3C-2

グラフへの整数配置問題

杉山 雅英 (会津大学)

1. まえがき

言葉や数字を使った遊びは人間の知的好奇心を喚起する遊びとして古くから行なわれてきた。IT の進歩した現代でも数字を使った数独などのパズルの雑誌が多数発行されるほどである。言葉遊びは言語依存であり数字遊びは言語独立の普遍的な遊びである。ことば遊びや数字遊びをコンピュータに行なわせることは知的挑戦でありその実現は新たなコンピュータサービスの提供の可能性を持っている。そのような観点から我々は言葉遊びのコンピュータ上での実現を検討した [1, 2, 3]。数字遊びにおける魔方陣 [4, 5, 6] や虫食い算などの数字を規則に従って配置する問題は良く知られたパズルである。本論文では魔方陣の一種である整数の配置問題を検討する。

2. 整数配置問題について

2.1 定和とその最大・最小

魔方陣は与えられた数字集合の全ての数字をただ一度だけ用いて方形に数字を配置し縦横斜めの列の数字の和を一定にする数学問題である。配置の仕方の変形として立方体配置や星型配置の魔星陣なども知られている。本論文で扱う整数配置問題はグラフの頂点と辺に数字を配置し魔方陣と同様に数字の和を一定にすることである。ここで配置する数字は 1 から始まる連続する整数とする。グラフは正多角形や正多面体などを含む頂点の次数一定の条件を満たす一般的なグラフとする。魔方陣での縦横の数字の和は定和と呼ばれているので本論文でも辺とその頂点の数字の和を定和 S と呼ぶことにし、整数の定和配置問題と呼ぶことにする。

グラフ G の頂点の個数を V、辺の個数を E とし、頂点に集まる辺の個数 (頂点の次数) を一定値 p とする。辺の上に置く数字の個数を m とすると、配置する数字の個数 n は式 (1) で与えられる。

$$n = mE + V \tag{1}$$

図 1 は正四面体に配置した例であり、$V = 4, E = 6, p = 3$ で辺に 2 個の数字を配置するので $m = 2$ で式 (1) から $n = 16$ となる。1 ∼ 16 の数字を 4 つの頂点及び各辺に数字を 2 つ配置して定和が $S = 26$ となっている。頂点に置く数字の和を X とすると辺毎の定和の総和 $E \cdot S$ は p 回重複する頂点の数と 1 ∼ n の和の合計に一致するので式 (2) が成り立つ。

$$E \cdot S = (p-1)X + \frac{n(n+1)}{2} \tag{2}$$

通常の魔方陣では定和は方形の大きさが与えられれば一定値であるが、本配置問題での定和 S の値は頂点に配置する数字の和 X に依存し、S の値の範囲は X の値の範囲で与えられる。図 1 のように頂点に小さい数字から配置する場合を最小配置、大きい数字から配置する場合を最大配置と呼ぶことにすると X の最小・最大値は式 (3) で与えられる。

$$\begin{cases} X_{\min} = \dfrac{V(V+1)}{2}, \\ X_{\max} = nV - \dfrac{V(V-1)}{2}. \end{cases} \tag{3}$$

それらの差は $X_{\max} - X_{\min} = nV - V^2 = mEV$ である。式 (2), 式 (3) を用いて最大・最小配置の定和 $S_{\max}, S_{\min}$ を算出できる。式 (2) において $S_{\max}, S_{\min}$ の n は共通であるのでそれらの差は $S_{\max} - S_{\min} = (p-1)(X_{\max} - X_{\min}) = (p-1) \cdot mEV$ となる。G は頂点次数一定であるので $p \cdot V = 2E$ が成り立ち式 (4) で与えられる。

$$S_{\max} - S_{\min} = m(2E - V) \tag{4}$$

従って定和 S の範囲はグラフ G の E, V が与えられれば辺の上に配置する個数 m で決定されることがわかる。

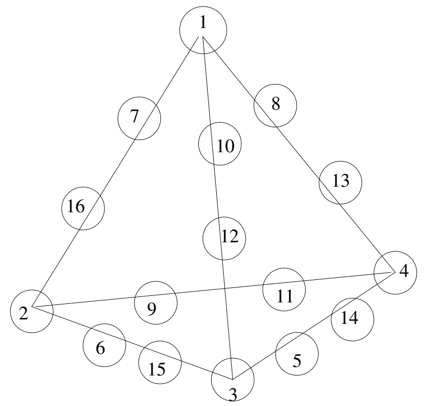

図 1: 正四面体の最小配置の例 ($m = 2, n = 16$)

2.2 定和配置のアフィン変換

与えられたグラフ G に対して整数の集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ が定和配置可能であり、その定和を S とすると任意の整数係数のアフィン変換 $f(x) = \alpha x + \beta$ ($\alpha \neq 0$) で得られる整数の集合

Integer Graph Assignment Problem, M. Sugiyama (The Univ. of Aizu)

$\{f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)\}$ も定和配置可能であり、変換後の定和 S' は式 (5) となる。

$$S' = \alpha S + \beta(m+2) \tag{5}$$

従って配置する数字列が $a_n = \alpha n + \beta$ と表されるときは $1, 2, \cdots, n$ の配置問題に帰着されることになる。特にアフィン変換 $f(x) = n + 1 - x$ ($\alpha = -1, \beta = n+1$) を用いると最小配置と最大配置を互いに変換できる。例えば図 1 に示した最小配置を用いて $f(x) = 17 - x$ で最大配置に変換できることになる。最大配置・最小配置の定和の値は式 (5) から関係式 (6) を満す。

$$S_{\max} + S_{\min} = (n+1)(m+2) \tag{6}$$

さらに式 (4), (6) を用いて最大配置・最小配置の定和を式 (7) のように計算できる。

$$\begin{cases} S_{\max} = \frac{1}{2}\{(n+1)(m+2) + m(2E - V)\} \\ S_{\min} = \frac{1}{2}\{(n+1)(m+2) - m(2E - V)\} \end{cases} \tag{7}$$

3. 正多角形・正多面体への定和配置

式 (7) で与えられる定和 S が整数値になることは定和配置できることの必要条件である。従って S が整数にならない場合には定和配置できないことになる。正多面体において $V, E \equiv 0(\mathrm{mod.}\ 2)$ であるので $n = mE + V \equiv 0(\mathrm{mod.}\ 2)$ である。式 (7) の分子は $m \equiv 1(\mathrm{mod.}\ 2)$ の時、$(n+1)(m+2) + m(2E - V) \equiv 1(\mathrm{mod.}\ 2)$ である。分子が奇数となるので S は整数にならないことになり、即ち、最小・最大配置問題の解は存在しないことになる。

正多面体の最小・最大配置問題

正多面体の辺に奇数個の数字をおく最小・最大配置解は存在しない。

同様に正多角形において $V = E$ であるので $m \equiv 1(\mathrm{mod.}\ 2)$ の時、分子 $\equiv 1(\mathrm{mod.}\ 2)$ となるので最小・最大配置問題の解は存在しないことになる。

正多角形の最小・最大配置問題

正多角形 の辺の数 E が偶数の時、辺に奇数個の数字をおく最小・最大配置解は存在しない。

正６面体および正８面体への配置の例を図2, 3 に示す。図 2 では $m = 2, S_{\min} = 50, n = 32$、図 3 では $m = 2, S_{\min} = 44, n = 30$ である。最大配置は最小配置から変換 $f(x) = n + 1 - x$ で構成できる。

4. むすび

多角形、正多面体を含む次数一定のグラフへの整数定和配置問題について述べ定和の計算法及びその最大・最小値、定和配置の解が存在しない条件を導き、正４面体、６面体、８面体での具体的な構成例を述べた。今後は指定の定和値での構成問題、正１２面体、２０面体の具体的な配置を検討する。

参考文献

[1] 坂田, 杉山, Internet Shiritori using Java, 情報処理学会, 5N-10 (1999-09).

[2] 赤塚, 杉山, 仮名の出現頻度の偏りを用いた「いろは歌」の生成, 情報処理学会, 1Q-6 (2001-03).

[3] 杉山 雅英, ことば遊び「doublet」とグラフ探索問題について, 情報処理学会 東北支部第 4 回研究会, 02-4-B9 (2003-03).

[4] 大森清美, 魔方陣の世界, 日本評論社.

[5] 内田伏一, 魔方陣にみる数のしくみ, 日本評論社.

[6] ペレマリン, 藤川健治訳, 遊びの数学, 社会思想社.

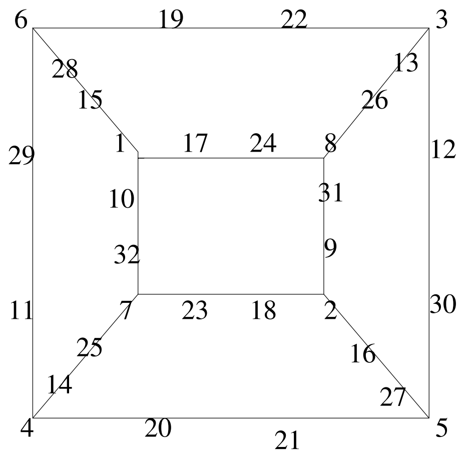

図 2: 正６面体の最小配置の例 ($m = 2, n = 32$)

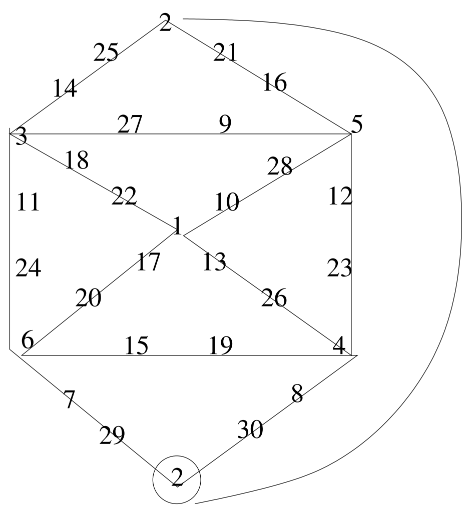

図 3: 正８面体の最小配置の例 ($m = 2, n = 30$)