動物体のための連続体モデルを導入し、のちに Narain ら [12] によって拡張された。

最近では、Stomakhin らは、雪の挙動をモデル化する構成モデルと物質点法を CG 分野に導入し [18]、熱流動に伴う相転移への拡張や非圧縮性の扱いの改善を行った [19]。

3. 物質点法の背景

記号の書式

以下では、スカラー量をローマン体 (例: ρ や J) で表し、ベクトルを太字斜体 (例: \mathbf{v} や \mathbf{g})、二階のテンソルを太字サンセリフ体 (例: $\boldsymbol{\sigma}$ や \mathbf{s}) で表す。

連続体の物理

以下では、領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ における連続体を考慮し、 Ω 上で、密度 (スカラー) 場 $\rho(x, y, z)$ 、速度 (ベクトル) 場 $\mathbf{v}(x, y, z)$ 、コーシー応力 (テンソル) 場 $\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)$ を考える。また、重力加速度を \mathbf{g} とする。この連続体の力学は、時間 t に関するオ

イラー-ラグランジュ偏微分方程式 $\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}$ で表され、質量保存 $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ を満たす。ここで、 D は物質微分を表す。すなわち、任意の時間変化する場合 $\phi(x, y, z)$ に対し、 $\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi$ と定義される。 $\boldsymbol{\sigma}$ は構成モデル (§4) から定義される。

離散化

物質点法 [20] は、オイラー-ラグランジュ方程式を一連のオイラー・ラグランジュステップにより、空間と時間の双方に関して離散化する。

物質の形状と (密度、速度、変形勾配などの) 物理的情報は粒子に保存される。これにより、移流の扱いが容易になり、オイラー法で起こりうる数値拡散などの問題を回避できる。

物質における力と粒子の加速度は、静的な (正方) 背景格子によって計算され、ラグランジュ粒子に適用される。格子そのものを移流する方法と比べて、静的な格子を用いるとリメッシングの必要がなく、離散化や最適化も単純になる。また、格子を用いて粒子の情報の“変化”を求めることで、粒子の情報を格子から直接補間する場合よりも、数値拡散を低減できる。

物質点法は固体と流体の双方の性質を効率的にモデリングできる。メッシュベースのラグランジュ法のように、物質点法は任意の構成モデルと組み合わせることで複雑な物質を表現できる。

4. 構成モデル

フォームは、界面活性剤溶液に浸漬した分散気体バブルから構成される。巨視的なスケールでは、フォームはずり流動化流体として振る舞い、せん断応力とひずみ速度との関係は現象論的なハーシェル・バークレーモデル [3], [7] によってよく近似される。Weaire と Hutzler [23] によれば、小さな応力は個々のバブルを変形し、それは巨視的にみると可逆な弾性的挙動を意味する。応力を加えると、バブルの再配置 (並び替え) がおき、それは巨視的には塑性変形、すなわち自然状態の変化ととらえられる。さらに応力が増していくと、界面活性剤溶液と浸漬バブルのずり流動化流をもたらす。

これらの広範囲なフォームの現象をとらえるためには、弾性、塑性、そしてずり流動化を記述できる構成関係が必要となる。

変形勾配とテンソル

構成モデルを記述するための基本要素に変形勾配 $\mathbf{F}(x)$ がある。変形勾配とは、ある点の無限小近傍の無変形状態から変形状態への線形写像である [16]。変形勾配は、無変形状態における、物質点 \bar{x} からのすべての無限小の変位ベクトル $\delta \bar{x}$ を、変形状態の対応ベクトル $\mathbf{F}(\bar{x})\delta \bar{x}$ へ写像する。以下では、簡便のため、 $\bar{x} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ を明示的に表示しない

が、 $\mathbf{F} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は、一般には場所ごとに異なる値を取り得、マテリアルドメイン上のテンソル場をなす。

塑性を扱う際、 \mathbf{F} をその弾性部 \mathbf{F}^e と塑性部 \mathbf{F}^p に乗法的に、 $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$ と分解 [1], [8], [9], [16], [24] すると便利である。塑性は、バブルの体積保存な並び替えを巨視的にとらえたものであり、 $\det(\mathbf{F}^p) = 1$ と仮定できる。なお、我々の弾性の扱いは、左コーシー-グリーンテンソル $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ 及びその弾性部 $\mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT}$ を用いる。

弾性

ひずみが小さい場合、フォームは弾性的な挙動を示す。これは超弾性的な蓄積エネルギー密度 ([16]-§9.2)

$$W = W_v(J) + W_s(\bar{\mathbf{b}}^e) \quad (1)$$

によって表され、領域全体の蓄積エネルギーは $\int_{\Omega} W \, d\text{Vol}$ と計算される。 $W_v(J) = \frac{1}{2}\kappa \left[\frac{1}{2}(J^2 - 1) - \ln J \right]$ は体積 ($J = \det(\mathbf{F})$) 依存のエネルギー密度であり、材質依存の体積弾性率 κ で重みづけされた体積変形の効果を表す。 $W_s(\bar{\mathbf{b}}^e) = \frac{1}{2}\mu(\text{Tr}[\bar{\mathbf{b}}^e] - 3)$ はせん断依存のエネルギー密度であり、せん断弾性率 μ で重みづけされたせん断変形の効果を表す。 $\bar{\mathbf{b}}^e = \det(\mathbf{b}^e)^{-1/3} \mathbf{b}^e = J^{-2/3} \mathbf{b}^e$ は、体積保存の左コーシー-グリーンテンソルである。これ以降、 $\bar{\cdot}$ を、行列式が1となるように正規化する演算子とし、 $\bar{\mathbf{x}} = \det(\mathbf{x})^{-1/3} \mathbf{x}$ とする。エネルギー関数 (1) は、それだけで有限応力に対する構成関係の特徴づけ、下記のキルヒホッフ応力を与える。

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}^e} \mathbf{F}^{eT} = \frac{\kappa}{2}(J^2 - 1)\mathbf{I} + \mu \, \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}^e] \quad (2)$$

右辺の二つの項は、体積とせん断ひずみに対する等方的な応答を表す。上記の式では、 $\text{dev}[\mathbf{x}] = \mathbf{x} - \frac{\text{Tr}[\mathbf{x}]}{3}\mathbf{I}$ であり、 \mathbf{I} は 3×3 の単位テンソルを表す。任意のテンソル \mathbf{x} に対して、偏差演算子 $\text{dev}[\mathbf{x}]$ は、 \mathbf{x} のトレースフリー部を返す。すなわち、 $\text{Tr}[\text{dev}[\mathbf{x}]] = 0$ 。従って、 $\text{dev}[\mathbf{I}] = \mathbf{0}$ と $\text{dev}[\text{dev}[\mathbf{x}]] = \text{dev}[\mathbf{x}]$ が成り立つ。なお、キルヒホッフテンソルはコーシー応力と $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}/J$ の関係にある。

塑性の扱いは、キルヒホッフ応力テンソルの偏差部分、 $\mathbf{s} = \text{dev}[\boldsymbol{\tau}] = \mu \, \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}^e]$ のみに依存する。その大きさ(スカラー)を $s = \|\mathbf{s}\|_F$ と表し、正規化した形を $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}/s$ と表す。ここで、 $\|\cdot\|_F$ はフレベニウスノルムを表す。直感的には、 s は物質のせん断に対する(せん断モードの方向に無関係な)弾性応答の度合いを表す。

塑性降伏

フォンミーゼス降伏条件 [13], [16] は、材質依存の降伏応力 σ_Y を用いて、弾性領域の限界を明確に定義する。我々は等方的な弾性応答を考慮するので、 σ_Y はスカラーである。下記の条件

$$\Phi(s) = s - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y \leq 0 \quad (3)$$

が満足されるかぎり、物質は弾性的に応答する。直感的には、

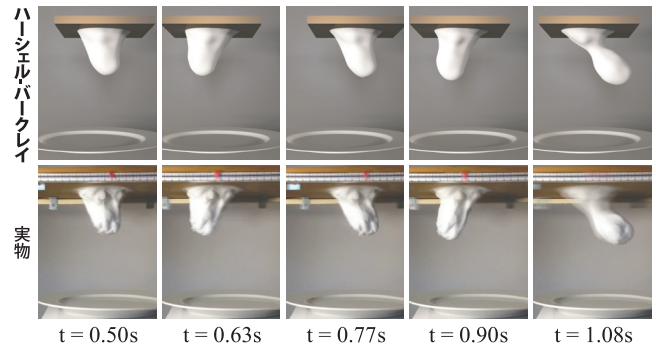


図1 ハーシェル-パークレイモデルを用いて振動するブロックから落下するフォームをシミュレーションした例(上段)と実際のフォーム(下段)の比較。シミュレーション結果は実際の実験に近い結果を与えた。

せん断変形に対する弾性応答の度合いが閾値 σ_Y を超えた時、物質は純粋な弾性応答のみを示さなくなる。ここで、 $\max(0, \Phi(s))$ を降伏超過と呼ぶこととし、不等式 $\Phi(s) \leq 0$ を降伏条件と呼ぶこととする。

より一般的な塑性の挙動を扱う場合、降伏超過を更新して加工硬化と加工軟化をモデル化することもある [16]。しかし、フォームの準静的な実験 [23] から、とくに加工硬化と加工軟化の傾向はみられない。

4.1 塑性モデル

フォンミーゼス降伏条件が破られたとき、フォームは塑性変形を示す。数学的には、この効果はひずみの弾性成分を減らして塑性成分を更新することと対応する。流動学では、時間変化とともに超過弾性ひずみが塑性ひずみに流れるという塑性変形を表すために、流れ則を導入する。本研究では、[15], [16] の流れ則

$$\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e = -\frac{2}{3} \text{Tr}[\mathbf{b}^e] \gamma \hat{\mathbf{s}} \quad (4)$$

を用いた。ここで、 $\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e$ は、速度 v に起因する流れに対する \mathbf{b}^e のリー微分を表し、 γ は流れ速度、 $\hat{\mathbf{s}}$ は流れの方向を表す。この流れ則は、最大塑性拡散の原理を蓄積エネルギー関数 (1) と降伏条件 (3) に適用することで得られる [15]。

ハーシェル・パークレーモデル

ハーシェル・パークレーモデルは、流れ速度と粘性 η によって正規化された降伏超過とをべき法則で結びつける。

$$\gamma(s) = \max\left(0, \left(\frac{\Phi(s)}{\eta}\right)^{1/m}\right) \quad (5)$$

ずり流動化および粘稠化物質は、それぞれ $m < 1$ と $m > 1$ により特徴づけられる。

ハーシェル・パークレーモデルのメリットを明らかにするため、 $(\Phi/\eta)^{1/m}$ を下記のように書き換える。

$$\left(\frac{\Phi}{\eta}\right)^{1/m} = \frac{\Phi}{\eta^{1/m} \Phi^{1-1/m}} \quad (6)$$

この表現によれば、粘塑性という観点からとらえたとき、分母 $\eta^{1/m} \Phi^{1-1/m}$ は実効粘性を表す。すなわち、我々が扱うようなずり流動化物質では、応力の増加とともに、実効粘性が減少する。より大きな応力が働くとき、フォームはより流れやすくなる。

ハーシェル・バークレーモデルは広範囲の粘塑性的挙動を扱うことができる。フォームでは $m < 1$ を用いるが、 $m > 1$ とすれば、ずり粘稠化の効果をも扱うことができる。左コーシー-グリーンテンソルの時間発展

左コーシー-グリーンテンソル \mathbf{b}^e の時間発展は、弾性変形を適用する弾性予測のステップと、塑性変形を適用する塑性補正のステップに分解できる。 \mathbf{b}^e の時間発展は下記の恒等式で与えられている。

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \mathbf{k}\mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e\mathbf{k}^T + \mathcal{L}_v\mathbf{b}^e \quad (7)$$

この式は、 \mathbf{b}^e のリー微分 $\mathcal{L}_v\mathbf{b}^e$ と空間速度勾配 $\mathbf{k} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ の影響を表している (詳細は [16] 参照)。

我々の流れ則 (4) を式 (7) に適用すると、

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \mathbf{k}\mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e\mathbf{k}^T - \frac{2}{3}\text{Tr}[\mathbf{b}^e]\gamma(s)\hat{\mathbf{s}} \quad (8)$$

を得る。式 (8) を、演算子分割によって扱う。すなわち、まず弾性予測

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \mathbf{k}\mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e\mathbf{k}^T \quad (9)$$

を行い、次に塑性補正

$$\dot{\mathbf{b}}^e = -\frac{2}{3}\text{Tr}[\mathbf{b}^e]\gamma(s)\hat{\mathbf{s}} \quad (10)$$

を行う。

4.2 ハーシェル・バークレーモデルの時間離散化

数値計算のため、式 (9) と (10) の時間に関する離散化が必要である。フォーム、さらにより一般にハーシェル・バークレーモデルで表される物質は、大きなせん断変形を伴うため、我々の離散化法は Stomakhin らの方法 [18] と異なる。我々は Simo と Hughes [16] による粘塑性のためのリターンマッピング法を拡張して、ハーシェル・バークレーベキ法則を扱う。このフレームワークでは、 $\bar{\mathbf{b}}^e$ を追跡すれば十分 (すなわち塑性は不要) だが、後に述べる断裂モデルのために、 \mathbf{F} も追跡する。

弾性予測

(時間) ステップ $n+1$ において、我々はまず、塑性以外のすべての効果 (弾性力や重力などの効果) を考慮して変形勾配差分

$$\mathbf{f}_{n+1} = (\mathbf{I} + \Delta t \nabla v_n) \quad (11)$$

を計算する。 v_n は粒子の速度であり、 Δt はタイムステップである。 ∇v_n の計算法については、Stomakhin らの方

法 [18] を参照されたい。

次に、式 (9) を離散化して、弾性ひずみのみの変化を予測し、体積保存の弾性ひずみ $\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^e$ を更新する。

$$\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{e,\text{pre}} = \bar{\mathbf{f}}_{n+1} \bar{\mathbf{b}}_n^e \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^T \quad (12)$$

同様に、 $\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{F}_n$ により \mathbf{F}_{n+1} を更新する。

\mathbf{s} はキルヒホッフ応力テンソル $\boldsymbol{\tau}$ の偏差部分なので、 $\mathbf{s} = \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}^e]$ であり、対応する予測された応力は $\mathbf{s}_{n+1}^{\text{pre}} = \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{e,\text{pre}}]$ である。もしその大きさ s_{n+1}^{pre} が降伏条件 (3) を満足すれば、その予測を採用する。

塑性補正

もし降伏条件が破られたならば、式 (10) を陰的後退オイラーによって離散化し、ひずみを補正する。

塑性補正の間、体積が変化しないという条件下では、式 (10) の離散化は

$$\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^e - \bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{e,\text{pre}} = -\frac{2}{3}\Delta t \text{Tr}[\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^e]\gamma(s_{n+1})\hat{\mathbf{s}}_{n+1} \quad (13)$$

で与えられる。

式 (13) を変形していくと、下記のスカラー方程式を得る。

$$\eta^{1/m} (s_{n+1} - s_{n+1}^{\text{pre}}) + 2\bar{\mu}\Delta t \left(s_{n+1} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y \right)^{1/m} = 0 \quad (14)$$

なお、 $\bar{\mu} = \frac{1}{3} \text{Tr}[\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{e,\text{pre}}]\mu$ とおいた。この方程式は $\eta \rightarrow 0$ においても定義される。 $\eta = 0$ または $m = 1$ の場合、 s_{n+1} を明示的に求めることができる。

$$s_{n+1} = s_{n+1}^{\text{pre}} - \left(s_{n+1}^{\text{pre}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y \right) / \left(1 + \frac{\eta}{2\bar{\mu}\Delta t} \right) \quad (15)$$

そうでないとき、式 (14) を数値的に解く。式 (14) の左辺を関数 $g(s_{n+1})$ とおくと、区間 $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y \leq s_{n+1} \leq s_{n+1}^{\text{pre}}$ で、 $g(s_{n+1})$ は単調であることがわかる。このことから、我々は二分法で唯一の解 s_{n+1} を求める。

最後に、キルヒホッフ応力テンソルを $\mathbf{s}_{n+1} = s_{n+1}\hat{\mathbf{s}}_{n+1}^{\text{pre}}$ により更新し、体積保存の左コーシー-グリーンテンソルを

$$\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^e = \frac{1}{\mu}\mathbf{s}_{n+1} + \frac{1}{3}\text{Tr}[\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{e,\text{pre}}]\mathbf{I} \quad (16)$$

により更新して塑性補正を完了する。この方法で $\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^e$ を更新する (すなわちトレースを一定にして偏差部分を縮める) と、結果の行列式は一般に 1 とは異なる。このため、塑性補正の後に $\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^e$ を正規化しなおす。

5. 粒子の再サンプリングと断裂モデル

大変形下の粒子の再サンプリング

物質点が大変形に伴って数値的に移流されると、それらの分布は均一でなくなる。例えば、フォームの試料がある

一方向に圧縮され、それに垂直な軸では伸長する場合、物質点の分布の均一性は悪くなり、伸長する軸ではまばらになる。FLIP や MPM のように、粒子間の距離が物質の連結性を決定づける場合には、この疎な分布は、数値的な非物理的空洞をもたらす。一様な点分布を維持するために、我々は物質点法のための再サンプリングアプローチを開発した。我々はポアソニディスクサンプリングを用いて新しい点を挿入し、また、点が過度に密に分布する領域を検出し、その領域の点を統合する。なお、距離関数を用いて、点の再サンプリングをフォームの内部領域に限定し、フォームの外部の領域と内部の空洞とを区別した。

断裂モデル

フォームの試料を継続的に引き延ばした場合、それは徐々に細くなり、最終的にちぎれる。基本的な物質点法は適切な明示的断裂モデルを備えていない。しかし、格子間隔に対して粒子が互いに近い距離にある限り、それらは背景格子を通して互いに力をやり取りし、連続体のようにふるまう。結果的に、物質点法によってフォームをシミュレートすると、フォームがちぎれる前に過度に細くなりすぎる領域が現れ、その結果、非写実的な細長い糸形状を生じる。

この欠点を解決するため、我々のフォームのシミュレーションに役に立つ明示的な断裂モデルを開発した。我々は、まず“弱い”もしくは断裂した状態を検出する。断裂領域では、我々は計算された力と蓄積したひずみを直接変更し、材質が離れる方向に対する抵抗を無効にするとともに、観測される幾何的な伸長(すなわち分離)が追加の物理的ひずみとして蓄積しないようにする。また、蓄積した塑性を調整して近隣のバブル間の再連結の効果をモデル化する。これによって、フォームは再び伸長に対して抵抗できる状態になる。

6. 結果

提案法を用いて、フォームをシミュレートした。実際のフォームの物理パラメータは、鮮度、定式化の違い、温度など、色々な要因により変化し、製品ごとに、また時間とともに変化する。シェーピングクリーム(せん断弾性率 μ 、降伏応力 σ_Y 、ハーシェル・パークレー指数 m 、粘度 η) は、流動学の測定実験に関する文献 [4], [14] をもとに定めた。ただし、文献における計測結果からは最大で 40% 変えており、この変化分は標本の違いや状態を考慮すると妥当だと思われる。

シミュレーションには、8-コアの Intel Xeon E5-2680 v2 2.8GHz を搭載したコンピュータを利用した。現状では、簡便のため、陽解法を用いてシミュレートしているが、準陰的な時間積分は Stomakhin らの導出 [18] に従って、 b^e に関して連鎖率を用いれば構成可能である。

シェーピングクリーム

我々のモデルの検証のため、実際のシェーピングクリー



図 2 スモア: マシュマロを二枚のグラハムクラッカーで挟んで押しつぶすと、マシュマロがクラッカーの隙間から少し流れ出た。その後上方のクラッカーを持ち上げると、特徴的なスティッフピーク(びんと立った角形状)を形成した。

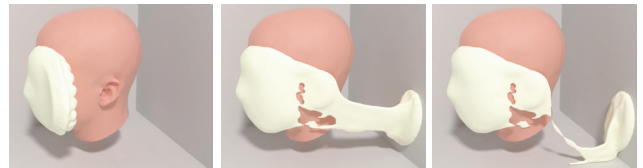


図 3 パイ投げ: 顔に向けてホイップクリームを投げた。断裂の効果やスティッフピークの形成が確認できる。

ムを板の下側につけた。実物のフォームの初期形状は三次元スキャンにより測定し、振動運動に伴うフォームの振る舞いをビデオカメラで撮影した。次に、スキャンした形状を用いてシミュレーションを行い、シミュレーションで得られた動きとビデオとを比較した。振動を開始すると、最初は塑性の蓄積とともにフォームはゆっくりと下方に伸び始めた。振動を継続していくと、フォームは典型的な非線形のずり流動化の振る舞いを示したのち、断裂した。最後にフォームが床に衝突したとき、フォームは特徴的な軽い揺れを示した。提案法を用いることにより、こうした特徴的なふるまいを再現できることがわかる。

パイ投げ

図 3 は、顔に向けてホイップクリームを投げた例である。顔にパイが衝突すると、衝突は大きな内部応力を生じ、ホイップクリームが流れ始める。パイはその後塑性を蓄積し、引き伸ばされ、ちぎれる。その後ホイップクリームの塊が顔に粘着したまま残る。

スモア

図 2 では、二枚のグラハムクラッカーの間にマシュマロをはさみ、押しつぶしてスモアをシミュレートした。マシュマロはほどほどに温かいフォームを模しており、そのため柔らかい材質として設定している(熱伝導はシミュレートしていない)。マシュマロを押しつぶすと、変形して流れ始め、やがてグラハムクラッカーの穴から流れ出た。その後上方のクラッカーを持ち上げると、マシュマロは細いネットワーク形状を形成し、やがてちぎれ、特徴的なスティッフピーク(びんと立った角形状)を形成した。

7. まとめと今後の課題

我々は、ハーシェル・バークレーモデルを物質点法の枠組みに適用し、シェービングクリームやパイなどのフォーム(様の物質)を写実的にシミュレートした。いくつかの例と実際の実験結果との比較検証により、提案法の有効性を示した。今後は、バブルの成長やドレナージなどの他の効果や、他のタイプのフォームの扱いを視野に入れていきたい。

参考文献

- [1] Adam W. Bargteil, Chris Wojtan, Jessica K. Hodgins, and Greg Turk. A Finite Element Method for Animating Large Viscoplastic Flow. *ACM Trans. Graph.*, 26(3):16:1–16:8, jul 2007.
- [2] J. U. Brackbill and H. M. Ruppel. FLIP: A Method for Adaptively Zoned, Particle-in-Cell Calculations of Fluid Flows in Two Dimensions. *J. Comp. Phys.*, 65(2):314–343, 1986.
- [3] Sylvie Cohen-Addad, Reinhard Höhler, and Olivier Pitois. Flow in Foams and Flowing Foams. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 45:241–267, 2013.
- [4] D. J. Durian, D. A. Weitz, and D. J. Pine. Dynamics and Coarsening in Three-Dimensional Foams. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2(Supplement):SA433, 1990.
- [5] Dan Gerszewski, Haimasree Bhattacharya, and Adam W. Bargteil. A Point-Based Method for Animating Elastoplastic Solids. In *Proc. of ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation 2009*, pages 133–138, 2009.
- [6] Tolga G. Goktekin, Adam W. Bargteil, and James F. O’Brien. A Method for Animating Viscoelastic Fluids. *ACM Trans. Graph.*, 23(3):463–468, aug 2004.
- [7] Winslow H. Herschel and Ronald Bulkeley. Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollösungen. *Kolloid-Zeitschrift & Zeitschrift für Polymere*, 39(4):291–300, aug 1926.
- [8] G. Irving, J. Teran, and R. Fedkiw. Invertible Finite Elements for Robust Simulation of Large Deformation. In *Proc. of ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation 2004*, pages 131–140, 2004.
- [9] Ben Jones, Stephen Ward, Ashok Jallepalli, Joseph Perenna, and Adam W. Bargteil. Deformation Embedding for Point-Based Elastoplastic Simulation. *ACM Trans. Graph.*, 33(2):21:1–21:9, mar 2014.
- [10] Richard Keiser, Bart Adams, Dominique Gasser, Paolo Bazzi, Philip Dutré, and Markus Gross. A Unified Lagrangian Approach to Solid-Fluid Animation. In *Proc. of the Second Eurographics/IEEE VGTC Conference on Point-Based Graphics 2005*, pages 125–133, 2005.
- [11] M. Müller, R. Keiser, A. Nealen, M. Pauly, M. Gross, and M. Alexa. Point Based Animation of Elastic, Plastic and Melting Objects. In *Proc. of ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation 2004*, pages 141–151, 2004.
- [12] Rahul Narain, Abhinav Golas, and Ming C. Lin. Free-Flowing Granular Materials with Two-Way Solid Coupling. *ACM Trans. Graph.*, 29(6):173:1–173:9, dec 2010.
- [13] James F. O’Brien, Adam W. Bargteil, and Jessica K. Hodgins. Graphical Modeling and Animation of Ductile Fracture. *ACM Trans. Graph.*, 21(3):291–294, jul 2002.
- [14] G. Ovarlez, K. Krishan, and S. Cohen-Addad. Investigation of Shear Banding in Three-Dimensional Foams. *EPL (Europhysics Letters)*, 91(6):68005:1–68005:6, 2010.
- [15] J. C. Simo. A Framework for Finite Strain Elastoplasticity Based on Maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition: Part I. Continuum Formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66(2):199–219, feb 1988.
- [16] J. C. Simo and T. J. R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer, 1998.
- [17] Barbara Solenthaler, Jürg Schläfli, and Renato Pajarola. A Unified Particle Model for Fluid-Solid Interactions. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 18(1):69–82, feb 2007.
- [18] Alexey Stomakhin, Craig Schroeder, Lawrence Chai, Joseph Teran, and Andrew Selle. A Material Point Method for Snow Simulation. *ACM Trans. Graph.*, 32(4):102:1–102:9, jul 2013.
- [19] Alexey Stomakhin, Craig Schroeder, Chenfanfu Jiang, Lawrence Chai, Joseph Teran, and Andrew Selle. Augmented MPM for Phase-Change and Varied Materials. *ACM Trans. Graph.*, 33(4):138:1–138:11, jul 2014.
- [20] Deborah Sulsky, Shi-Jian Zhou, and Howard L. Schreyer. Application of a Particle-in-Cell Method to Solid Mechanics. *Computer Physics Communications*, 87(1-2):236–252, may 1995.
- [21] Demetri Terzopoulos and Kurt Fleischer. Modeling Inelastic Deformation: Viscoelasticity, Plasticity, Fracture. *Computer Graphics*, 22(4):269–278, aug 1988.
- [22] Denis Weaire. The Rheology of Foam. *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, 13(3):171–176, 2008.
- [23] Denis Weaire and Stefan Hutzler. *The Physics of Foams*. Oxford University Press, 2001.
- [24] Martin Wicke, Daniel Ritchie, Bryan M. Klingner, Sebastian Burke, Jonathan R. Shewchuk, and James F. O’Brien. Dynamic Local Remeshing for Elastoplastic Simulation. *ACM Trans. Graph.*, 29(4):49:1–49:11, jul 2010.
- [25] Chris Wojtan and Greg Turk. Fast Viscoelastic Behavior with Thin Features. *ACM Trans. Graph.*, 27(3):47:1–47:8, aug 2008.
- [26] Yongning Zhu and Robert Bridson. Animating Sand as a Fluid. *ACM Trans. Graph.*, 24(3):965–972, jul 2005.