

ライフゲームのネットワーク表現による自己組織化臨界の検証

梅花女子大学 情報メディア学科
香山 喜彦

1 はじめに

ライフゲームは Conway が考案した 2 次元 2 状態のセル・オートマトン (以下 CA という) に分類されるモデルであり, 生物集団が過疎・過密では生存に適さないという条件を時間発展のルールに取り込んでおり, その多様な振る舞いから, 単なるパズルゲームの枠を超えて様々な生物の進化モデルとして多くの研究対象となってきた [1, 2]. 我々は CA とネットワーク理論を結びつけ, セル配位の時間発展をリンク構造の変化によって表現する新たな可視化手法として”CA のネットワーク表現”を提唱し [3], これをライフゲームに適用した [4]. そこではライフゲーム固有のセル配位が各々特徴的なネットワークにより表現され, ランダムな初期配位からの遷移が沈静化した休止状態では, 雪崩現象が発生する緊張状態を, 生き残ったセル配位を相互に連結する複雑ネットワークとして表現できることが示された. Bak らは砂山模型を用いた雪崩現象の解析を通じて自己組織化臨界について議論し [5], ライフゲームについてもスケールフリー性 [6] を報告している [7]. 我々もネットワーク表現の枠内においてライフゲームの休止状態における自己組織化臨界を検証し, 統計的手法 [8] を用いて, 雪崩の規模を表す lifetime と size および各セルから出るリンク数 (以下 out 次数という) の分布のスケールフリー性を議論した [9]. 本稿では, 論文 [9] で用いた計算を見直し, ライフゲームの周期性と GPU 計算を利用して, より大きなサイズの lattice で求めた結果について議論する.

2 休止状態の周期性と GPU 計算

ネットワーク表現は, ある初期配位の各セルに個別の 1 セル摂動を与え, ある時間発展後に摂動の有る・無しで状態が異なるセルをその摂動の影響を受けたものとみなし, 摂動を付与したセルとエッジで連結して部分グラフを求め, すべてのセルに対して得られた部分グラフを統合して定義される. 摂動を付与する時刻を t_0 , 以降の

時間発展を t_I とすると, ネットワークの変化はこれらを変数として表現され, ライフゲームなど休止状態を持つルールの場合, t_0 として過渡時間を超える値を設定すれば, 休止状態に対するネットワークを求めることができる [4]. ライフゲームの休止状態に生き残る代表的なセル配位で, 周期的に変化するものとしては周期 2 の”プリンカー”がある. lattice サイズが小さくなければほぼ確実に存在し, 休止状態の多くが周期 2 を持つ. 稀に周期 3 の”パルサー”が存在するので, 休止状態の判定として周期 2, 3, 6 を用いれば, すべての自明でない雪崩現象のうち 99.999 % まではその寿命を求めることができる. 残りの長い周期のものは時間発展 t_I の上限を設定して目視で判定する. これにより, メモリ上に保持しなければならない状態配位は 7 ステップまでとなり, 実行時のメモリ消費量は格段に少なくなる. また, マルチコアで並列処理が可能な GPU を搭載したグラフィックボードを導入すれば [10], 時間発展を通常の CPU による処理と比べて 10 倍以上高速化することができる.

ここでは lattice サイズを $N = 1001$ とし, 摂動を付与した時点からの経過時間 t_I の最大値を 3×10^4 ステップ, 初期配位の数を 100 とした. 結果として, 合計で 10^8 個のセルの雪崩現象を測定し, 約 1.9×10^7 個の非自明な雪崩を得た. 図 1 は, その結果から求めた休止状態ネットワークの out 次数の確率分布がである. ベキ則

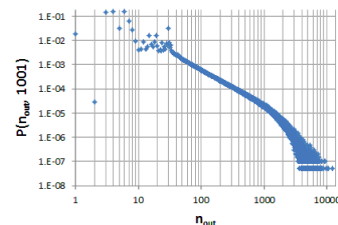


図 1 out 次数の確率分布 (両対数, $N = 1001$)

の検証は Clauset らの方法 [8] を採用し, 論文 [9] と矛盾しない結果を得た.

data set	p 値	x_{min}	scaling	critical
lifetime	1.00	363	$a = 1.25$	$\alpha = 1.83$
size	0.84	61	$b = 1.63$	$\beta = 1.86$
out 次数	1.00	684	$c = 1.2$	$\gamma = 1.74$

表 1 有限サイズスケール効果を検討したベキ則の検定

3 有限サイズスケール効果

ここでは、有限サイズスケール理論 [11, 12] を用いて $N \rightarrow \infty$ での振る舞いを検討する。対象となる測定可能な量 lifetime(l), size(s), out 次数 (n_{out}) の確率分布 $D(l)$, $D(s)$, $P(n_{out})$ についてスケール仮説が成り立つとし、コヒーレンス長について $l_{\xi} \propto N^a$, $s_{\xi} \propto N^b$, $n_{\xi} \propto N^c$ とすれば以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} D(l, N) &\propto l^{-\alpha} \exp(-\frac{l}{l_{\xi}}) & N, l \gg 1 \\ D(s, N) &\propto s^{-\beta} \exp(-\frac{s}{s_{\xi}}) & N, s \gg 1 \\ P(n_{out}, N) &\propto n_{out}^{-\gamma} \exp(-\frac{n_{out}}{n_{\xi}}) & N, n_{out} \gg 1 \end{aligned}$$

ここで α, β, γ は臨界指数 (critical exponent), a, b, c はスケール指数 (scaling exponent) と呼ばれる。 $N = 1001$ の場合のデータを用いて統計的検定を行った結果、ベキ則の p 値 (plausibility) および指数の値として表 1 を得た。ここで、 p 値が 1.0 に近いほどベキ則に強く従うので、これら 3 種類の秩序変数の分布はすべてベキ則に従うと判断でき、ライフゲームの休止状態は自己組織化臨界であると結論される。特に size については論文 [9] の値よりも大きく改善されており、これは Lattice サイズの拡大に伴うデータ量の大幅な増加によるものと考えられる。さらに、スケール指数がいずれも 1 より大きな値を持つことは、 N が十分大きな領域で、これら秩序変数のコヒーレンス長も十分大きく、スケールフリー性と矛盾しないことを意味している。

4 まとめ

CA のネットワーク表現を用いれば、ライフゲームの休止状態に潜む緊張状態もしくは臨界性を、生き残ったセル配位を結びつける複雑ネットワークとして表現できる。もしそれが自己組織化臨界であるならば、その複雑ネットワークもスケールフリー性を持ち、out 次数の分布はベキ則に従うはずである。実際ここで示したように、out 次数と雪崩の規模を示す秩序変数の分布はいずれもベキ則に従い、ライフゲームの休止状態は自己組織化臨界であると結論される。以上のように、ネットワー

ク理論における重要な指標である out 次数が、CA の臨界状態を評価するための秩序変数と関連付けられたことは、CA ネットワーク描像の重要な意義の一つである。

参考文献

- [1] M. Gardner, "Mathematical games," *Scientific American*, vol. 223, pp. 102–123, 1970.
- [2] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. Academic, New York, 1982.
- [3] Y. Kayama, "Network representation of cellular automata," in *2011 IEEE Symposium on Artificial Life (IEEE ALIFE 2011) at SSCI 2011*, pp. 194–202, 2011.
- [4] Y. Kayama and Y. Imamura, "Network representation of the game of life," *Journal of Artificial Intelligence and Soft Computing Research*, vol. 1 (3), pp. 233–240, 2011.
- [5] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, "Self-organized criticality: an explanation of 1/f noise," *Physical Review Letters*, vol. 59 (4), pp. 381–384, 1987.
- [6] A.-L. Barabási and R. Albert, "Emergence of scaling in random networks," *Science*, vol. 286, pp. 509–512, 1999.
- [7] P. Bak, K. Chen, and M. Creutz, "Self-organized criticality in the 'game of life'," *Nature (London)*, vol. 342, p. 780, 1989.
- [8] A. Clauset, C. R. Shalizi, and M. E. J. Newman, "Power-law distributions in empirical data," *SIAM Review*, vol. 51, pp. 661–703, 2009.
- [9] Y. Kayama, "Network representation of the game of life and self-organized criticality," in *Artificial Life (ALIFE), 2013 IEEE Symposium on*, pp. 60–66, IEEE, 2013.
- [10] AMD Aparapi, "Aparapi - api for data parallel java." <https://code.google.com/p/aparapi/>.
- [11] M. E. Fisher and M. N. Barber, "Scaling theory for finite-size effects in the critical region," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 28, pp. 1516–1519, Jun 1972.
- [12] M.N.Barber, *Finite size scaling, in Phase Transitions and critical phenomena*, vol. 8. Academic Press, London, 1983.