匿名の開環境下における協力ゲームについて

横　尾　　真[†]　　ビンセント コニッツァー[†††]　　トゥオマス サンドホルム[†††]
大　田　直　樹[††]　岩　崎　　敦[†]

提携を結ぶということは，自動化された利己的な主体（エージェント）の持つ重要な性質である．エージェント間の提携が成立した場合，我々は提携を結んだエージェントの集合が得た利得をどのように分配するかを考える必要がある．協力ゲーム理論はこの利得の分配法について研究してきており，（シャープレイ値やコア，最小コアや仁といった）様々な解概念が提案されてきた．本論文ではこれら既存の解概念が，インターネットのような匿名の開環境の下でエージェントが行える操作に対し，脆弱であることを示す．匿名の開環境ではエージェントは架空名義の利用，共謀，能力の隠蔽といった操作が可能となる．我々はこれらの操作に頑健な新しい解概念である匿名操作不可能コアを提案し，この解概念を特徴づけるいくつかの公理的な条件を示す．また匿名操作不可能コアの条件を緩和した解概念として匿名操作最小コアを提案し，この解概念がつねに非空であることを示す．

Coalitional Games in Open Anonymous Environments

Makoto Yokoo,[†] Vincent Conitzer,[†††] Tuomas Sandholm,[†††]
Naoki Ohta[††] and Atsushi Iwasaki[†]

Coalition formation is a key aspect of automated negotiation among self-interested agents. In order for coalition to be stable, a key question that must be answered is how the gains from cooperation are to be distributed. Various solution concepts (such as the Shapley value, core, least core, and nucleolus) have been proposed. In this paper, we demonstrate how these concepts are vulnerable to various kinds of manipulations in open anonymous environments such as the Internet. These manipulations include submitting false names (one acting as many), collusion (many acting as one), and the hiding of skills. To address these threats, we introduce a new solution concept called the anonymity-proof core, which is robust to these manipulations. We show that the anonymity-proof core is characterized by certain simple axiomatic conditions. Furthermore, we show that by relaxing these conditions, we obtain a concept called the least anonymity-proof core, which is guaranteed to be non-empty.

1. はじめに

協力ゲームは，複数の利己的な主体（エージェント）が協力する際に，どのように提携を形成し，提携内でどのように利得を配分するかに関する，フォン・ノイマン以来の伝統ある研究分野である．複数の自律的なエージェントによって構成されるマルチエージェントシステムにおいては，エージェントは互いに協力することにより，より難しい問題をより効率的に解くことが期待される．しかしながら，その際には，エージェントどうしが協力した結果得た利得を，エージェント間でどのように分配するかが問題となる．この利得の分配方法に関して，協力ゲームの理論を応用する研究が進められている[3),4),6),9),11),13)]．

また近年のインターネットの普及により，複数の企業，組織が動的，迅速に提携を構成することが可能/必要となったことから，協力ゲーム理論の適用分野は今後さらに拡大していくことが予想される．

一方，従来の協力ゲームでは，提携の安定性を主眼としたコアに代表される様々な解概念が提案されているが，これらの解概念は，いずれも各参加者の能力が既知であることを前提としており，能力が知られていない新しい参加者が動的にゲームに参加するといった，インターネットのような匿名性が強い開環境での実行

† 九州大学大学院システム情報科学研究院
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University
†† 九州大学大学院システム情報科学府
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University
††† カーネギーメロン大学コンピュータサイエンス学科
Computer Science Department, Carnegie Mellon University

を考慮していない．

本論文では，匿名性が強い環境における既存の解概念の適用可能性について考察する．具体的には，1 人のエージェントが架空名義を用いて複数のエージェントのように振る舞ったり，複数のエージェントが共謀し，単一のエージェントのように振る舞うなどの不正行為を考える．インターネットのような環境では各エージェントの名義を確認することは事実上不可能であるので，協力ゲームの解概念を，エージェントがこのような不正行為を行っても利得が増加しないように定義する必要がある．このような匿名性が存在する環境での，不正行為の影響を受けない制度の設計に関しては，オークションに関しては研究事例があるが，協力ゲームに関しては従来，検討がなされていなかった[12]．

たとえば，インターネット上でプログラムを開発する場合，開発者はその開発に参加する前に，自分の利得を不正に増やすために，開発とは無関係のところに労力を注ぐかもしれない．このような問題を防ぐために，本論文では架空名義の利用や，共謀といった不正行為の影響を受けない解概念を提案する．

本論文ではまず協力ゲームの基本的な概念を説明し，代表的な解概念であるシャープレイ値，コア，最小コア，そして仁について説明する（2 章）．次に匿名の開環境でエージェントが実行可能な不正行為/操作を定式化するため，スキルの特性関数という概念を提案し，それを用いて，エージェントが実行可能な不正行為/操作を定式化する（3 章）．そしてその不正行為のうち，架空名義の利用と共謀が既存の解概念では防止不可能であることを示す（4 章）．次に架空名義の利用と共謀を防止する方法を述べ，この方法がスキルの隠蔽という操作に脆弱であることを示す（5 章）．そのうえで架空名義の利用と共謀およびスキルの隠蔽すべてを防止できる解概念，匿名操作不可能コアを提案する（6 章）．最後に匿名操作不可能コアをもとにどのようなときも配分を求めることができるように変更を加えた，匿名操作不可能最小コアを提案する（7 章）．

2. 協力ゲームの既存の解概念

本章では協力ゲームで用いられる基本的な用語を示し，協力ゲームの既存の解概念について説明する[1),2)]．

定義 1（協力ゲーム）．複数のエージェントが戦略を決定する際に，エージェント間で拘束的合意が可能なゲームを協力ゲームという．

拘束的合意を得るためには，ゲームの結果手に入れた利得をエージェント間でいかに分配するかが課題となる．協力ゲームでは，あるエージェントの集合（提携）が協力することによって得られる利得を定義するため，以下に示す特性関数を用いる．

定義 2（提携）．ゲームに参加するすべてのエージェントの集合を W とする．$X \subseteq W$ を満たすエージェントの集合 X を提携という．

定義 3（特性関数）．特性関数 $w : 2^W \to \Re$ は，任意の提携 X に対して，提携 X のメンバが協力した結果得られる利得 $w(X)$ を与える．

特性関数は，利得が譲渡可能であることおよび，任意の提携が得る利得はその提携のメンバによってのみ定まる，という前提の下に成立する．

エージェントが協力する場合，より多くのエージェントが互いに協力した方が，より大きな利得が得られることが自然である．このような性質を持つ特性関数を優加法的な特性関数という．

定義 4（優加法的な特性関数）．$X \cap Y = \emptyset$ を満たす任意の提携 X，Y について，$w(X)+w(Y) \leq w(X \cup Y)$ を満たすような特性関数を優加法的な特性関数という．

本論文では以下，特性関数は優加法的な特性関数であることを仮定する．

次に代表的な解概念であるシャープレイ値について説明する[8)]．すべてのエージェントが参加する任意の順列 o を定義し，各エージェントは順列の前の方から順番にゲームに参加する．このとき各エージェントに与えられる利得は，自分が参加することによって増加した利得の量（限界効用）とする．シャープレイ値とは上の方法で利得を求めたとき，各エージェントが得る利得の期待値を示したものである．

定義 5（シャープレイ値）．エージェントの全体集合 W の各要素を任意に並べた順列 o について，エージェント i より前にあるエージェントの集合 $X(o,i)$ を仮定したとき，以下を満たす値をエージェント i のシャープレイ値という．

$$Sh(W,i) = \frac{1}{|W|!}\sum_{o}(w(X(o,i) \cup \{i\}) - w(X(o,i))).$$

シャープレイ値は対称なエージェントどうしが受け取る利得は同じになるという特徴を持つ．ただし，本論文では任意の提携 X に属さないエージェント i，$j(\notin X)$ が $w(\{i\} \cup X) = w(\{j\} \cup X)$ を満たすとき，i，j を対称なエージェントと呼ぶ．

次にもう 1 つの代表的な解概念であるコアについて説明する[5),10)]．直感的には，コアとは，任意の提携に対してゲームから逸脱する誘因を与えないような利得の分配方法（配分）の集合である．

定義 6（コア）．ゲームに参加するエージェントの集

合を W，$|W| = n$，特性関数を w，各エージェントの配分を $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ としたとき，以下の条件を満たす配分の集合をコアという．

$$\forall X \subset W, \sum_{i \in X} x_i \geq w(X),$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = w(W).$$

上の 2 つの条件のうち 1 番目の条件を満たすということは，任意の提携 X に属するエージェントが集団としてゲームから逸脱し，X 内で利得を分配することがないということを示し（提携合理性），2 番目の条件を満たすということは，配分が実現可能であることを示す（全体合理性）．コアはゲームによっては空となる場合もあるし，逆に非常に多くの配分がコアに属する場合もある．

次に最小コアを定義するために，ϵ-コアを導入する．

定義 7（ϵ-コア）．ゲームに参加するエージェントの集合を W，$|W| = n$，特性関数を w，各エージェントの配分を $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ としたとき，以下の条件を満たす配分の集合を ϵ-コアという．

$$\forall X \subset W, \sum_{i \in X} x_i \geq w(X) - \epsilon$$
$$\sum_{k=1}^{n} x_k = w(W)$$

ϵ が正ならば，ϵ-コアはコアの条件を弱めたものとなり，逆に ϵ が負ならば，ϵ-コアはコアの条件を強めたものとなる．また，また任意の配分が ϵ-コアに含まれる場合，任意の $\epsilon' > \epsilon$ について，その配分は ϵ'-コアに含まれる．

定義 8（最小コア）．以下の条件を満たす配分 $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ の集合を最小コアと呼ぶ．

（1） ある ϵ に関して，$\vec{x}$ は ϵ-コアに属する．
（2） 任意の $\epsilon' < \epsilon$ に関して，ϵ'-コアは空集合となる．

最小コアは非空であることが保証されるが，複数の要素からなる場合も存在する．またあるゲームのコアが非空である場合，そのゲームの最小コアはコアの部分集合となる．最小コアの条件をさらに厳しくした概念として仁（nucleolus）がある[7]．仁は必ず一意に決まることが保証される．仁を定義するためには，不満と不満ベクトルという概念を定義する必要がある．

定義 9（不満）．ゲームに参加するエージェントの集合を W，$|W| = n$，特性関数を w，各エージェントの配分を $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ としたとき，任意の提携 X が配分 $\vec{x}$ に対し持つ不満は $w(X) - \sum_{i \in X} x_i$ である．

定義 10（不満ベクトル）．$\vec{x}$ から求まるすべての不満を大きい順に並べたものを不満ベクトルという．

不満ベクトルを用いて，仁を求めることができる．

定義 11（仁）．仁とは辞書式順序で最も小さい不満ベクトルを持つ配分である

仁となる配分は一見複数あってもおかしくないように見えるが，ただ 1 つしか存在しないことが示されている．また仁もシャープレイ値と同じように，対称なエージェントどうしが受け取る利得は同じになるという特徴を持つ．

3. 匿名の開環境下においてエージェントが行う不正操作

前章では，複数のエージェントが協力し合いあるプロジェクトを行って，得た利得分配方法について述べた．しかし，インターネットのような匿名の開環境において複数のエージェントがプログラムの開発といったプロジェクトを行う場合，それぞれのエージェントは自分が受け取る利得を増加させるために，プロジェクトとは関係がないことに労力をかける可能性がある．

本章では，匿名の開環境下でエージェントが実行可能な操作について定式化する．匿名の開環境でエージェントが実行可能な操作を定式化するためには，通常のエージェントの集合に関して定義された特性関数で与えられる情報のみでは不十分である．たとえば，エージェントが架空名義を用いて 2 つのエージェントに分かれた場合，新しい特性関数はどのように定義されるべきであろうか？ 明らかに，新しい特性関数はエージェントがどのように分割されるかに依存するが，元の特性関数は，新しい特性関数がどのように定義されるべきかに関する十分な情報を与えていない．この問題を解決するためには，エージェントの持つ能力に関する，より詳細な記述が必要となる．このため，我々はエージェントの持つスキルという概念を導入する．スキルとはエージェントの持つ能力を限界まで細分化したものである．特性関数をエージェントの集合に対してでなく，スキルの集合によって定義することにより，匿名の開環境でエージェントが実行可能な操作を明確に定義することが可能となる．

定義 12（スキルとエージェント）．それぞれのエージェントが持つ，個々の分割不可能な技能をスキルと呼ぶ．各エージェントはそれぞれ 1 つ，または複数のスキルを持つ．また各スキルはそれぞれ固有の名称を持ち，同じ機能を持つスキルもそれぞれ区別することが可能であるとする．

定義 13（スキルの特性関数）．スキルの特性関数 $v : 2^T \rightarrow \Re$（T はスキルの全体集合）は，任意のスキルの集合 S に対して，S を持つエージェントが協力した場合に得られる利得 $v(S)$ を与える．

エージェント i が持つスキルの集合を S_i とする．このとき，任意の提携 X について，$S_X = \bigcup_{i \in X} S_i$ とおいたとき，$w(X) = v(S_X)$ が成立するような，スキルの特性関数 v はエージェントの特性関数 w に情報を追加したものといえる．以下スキルの特性関数はエージェントの特性関数に情報を追加したものとする．

匿名の開環境下での協力ゲームは以下のような手順で行われるとする．

- メカニズムデザイナという特別なエージェントを用意する．このエージェントはこの協力ゲームに参加しうるスキルの集合 T と T の部分集合を引数とする特性関数 v を知っているものとする．
- エージェント i はゲームに参加する際，所持するスキルの集合をメカニズムデザイナに申告する．
- メカニズムデザイナはそれぞれのエージェントに与える利得の配分を決定する．

次に匿名の開環境でエージェントが行える操作について定義する．

定義 14（スキルの隠蔽）．スキルの隠蔽とは，スキルの集合 S_i を所持するエージェント i について，i はスキルの隠蔽を行い，任意の $S'_i \subset S_i$ のスキルしか所持していないように振る舞う行為のことである．

スキルの隠蔽とは逆に，持っていないスキルを持っていると偽る行為は不可能であるとする．なぜなら実際に協力し合う際に能力の不備は明らかになると予想されるからである．

定義 15（架空名義の利用）．架空名義の利用とは，複数のスキルを所持するエージェントが複数のエージェントとして振る舞うことである．ただし，すべてのスキルはユニークであるため，別々のエージェントに同じスキルを持たせることはできない．

定義 16（共謀）．共謀とは，任意のエージェントの集合 X が，それぞれのスキルの和集合 $\bigcup_{i \in X} S_i$ を持つ単独のエージェントのように振る舞うことである．

架空名義や共謀はスキルの隠蔽と組み合わせることが可能である．たとえば架空名義はスキルの隠蔽と組み合わせることにより，すべてのスキルを分割した複数のエージェントに振り分ける必要がなくなる．また共謀とスキルの隠蔽を組み合わせることにより，共謀してできた 1 人のエージェントはスキルの和集合の部分集合を持つエージェントとして振る舞うことができる．また架空名義と共謀も互いに組み合わせられる．たとえばスキル a, b を持つエージェントと，スキル c のみを持つエージェントがいるとする．このとき，まず前者のエージェントが架空名義を用いスキル a を持つエージェントとスキル b を持つエージェントに別れ，次に c のみを持つ後者のエージェントと a のみを持つエージェントとが共謀するような行為も可能である．

スキルの隠蔽，架空名義の利用，共謀を組み合わせることにより，以下のような行為が可能になる．

定理 1. 任意のエージェントの集合 X の所持するスキルの集合を S_X とする．匿名の開環境下において集合 X は X の代わりとなる任意のエージェントの集合 X' をゲームに参加させることができる．このとき X' に属する各エージェントが所持するスキルは S_X の任意の部分集合 S'_X を自由に割り振ることにより決定することができる．

証明. 以下の方法によって定理 1 に示した行動は可能になる．まず提携 X が共謀を行い，単独の仮想エージェント x がスキルの集合 S_X を持つように振る舞う．次に x がスキルの隠蔽を行い，スキルの集合 $S'_X \subseteq S_X$ しか持っていないように振る舞う．最後にエージェント x が架空名義を用いて，提携 X' のように振る舞い S'_X を自由に振り分ける． □

4. 既存の解概念の不正操作に対する脆弱性

ここでは既存の解概念が匿名の開環境下では適用不可能であることを示す．

4.1 既存の解概念の架空名義に対する脆弱性

例 1. 3 つのスキル a, b, c が存在すると仮定する．また，3 つのスキルがそろった場合に利得 1 が得られ，他の場合に利得は 0 であるとする．

$v(\{a, b, c\}) = 1,$

$S \subset \{a, b, c\}, v(S) = 0.$

ここでエージェント 1 がスキル a を，エージェント 2 がスキル b, c を持つと仮定する．このときエージェントの特性関数は以下のようになる．

$w(\{1\}) = w(\{2\}) = 0,$

$w(\{1, 2\}) = 1.$

このとき各エージェントのシャープレイ値は 2 人のエージェントが対称であるため，両者とも 1/2 である．コアとなる配分 (x_1, x_2) は $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 = 1$ を満たす配分，最小コアや仁となる配分はシャープレイ値と同じで両者とも 1/2 という配分になる．

例 2. スキルの特性関数は例 1 と同じようにし，エージェント 1 がスキル a を，エージェント 2 がスキル b

を，エージェント 3 がスキル c を持つと仮定する．このときエージェントの特性関数は以下のようになる．

$w(\{1,2,3\}) = 1,$

$X \subset \{1,2,3\}, w(X) = 0.$

このときそれぞれのエージェントのシャープレイ値は 3 人のエージェントがお互いに対称であるためそれぞれ 1/3 ずつ，コアとなる配分 (x_1, x_2, x_3) は $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_1+x_2+x_3 = 1$ を満たす配分，最小コアや仁となる配分はシャープレイ値と同じで両者とも 1/3 という配分になる．

例 1，例 2 により，シャープレイ値，最小コア，仁はすべて架空名義に脆弱であることが分かる．例 1 においてエージェント 2 が架空名義を用いて，スキル b を持つエージェントとスキル c を持つエージェントとして振る舞った場合，エージェントの特性関数は例 2 と同じになる．つまりエージェント 2 は架空名義を用いることにより，利得が 1/2 から $1/3+1/3 = 2/3$ に増加する．このことは下の定理を証明することになる．

定理 2. 任意の協力ゲームについて，以下の 3 つの条件を満たす利得の配分方法は存在しない．

(1)　対称なエージェントに対し，同じ利得を与える．

(2)　エージェントの全体集合 W が得た利得は，個々のエージェントにもれなく分配される．

(3)　架空名義に対し頑健性を持つ．

証明. 1), 2) を同時に満たす利得の配分方法は例 1 では両者に 1/2 ずつの利得を与える配分，一方で例 2 では三者に 1/3 ずつの利得を与える配分しか存在しない．しかし，先に述べたとおり，例 1 のエージェント 2 が架空名義を用いれば，例 2 の状況と等しくなる．以上より，これらの配分方法が架空名義に対して頑健でない．このため，1), 2) が満たされているとき，3) を見て満たすことが不可能であることが示された．　□

4.2　共謀に対する脆弱性

例 3. 3 つのスキル a，b，c が存在すると仮定する．スキルの特性関数は以下で与えられる．

$v(\{a,b\}) = v(\{a,c\}) = v(\{a,b,c\}) = 1,$

$v(\{a\}) = v(\{b\}) = v(\{c\}) = v(\{b,c\}) = 0.$

また，エージェント 1 がスキル a，エージェント 2 がスキル b，エージェント 3 がスキル c を持つと仮定する．このときエージェントの特性関数は以下のように与えられる．

$w(\{1,2\}) = w(\{1,3\}) = w(\{1,2,3\}) = 1,$

$w(\{1\}) = w(\{2\}) = w(\{3\}) = w(\{2,3\}) = 0.$

この場合のコアは唯一の配分からなり，

$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$

となる．この理由はエージェント 2（もしくは 3）に正の利得が与えられた場合，エージェント 1 と 3（もしくは 1 と 2）がゲームから逸脱する誘因を持つためである．この場合の最小コアおよび仁は，コアがただ 1 つしか存在しないため，コアと同じ配分となる．またシャープレイ値を求めた場合，エージェント 1 のシャープレイ値は 2/3，エージェント 2，3 のシャープレイ値はそれぞれ 1/6 となる．

例 4. スキルの特性関数は例 3 と同じとし，エージェント 1 がスキル a を，エージェント 2 がスキル b，c を持つと仮定する．このときエージェントの特性関数は以下のようになる．

$w(\{1\}) = w(\{2\}) = 0,$

$w(\{1,2\}) = 1.$

このエージェントの特性関数は例 1 と同じである．

例 1 と同じなので，シャープレイ値，最小コア，仁では両者とも 1/2，コアとなる配分 (x_1, x_2) は $x_1 \leq 0$, $x_2 \leq 0$，$x_1 + x_2 = 1$ を満たす配分となる．例 3 のような状況で，最小コア，仁を用いたときは，エージェント 2 と 3 は互いに共謀しあうことにより両者の利得の和が 0 から 1/2 に増加し，シャープレイ値を用いたときも，利得の和は 1/3 から 1/2 に増加する．これによりシャープレイ値，最小コア，仁は共謀に対し脆弱であることが分かる．

5.　スキルベースの解概念とスキルの隠蔽

前の章であげられた例から，匿名の開環境の下では，エージェントの振舞いにより利得の配分が変化してしまうことが分かる．この変化を防止するため，スキルの特性関数をもとに配分を計算する方法を提案する．

それぞれのスキルを独立したエージェントと見なすと，スキルの特性関数に対して解概念を適用することが可能になる．最初にこの方法でそれぞれのスキルに対して与える利得の配分を求める．次にスキルに対する配分を用いて，エージェントに与える利得の配分を求める．エージェントに与えられる利得はそのエージェントが持つスキルに与えられる利得の総和とする．

たとえば前の章の例 1 について，この方法を用いるとする．各スキルのシャープレイ値，最小コア，仁は，3 つのスキルそれぞれに 1/3 ずつ利得を与える配分となる．よってスキル a を持つエージェント 1 の利得は 1/3，スキル b，c を持つエージェント 2 の利得は $1/3 + 1/3 = 2/3$ となる．

一方前の章の例 2 について考える．スキルの特性関数は例 1 と同じなので，各スキルのシャープレイ値，最小コア，仁は，3 つのスキルそれぞれに 1/3 ずつ利得を与える配分となる．つまりスキル a を持つエー

ジェント 1 の利得は 1/3，スキル b を持つエージェント 2 の利得は 1/3，スキル c を持つエージェント 3 の利得は 1/3 となる．よって例 1 において，エージェント 2 が架空名義を利用したと仮定しても，利得は 2/3 から変化しない．このようにスキルに対する利得の配分を求めたうえで，エージェントに対する配分を決定する方法は，架空名義や共謀に対し，頑健となる．

定理 3. あらゆる解概念は，スキルの特性関数に対して適用することにより，架空名義および共謀，またこれらの組合せに対し，頑健となる．

証明. エージェントが架空名義を利用しても，また共謀を行っても，スキルの特性関数の形は変化しない．そのためエージェントがこれらの行為を行っても，スキルに対する利得の配分は変化しない．さらにエージェントが架空名義を利用しても，また共謀を行っても，実際に所持しているスキルは変わらないので，エージェントに与えられる利得も変化しない． □

しかしこの方法を用いても，スキルの隠蔽を行う誘因が残る可能性がある．たとえば，例 4 についてスキルに対する利得の配分を考えると，コア，最小コア，仁を用いるとスキル a に 1，他のスキルに 0 という配分になる．一方で，シャープレイ値を用いるとスキル a に 2/3，スキル b，c にそれぞれ 1/6 という配分になる．つまり，コア，最小コア，仁を用いるとエージェント 1 に 1，エージェント 2 に 0 という配分となる．また，シャープレイ値を用いると，エージェント 1 に 2/3，エージェント 2 に 1/3 という配分になる．次に下の例について考える．

例 5. 2 つのスキル a，b が存在すると仮定する．このときスキルの特性関数は以下のようになるとする．

$v(\{a,b\}) = 1,$

$v(\{a\}) = v(\{b\}) = 0.$

このときシャープレイ値，最小コア，仁を用いると，スキルに対する利得の配分はそれぞれ 1/2 となる．

次に例 3 のスキルの特性関数から，各スキルに対する利得の配分を計算する．このとき最小コア，仁を用いると，a に 1 他のスキルに 0 という配分になり，シャープレイ値を用いると，a に 2/3 他のスキルに 1/6 という配分になる．ここでエージェント 1 がスキル a を，エージェント 2 がスキル b，c を持つと仮定する．このとき，シャープレイ値を用いた場合，エージェント 2 はスキル c を隠蔽することで，利得が 1/3 から 1/2 に上昇し，最小コアおよび仁を用いた場合，エージェント 2 はスキル c を隠蔽することで，利得が 0 から 1/2 に上昇する．

6. 匿名操作不可能コア

本章では，匿名の開環境下で利用できる新しい解概念を提案する．まず，解概念が示すべき公理的な条件を示し，これらの条件を満たす唯一の解概念である，匿名操作不可能コアを示す．

6.1 解概念が満たすべき公理系

メカニズムデザイナはゲームで申告される参加しうるスキルの全体集合 T を知っているが，実際にエージェントが持つスキルの集合は T の部分集合となる．このため主催者は，任意のスキルの集合 $S \subseteq T$ に関して，配分を決定する利得関数 π を定義しておく必要がある．本論文では，π は匿名であると仮定する．

利得関数 π が匿名であるとは，エージェント i が得られる利得は，i および他のエージェントの持つスキルにのみ依存して決まり，i および他のエージェントの名義には無関係であることを意味する．匿名である利得関数を，任意の $S \subseteq T$ および S と重複しないスキルの集合の任意の集合を SS に対して，$\pi(S, SS)$ とする．この関数は，スキルの集合 S を持つエージェントもしくはその提携が，所持スキルを SS で表現できるエージェントの集合と，協力した際に得る利得を示す．存在を申告したすべてのエージェントの集合を W，各エージェントが申告したスキルのプロファイルを $\vec{S} = (S_1, S_2, \ldots)$ とする．S_i はエージェント i が持っていると申告したスキルの集合である．S_X を，X に属するエージェントの申告したスキルの和集合，SS_X を，X に属するエージェントの申告したスキルの集合の集合，$SS_{\sim i}$ を，i 以外のエージェントが申告したスキルの集合の集合とする．

π の満たすべき公理的な条件として以下が考えられる．

(1) π は匿名である．

(2) あるゲームに対し，π によって与えられる配分は実行可能である：

$$\forall \vec{S}, \sum_{i \in W} \pi(S_i, SS_{\sim i}) = v(S_W).$$

(3) π によって与えられる配分は，すべての提携に対して独立する誘因を与えない：

$$\forall \vec{S}, \forall X \subseteq W, \sum_{i \in X} \pi(S_i, SS_{\sim i}) \geq v(S_X).$$

(4) π はスキルの隠蔽に対して頑健である：任意の S'，S ($S' \subseteq S$) および任意のスキルの集合の集合 SS ($\{S\} \cap SS = \emptyset$) について

$$\pi(S', SS) \leq \pi(S, SS).$$

(5) π は架空名義および共謀に対して頑健である：

$$\forall\vec{S}, \forall X \subseteq W, Y = W \setminus X,$$

$$\sum_{i\in X}\pi(S_i, SS_{\sim i}) = \pi(S_X, SS_Y).$$

上記の条件は，コアの条件を拡張したものである．

6.2 匿名操作不可能コア

本節では，協力ゲームの新しい解概念として，匿名操作不可能コアを提案し，それが前節で示した公理的条件を満たす唯一の解概念であることを示す．以下，スキルベースのコアの定義を示し，このスキルのコアを用いて匿名操作不可能コアを定義する．

定義 17（スキルベースのコア）．スキルの集合 $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ に対するスキルのコア $Core(S)$ とは，以下の条件を満たす，それぞれのスキルに対する利得のベクトル $C^S = (c^S_{s_1}, c^S_{s_2}, \ldots)$ の集合である．

$$\forall R \subset S, \sum_{s_j\in R} c^S_{s_j} \geq v(R) \text{ and } \sum_{s_j\in S} c^S_{s_j} = v(S).$$

S に対するスキルのコアとは，S がゲームに参加したスキルの集合であるとき，び $S' \subset S$ を満たす任意のスキルの集合 S' が集団でゲームから逸脱し，S' 内で利得を分配することがなく，また手に入れた利得がもれなく分配されるような配分のことである．

また S' が集団でゲームから逸脱し，S' 内で利得を分配する誘因を持つ場合，つまり $\sum_{s_j\in S'} c^S_{s_j} < v(S')$ を満たすようなスキルの集合 S' をブロッキング提携という．つまりスキルベースのコアに含まれるような配分は，ブロッキング提携を生み出さないことになる．

定義 18（匿名操作不可能コア）．$S_W \subseteq T$ を満たす任意の S_W に対するスキルのコアが存在するとき，以下の条件を満たす利得関数 π_{ap} の集合を匿名操作不可能コアと呼ぶ．また S_W に対するスキルのコアが存在しないとき，匿名操作不可能コアは空とする．

（1） $\bigcup_i S_i = S_W$ を満たす任意のスキルのプロファイル $\vec{S} = (S_1, S_2, \ldots)$ および，スキルの集合 S_i を除いたスキルの集合の集合 $SS_{\sim i} = \{S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots\}$ に関して，任意の i について $\pi_{ap}(S_i, SS_{\sim i}) = \sum_{s_j\in S_i} c^{S_W}_{s_j}$ を満たす $c^{S_W} = (c^{S_W}_{s_1}, c^{S_W}_{s_2}, \ldots) \in Core(S_W)$ が存在する．

（2） $S' \subseteq S$ を満たす任意のスキルの集合 S，S' および $\{S\} \cap SS = \emptyset$ を満たす任意のスキルの集合の集合 SS について，$\pi_{ap}(S', SS) \leq \pi_{ap}(S, SS)$ が成立する．

（1）の条件は，あるスキルのコアの要素が存在し，その利得ベクトルが，エージェントに対する利得の分配に用いられることを示し，（2）の条件は，エージェントがスキルを隠蔽する誘因を持たないことを示す．以下に匿名操作不可能コア π_{ap} の例を示す．

例 6. 4 章の例 3 と同じ状況を考える．以下の利得関数 π_{ap} は匿名操作不可能コアに含まれる．

$\pi_{ap}(\{a\}, \{\{b, \ldots\}, \ldots\}) = 1,$
$\pi_{ap}(\{a\}, \{\{c, \ldots\}, \ldots\}) = 1,$
$\pi_{ap}(\{a, b\}, \{\{\ldots\}\}) = 1,$
$\pi_{ap}(\{a, c\}, \{\{\ldots\}\}) = 1,$
$\pi_{ap}(\{a, b, c\}, \{\{\}\}) = 1,$

その他の引数に対する利得関数の値は 0 となる．

この利得関数は以下のようにして，匿名操作不可能コアに含まれることが分かる．例 3 における特性関数より，スキルに利得が与えられるのは，スキルの組合せ $\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{a, b, c\}$ のいずれかが参加した場合のみである．したがって，これら以外のスキルの集合への特性関数の値はつねに 0 であるので，どのスキルも利得を受け取らないような配分がコアとなる．さらに，どのようなスキルも利得を受け取らないので，スキルを隠蔽する誘因は存在しない．

では，特性関数の値が 1 となる場合を順に説明していく．まず，スキル $\{a, b, c\}$ が参加する場合，スキル a に 1 の利得を与える配分が唯一のコアとなる．次に，スキル $\{a, b\}$ が参加する場合，コアとなる配分は無数に存在するが，スキル $\{b, c\}$ を持つエージェントに，スキル c を隠す誘因を持たせてはならない．したがって，スキル a に 1 の利得を与える配分がコアとなり，同時にスキルを隠す誘因を与えない．また，スキル $\{a, c\}$ が参加する場合も同様の配分となる．

以上より，第 1 引数に a が存在し，すべての引数に含まれる要素数が 2 以上であるとき，第 1 引数のスキルを持つエージェント（たち）に 1 の利得を与える利得関数 π が匿名操作不可能コアに含まれる．ただし，上記以外のスキルの組合せが引数となる場合，利得関数は 0 を与える．それゆえ，例にあげた π_{ap} は匿名操作不可能コアに含まれる．

次に匿名操作不可能コアは，前節に示した公理的条件を満たす唯一の解概念であることを示す．まず，匿名操作不可能コアが公理的条件を満たすことを示す．

定理 4. 匿名操作不可能コアに属する π_{ap} は，π の満たすべき公理的条件をすべて満足させる．

証明. π_{ap} は匿名のため，公理的条件の 1 は満たされている．また π_{ap} の定義の条件 2 により，公理的条件の 4 が満たされていることは自明である．

次に任意のスキルのプロファイル $\vec{S} = (S_1, S_2, \ldots)$ について，

$$\bigcup_i S_i = S_W,$$
$$SS_{\sim i} = \{S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots\}$$
とおく．このとき，定義 18 の条件 1 より，$c^{S_W} = (c^{S_W}_{s_1}, c^{S_W}_{s_2}, \ldots) \in Core(S_W)$ となるようなスキルの配分 c^{S_W} が存在し，$\pi_{ap}(S_i, SS_{\sim i}) = \sum_{s_j \in S_i} c^{S_W}_{s_j}$ が成立する．よって
$$\forall \vec{S}, \forall X \subseteq W, \sum_{i \in X} \pi_{ap}(S_i, SS_{\sim i})$$
$$= \sum_{i \in X} \sum_{s_j \in S_i} c^{S_W}_{s_j} = \sum_{s_j \in S_X} c^{S_W}_{s_j} \geq v(S_X)$$
が成立し，公理的条件の 3 が満たされる．

さらに
$$\sum_{i \in W} \pi_{ap}(S_i, SS_{\sim i}) = \sum_{i \in W} \sum_{s_j \in S_i} c^{S_W}_{s_j}$$
$$= \sum_{s_j \in S_W} c^{S_W}_{s_j} = v(S_W)$$
より，公理的条件 2 が満たされる．

最後に，
$$\forall \vec{S}, \forall X \subseteq W, Y = W \setminus X,$$
$$\sum_{i \in X} \pi_{ap}(S_i, SS_{\sim i}) = \sum_{i \in X} \sum_{s_j \in S_i} c^{S_W}_{s_j}$$
$$= \sum_{s_j \in S_X} c^{S_W}_{s_j}$$
$$= \pi_{ap}(S_X, SS_Y)$$
から公理的条件 5 が満たされる． □

次に，公理的条件をすべて満たす任意の利得関数は，匿名操作不可能コアの条件を満足することを示す．まず，以下の補助定理を導入する．

補助定理 1. ある利得関数 π が 5 つの公理的条件を満たすならば，任意のスキルのプロファイル $\vec{S} = (S_1, S_2, \ldots)$, $\bigcup_i S_i = S_W$ および $SS_{\sim i} = \{S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots\}$ について，$\pi(S_i, SS_{\sim i}) = \pi(S_i, \{S_W \setminus S_i\})$ が成立する．

証明. 任意のスキルのプロファイル $\vec{S} = (S_1, S_2, \ldots)$, $\bigcup_i S_i = S_W$ および $SS_{\sim i} = \{S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots\}$ について，公理的条件 2 より $v(S_W) = \pi(S_i, SS_{\sim i}) + \sum_{j \neq i} \pi(S_j, SS_{\sim j})$ が成立する．またスキルのプロファイル $\vec{S_i} = (S_i, S_{\sim i})$, $\bigcup_{S_j \in SS_{\sim i}} S_j = S_{\sim i}$ について，$v(S_W) = \pi(S_i, \{S_W \setminus S_i\}) + \pi(S_W \setminus S_i, \{S_i\})$ が成立する．

以上より $\pi(S_i, SS_{\sim i}) + \sum_{j \neq i} \pi(S_j, SS_{\sim j}) = \pi(S_i, \{S_W \setminus S_i\}) + \pi(S_W \setminus S_i, \{S_i\})$ が成立する．上式と公理的条件 5 より，$\sum_{j \neq i} \pi(S_j, SS_{\sim j}) = \pi(S_W \setminus S_i, \{S_i\})$ が成立するので，$\pi(S_i, SS_{\sim i}) = \pi(S_i, \{S_W \setminus S_i\})$ が成立する． □

この補助定理は，エージェントの i の利得は，エージェント i の所持するスキル，および他のエージェントの所持するスキルの和集合によってのみ決定されることを示している．

次に，この補助定理を利用し，公理的条件を満たす利得関数は，必ず匿名操作不可能コアに属するということを示す．

定理 5. ある利得関数 π が公理的条件をすべて満たすならば，π は匿名操作不可能コアに属する．

証明. π は公理的条件の 4 を満足するため，π が定義 18 の中の条件 2 を満たすことは明らかである．以下，π が定義 18 の中の条件 1 を満たすことを示す．

スキルの集合 $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ に対して，$SS = \{\{s\} \mid s \in S\}$ とする．すなわち各エージェントは S に含まれるスキルをそれぞれ 1 つずつ持っている状況を考える．この場合，π が公理的条件の 2，3 を満足することから，以下の条件が成立する．
$$\forall R \subset S, \sum_{s \in R} \pi(\{s\}, SS \setminus \{s\}) \geq v(R),$$
$$\sum_{s \in S} \pi(\{s\}, SS \setminus \{s\}) = v(S).$$
この条件はスキルのコアの条件と一致している．よって，$c^S_{s_j} = \pi$ とおくと，$c^S \in Core$ となるさらに補助定理 1 より，$\pi(\{s_j\}, \{S \setminus \{s_j\}\}) = c^S_{s_j}$ が成立する．

補助定理 1 および公理的条件の 5 より任意のスキルのプロファイル $\vec{S} = (S_1, S_2, \ldots,)$, $\bigcup_i S_i = S_W$, $SS_{\sim i} = \{S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots\}$ について
$$\pi(S_i, SS_{\sim i}) = \pi(S_i, \{S_W \setminus S_i\})$$
$$= \sum_{s_j \in S_i} \pi(\{s_j\}, \{S_W \setminus \{s_j\}\})$$
$$= \sum_{s_j \in S_i} c^{S_W}_{s_j}$$
が成立する．これにより π は定義 18 の中の条件 1 を満たすことが得られる．

したがって，公理的条件をすべて満足する利得関数 π は，匿名操作不可能コアに属することが示された． □

定理 4，5 より，匿名操作不可能コアは，5 つの公理的条件をすべて満たす唯一の解概念となることが示された．さらに，$S \subseteq T$ を満たす S の中で，$Core(S)$ が空であるものが存在すれば，匿名操作不可能コアは空となる．しかし，その逆の命題が真とは限らないことを次の定理で示す．

定理 6. 以下の条件を満たすスキルの全体集合 T と

スキルの特性関数 v の組は存在する．

- $Core(S)$ が空となるスキルの集合 $S \subseteq T$ が存在しない．
- 参加しうるスキルの全体集合を T としたとき，匿名操作不可能コアが存在しない．

証明． 参加しうるスキルが a，b，c，d の 4 つであるゲームを考える．このときスキルの特性関数は以下のように定義する．

$$v(\{a\}) = v(\{b\}) = v(\{c\}) = v(\{d\}) = 0,$$
$$v(\{a,c\}) = v(\{a,d\}) = v(\{b,c\}) = 0,$$
$$v(\{a,b\}) = v(\{b,c\}) = v(\{c,d\}) = 1,$$
$$v(\{a,b,c\}) = v(\{a,b,d\}) = v(\{b,c,d\}) = 1,$$
$$v(\{a,c,d\}) = v(\{a,b,c,d\}) = 2.$$

この協力ゲームは優加法的なゲームなので，参加スキルの数が 2 以下の場合，コアは確実に存在する．また参加スキルが a，b，d および a，c，d の場合，例 1 の特性関数と同じ形になっており，コアは無数に存在する．しかし参加スキルが a，b，c の場合，例 3 の特性関数と同じ形になっており，コアとなるのは b に 1 を与える配分のみである．同じように参加スキルが b，c，d の場合も，コアとなるのは c に 1 を与える配分のみである．また参加スキルが a，b，c，d の場合，a と c に 1 ずつ与える配分はコアとなっている．よって $Core(S)$ が空となるスキルの集合 $S \subseteq T$ が存在しない．

次にこのゲームに匿名操作不可能コアが存在しないことを示す．$v(\{a,c,d\}) = v(\{a,b,c,d\}) = 2$ より，参加スキルが a，b，c，d の場合 b に与えられる配分は 0 でなければならない．しかし参加スキルが a，b，c の場合，コアとなるのは b に 1 を与える配分のみである．よって定義 18 の中の条件 2 を満たすことが不可能なので，このゲームに匿名操作不可能コアは存在しない． □

このように匿名操作不可能コアが非空である条件は，コアが非空である条件より厳しくなっている．しかし凸ゲームに関しては，匿名操作不可能コアが必ず非空になることが確認されている．

定義 19（凸ゲーム）．凸ゲームとは任意の提携 S，R に対して，特性関数 v が $v(S) + v(R) \leq v(S \cup R) + v(S \cap R)$ を満たすゲームである．ただし，$v(\emptyset) = 0$ とする．

凸ゲームとは提携するスキルが増えれば増えるほど，その限界効用が増大するゲームである．たとえば，ある特定の携帯電話キャリアの利用者の数のように利用者数が増えれば増えるほど利便性が高くなるサービスなどがあげられる．

ここでは，n スキル凸ゲームの匿名操作不可能コアは非空であることを証明するため，スキルの全体集合 T の各要素に $1, 2, \ldots, k, \ldots$ の番号を与える．$S \subset T$ に含まれる任意のスキル $s_k \in S$ に対する配分 $c_{s_k}^S$ を

$$c_{s_k}^S = v(S_{prev} \cup \{s_k\}) - v(S_{prev})$$

とする．ただし，$S_{prev} = \bigcup_{s_j \in S, j<k} s_j$ を表す．また，配分 $c_{s_k}^S$ は利得関数 $\pi_{ap}(\{s_k\}, \{S \setminus \{s_k\}\})$ に対応する．続く証明では，まずスキルの集合が小さくなれば，それに対する配分も小さくなることを示す補助定理を導入したうえで，上記の配分 $c_{s_k}^S$ がコアとなることを示し，その配分が定義する利得関数に対して，スキルを隠す誘因が存在しないことを示す．

補助定理 2． 任意の凸ゲームについて，ある配分 $c_{s_k}^S$，$s_k \in S'$ に関して，$S' \subset S$ ならば，$c_{s_k}^S \geq c_{s_k}^{S'}$ が成立する．

証明． 定義より，明らかに $S'_{prev} \subseteq S_{prev}$ が成立する．さらに凸ゲームの定義より以下が成立する．

$$v(S'_{prev} \cup \{s_k\}) + v(S_{prev}) \leq v(S_{prev} \cup \{s_k\}) + v(S'_{prev})$$

これを変形すると，

$$v(S_{prev} \cup \{s_k\}) - v(S_{prev}) \geq v(S'_{prev} \cup \{s_k\}) - v(S'_{prev})$$

が得られ，左辺は $c_{s_k}^S$ に，右辺は $c_{s_k}^{S'}$ に等しいので補助定理が成立する． □

定理 7． n スキル凸ゲームの匿名操作不可能コアは非空である．

証明． 本証明ではある配分がコアとなることを示し，その配分が定義する利得関数に対して，スキルを隠す誘因が存在しないことを示す．

まず，$c_{s_k}^S$ がコアとなる条件である定義 18 の条件 (1) を満たすことを示すため，配分の合計が $v(S)$ と等しくなることを示し，ブロッキング提携，S' が存在するとして矛盾を導く．スキルの集合 $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ に対して，$\forall i < j$，$v(\{s_i\}) < v(\{s_j\})$ とすると，S に含まれる各スキルへの配分の合計は，

$$\begin{aligned} & c_{s_1}^S + c_{s_2}^S + \ldots + c_{s_k}^S \\ & \quad = (v(\{s_1\}) - v(\emptyset)) + (v(\{s_1, s_2\}) - v(\{s_1\})) \\ & \qquad + \ldots + (v(S) - v(S \setminus \{s_k\}) \\ & \quad = v(S) \end{aligned}$$

となる．

次に，ブロッキング提携 $S' \subset S$ が存在すると仮定する．ここで上記の配分に対して，S' の要素が得ている配分の和，すなわち $\sum_{s_k \in S'} c_{s_k}^S$ が $v(S')$ 以上であることを示す．補助定理 2 より $c_{s_k}^S \geq c_{s_k}^{S'}$ が成立するので，

$$\sum_{s_k \in S'} c_{s_k}^{S} \geq \sum_{s_k \in S'} c_{s_k}^{S'} = v(S')$$

が成立する．したがってブロッキング提携 S' が存在することと矛盾する．このため，配分 $c_{s_k}^{S}$ がコアとなる．

さらに，配分 $c_{s_k}^{S}$ がスキルを隠す誘因がない条件である定義 18 の (2) を満たすことを示す．補助定理 2 より，任意の $S' \subseteq S$，任意の $s_k \in S'$，および S と共通要素を持たないスキルの集合 S'' に関して，

$$c_{s_k}^{S \cup S''} \geq c_{s_k}^{S' \cup S''}$$

が成立する．よって，

$$\begin{aligned}\sum_{s_k \in S} c_{s_k}^{S \cup S''} &\geq \sum_{s_k \in S'} c_{s_k}^{S \cup S''} \\ &\geq \sum_{s_k \in S'} c_{s_k}^{S' \cup S''}\end{aligned}$$

が成立する．以上より n スキル凸ゲームの匿名操作不可能コアは非空であることが証明された． □

7. 匿名操作不可能最小コア

この章では匿名操作不可能最小コアを提案する．匿名操作不可能コアには，匿名操作不可能コアとなる配分が空になる可能性があるという問題がある．匿名操作不可能最小コアは，匿名操作不可能コアの条件を緩め，必ず匿名操作不可能最小コアとなる配分が非空になるようにしたものである．

最初にスキルベースの ϵ-コアについて定義する．

定義 20（スキルベースの ϵ-コア）．スキルの集合 $S = (s_1, s_2, \ldots)$ に対するスキルの ϵ-コア（$\epsilon\text{-}Core(S)$）とは，以下の条件を満たすそれぞれのスキルに対する利得のベクトル $c^S = (c_{s_1}^S, c_{s_2}^S, \ldots)$ の集合である．

$\forall R \subset S$,

$$\sum_{s_j \in R} c_{s_j}^{S} \geq v(R) - \epsilon \text{ and } \sum_{s_j \in S} c_{s_j}^{S} = v(S).$$

次にスキルベースの ϵ-コアを用いて，匿名操作不可能 ϵ-コアを定義する．

定義 21（匿名操作不可能 ϵ-コア）．以下の条件を満たす利得関数 π_{ap} の集合を匿名操作不可能 ϵ-コアという．

(1) $\bigcup_i S_i = S_W$ を満たす任意のスキルのプロファイル $\vec{S} = (S_1, S_2, \ldots)$，$SS_{\sim i} = \{S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots\}$ について，以下の条件を満たす $c^{S_W} = (c_{s_1}^{S_W}, c_{s_2}^{S_W}, \ldots) \in \epsilon\text{-}Core(S_W)$ が存在する：$\pi_{ap}(S_i, SS_{\sim i}) = \sum_{s_j \in S_i} c_{s_j}^{S_W}$

(2) $S' \subseteq S$ を満たす任意のスキルの集合 S，S' および任意のスキルの集合の集合 SS について，$\pi_{ap}(S', SS) \leq \pi_{ap}(S, SS)$ が成立する．

匿名操作不可能 ϵ-コアは，前節で示した π の満たすべき公理系な条件うち 3 以外を満たす．つまり匿名操作不可能 ϵ-コアも架空名義の利用や共謀，スキルの隠蔽を行う誘因がないことになる．また任意の利得関数が匿名操作不可能 ϵ-コアに含まれる場合，任意の $\epsilon' > \epsilon$ について，その利得関数は匿名操作不可能 ϵ'-コアに含まれる．よって非空な匿名操作不可能 ϵ-コアすべてに含まれる利得関数が必ず存在する．次に匿名操作不可能最小コアの定義を行う．

定義 22（匿名操作不可能最小コア）．非空な匿名操作不可能 ϵ-コアの共通部分を匿名操作不可能最小コアという．

定理 8. 匿名操作不可能最小コアは，ゲームに参加しうるスキルの集合 T およびスキルの特性関数 v にかかわらず非空である．

証明. 匿名操作不可能最小コアが空である条件とはすべての匿名操作不可能 ϵ-コアが空であるということである．ϵ を十分大きい値にとったとき，以下のような配分が匿名操作不可能 ϵ-コアとなる．

- 参加しうるスキルすべてに，相異なるナンバをつける．
- 任意のスキルの集合 $S \subseteq T$ がゲームに参加するとき，S の中で最も若いナンバを持つスキルに $v(S)$，他のスキルに 0 の利得を与える．

よって匿名操作不可能最小コアは非空である． □

8. おわりに

本論文では，コア，最小コア，仁などの，伝統的な協力ゲームの解概念が，匿名性の強い開環境で可能な操作（架空名義，共謀，スキルの隠蔽）に対して脆弱であることを示した．架空名義および共謀は，解概念をスキルの特性関数を用いて再定義することにより回避することが可能であるが，スキルの隠蔽の問題は解決されない．本論文では，このような操作に対して頑健性が保証される解概念が満たすべき公理的条件を示し，これらの公理的条件を満足する唯一の解概念として匿名操作不可能コアを提案した．さらに匿名操作不可能コアをもとに，どのような状況でも配分が非空となるような解概念匿名操作不可能最小コアも提案した．

コアは提携の安定性を主眼とした解概念であり，本論文で提案した匿名操作不可能コアは，コアをベース

に定義されている．今後の課題として，他の解概念，たとえば公平性を主眼としたシャープレイ値をベースに，匿名の開環境で利用できる新しい解概念を提案することや，匿名操作不可能コアを効率的に算出する方法を求めることなどが考えられる．

参 考 文 献

1) 鈴木光男：ゲーム理論入門，共立全書 (1981).
2) 岡田 章：ゲーム理論，有斐閣 (1996).
3) Conitzer, V. and Sandholm, T.: Complexity of determining nonemptiness of the core, *Proc. 18th International Joint Conference on Artificial Intelligence* (*IJCAI*), pp.613–618 (2003).
4) Conitzer, V. and Sandholm, T.: Computing Shapley values, manipulating value division schemes, and checking core membership in multi-issue domains, *Proc.National Conference on Artificial Intelligence* (*AAAI*), pp.219–225 (2004).
5) Gillies, D.: Some theorems on n-person games, Ph.D. Dissertation, Princeton University, Department of Mathematics (1953).
6) Ketchpel, S.: Forming coalitions in the face of uncertain rewards, *Proc. National Conference on Artificial Intelligence* (*AAAI*), pp.414–419 (1994).
7) Schmeidler, D.: The nucleolus of a characteristic function game, *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal of Applied Mathematics*, Vol.17, pp.1163–1170 (1969).
8) Shapley, L.S.: A value for n-person games, *Contributions to the Theory of Games, volume 2 of Annals of Mathematics Studies*, Kuhn, H.W. and Tucker, A.W. (Eds.), Princeton University Press, Vol.28, pp.307–317 (1953).
9) Shehory, O. and Kraus, S.: Methods for task allocation via agent coalition formation, *Artificial Intelligence*, Vol.101, No.1–2, pp.165–200 (1998).
10) von Neumann, J. and Morgenstein, O.: *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press (1947).
11) Yagodnick, R. and Rosenschein, J.S.: Lies in multiagent subadditive task oriented domains, *The International Workshop on Multi-Agent Systems* (1998).
12) Yokoo, M., Sakurai, Y. and Matsubara, S.: The effect of false-name bids in combinatorial auctions: New fraud in Internet auctions, *Games and Economic Behavior*, Vol.46, No.1, pp.174–188 (2004).
13) Zlotkin, G. and Rosenschein, J.S.: Coalition, cryptography and stability: Mechanisms for coalition formation in task oriented domains, *Proc.National Conference on Artificial Intelligence* (*AAAI*), pp.432–437 (1994).

(平成 17 年 10 月 3 日受付)
(平成 18 年 3 月 2 日採録)

横尾 真（正会員）

1984 年東京大学工学部電子工学科卒業．1986 年同大学院修士課程修了．同年日本電信電話（株）入社．2004 年より九州大学大学院システム情報科学研究院教授．エージェントの合意形成メカニズム，制約充足/分散制約充足等に興味を持つ．博士（工学）．1992 年，2002 年人工知能学会論文賞，1995 年情報処理学会坂井記念特別賞，2004 年 Association for Computing Machinery（ACM）Special Interest Group on Artificial Intelligence（SIGART）Autonomous Agent Research Award，2006 年日本学士院学術奨励賞受賞．日本ソフトウェア科学会，電子情報通信学会，AAAI 各会員．

ビンセント コニッツァー

2001 年 Harvard University 応用数学科卒業．2003 年 Carnegie Mellon University コンピュータサイエンス学科修士課程修了．同年より同大学大学院博士課程に進学．ゲーム理論，メカニズムデザイン，オークション等のエージェント間の交渉メカニズムに興味を持つ．

トゥオマス サンドホルム

1991 年 Helsinki University of Technology 卒業．1994 年 University of Massachusetts 修士課程修了．1996 年同大学博士課程修了．2000 年まで Washington University 準教授．同年より Carnegie Mellon University 準教授．博士（Computer Science）．2001 年 Inaugural ACM Autonomous Agents Research Award, 2003 年 Computers and Thought Award by the International Joint Conference on Artificial Intelligence 受賞．

大田　直樹

2005年九州大学工学部電機情報工学科卒業．同年同大学院修士課程に進学．協力ゲーム理論，オークション，分散制約充足に関する研究に興味を持つ．

岩崎　　敦

2002年神戸大学大学院自然科学研究科博士後期課程修了．同年より2004年までNTTコミュニケーション科学基礎研究所に勤務．2004年より九州大学大学院システム情報科学研究院助手．ゲーム理論，学習，オークション，実験経済学に関する研究に興味を持つ．博士（学術）．2004年第3回合同エージェントワークショップ（JAWS2004）論文賞受賞．Economic Science Association会員．