Vol.2014-AL-149 No.1
2014/9/12

$\mathbb{Z}_3$ ラベル付きグラフにおける指定ラベル s–t パスの発見

河瀬 康志[1,a)]　小林 佑輔[2,b)]　山口 勇太郎[2,c)]

概要：パスや閉路の長さの偶奇に関する問題は，グラフ理論や理論計算機科学の分野において，古典的でよく研究されてきた話題である．この種の基本的な問題として，たとえば，無向グラフにおいて指定された 2 点 s, t 間を結ぶ奇数長 (または偶数長) のパスを見つける問題が挙げられる．この問題は多項式時間で容易に解けるが，一方で，有向グラフにおける同じ問題は NP 困難であることも知られている．本稿では，この種の問題の一般化として，群ラベル付きグラフにおいて指定されたラベルの s–t パスを見つける問題を考える．ここで，群ラベル付きグラフとは，各枝が群の要素によってラベル付けされている有向グラフを指す．無向グラフにおいて奇数長 (または偶数長) のパスを見つける問題は，$\mathbb{Z}_2$ ラベル付きグラフにおいてラベルが 1 (または 0) のパスを見つける問題として定式化できる．
近年，群ラベル付きグラフにおいて，ある条件を満たすラベル非零のパスや閉路を見つけるいくつかの問題に対し，効率的なアルゴリズムが提案されている．一方で，指定したラベルのパスを見つける問題の難しさは，ラベルに用いられる群に強く依存する．たとえば，群が $\mathbb{Z}$ の場合，指定したラベルの s–t パスの存在判定問題は NP 完全であるが，群が $\mathbb{Z}_2$ の場合は極めて簡単に解ける．したがって，位数を固定した有限群の場合の計算複雑性は興味深い話題であり，$\mathbb{Z}_3$ が最初の非自明な場合である．また，群が $\mathbb{Z}_3$ の場合には，指定したラベルの s–t パスを見つける問題は無向グラフにおける 2 点素パス問題の一般化になっており，この問題が多項式時間で解けるという事実も本研究の動機の一端を担っている．
本稿では，2 点 s, t を指定した $\mathbb{Z}_3$ ラベル付きグラフが，指定したラベルの s–t パスを持つ必要十分条件を与える．また，その特徴付けに基づき，s–t パスの取り得るラベルを計算し，各ラベルを持つ s–t パスを求める多項式時間アルゴリズムを提案する．

1. 背景

パスや閉路の長さの偶奇に関する話題は，古典的でよく研究されている．最も簡単な例として，無向グラフの二部性の判定は，奇数長の閉路の存在性判定と等価であり，これらが多項式時間でできることはよく知られている．また，無向グラフ中の指定された 2 点を結ぶパスであって，奇数長 (または偶数長) のものが存在するかどうかを判定する問題も同様に多項式時間可解である．

この種の問題の 1 つの一般化として，本稿では，群ラベル付きグラフにおいて指定された 2 点 s, t を結ぶパスについて考える．群ラベル付きグラフとは，各枝が群の要素によってラベル付けされた有向グラフを指し，パスのラベルは通った枝のラベルを順に演算したものとして定義される．ただし，有向枝を逆向きに通ることも許容され，その場合には枝のラベルの逆元がパスのラベルに寄与する (正確な定義は次節参照)．群ラベル付きグラフにおけるパスや閉路に関する研究は，近年盛んに行われている [1,2,5,8,10]．

群ラベル付きグラフにおいて，指定したラベルの s–t パスが存在するかどうかを判定する問題は，群によって難しさが大きく異なる．たとえば，群が $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の場合には，群ラベル付きグラフが「平衡的である (balanced)」かどうかを判定する問題と等価 (補題 1) であり，容易に解ける．一方，群が $\mathbb{Z}$ の場合にはハミルトンパス問題を含み，NP 完全である．文献 [4] において，「有限生成アーベル群の場合には多項式時間可解である」と主張されているが，その本質はグラフマイナー理論に深く依存しており非常に難解である．本稿では，有限群であり最初の非自明なケースとして，$\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の場合に関する陽な特徴付けと解法を与える．

なお，$\mathbb{Z}_3$ の場合は以下の 2 点素パス問題を含んでいる：無向グラフ G 中の異なる 4 点 s_1, s_2, t_1, t_2 が指定されたとき，点を共有しないような s_1–t_1 パスと s_2–t_2 パスの組が取れるかどうかを判定する．この問題は，G 中の各無向枝をラベルが 0 の有向枝 (向きは任意) で置き換え，ラベルが 1 の枝 t_1s_2 を追加した $\mathbb{Z}_3$ ラベル付きグラフにおいて，ラベ

1　東京工業大学大学院 社会理工学研究科 社会工学専攻
2　東京大学大学院 情報理工学系研究科 数理情報学専攻
a)　kawase.y.ab@m.titech.ac.jp
b)　kobayashi@mist.i.u-tokyo.ac.jp
c)　yutaro_yamaguchi@mist.i.u-tokyo.ac.jp

ルが 1 の s_1–t_2 パスが取れるかどうかを判定する問題と等価である．2 点素パス問題に関しては多項式時間アルゴリズムや特徴付けが知られており [6,7,9]，$\mathbb{Z}_3$ ラベル付きグラフにおいて指定ラベル s–t パスを見つける問題に対してもそのような良い性質が拡張できることを明らかにした．

2. 準備

2.1 群ラベル付きグラフ

$\mathbb{Z}_3$ **ラベル付きグラフ**とは，**ラベル関数**と呼ばれる写像 $\psi_G : E \to \mathbb{Z}_3$ が付随した有向グラフ $G = (V, E)$ のことを指す．G 中の**ウォーク**とは，列 $W = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_l, v_l)$ であって，「$v_i \in V$ $(i = 0, \ldots, l)$，かつ，$e_i = v_{i-1}v_i \in E$ または $e_i = v_iv_{i-1} \in E$ $(i = 1, \ldots, l)$」が成り立つものを指す．始点 v_0 と終点 v_l のみが一致するようなウォークを**閉路**と呼び，すべての点が異なるようなウォークを**パス** (特に v_0–v_l **パス**) と呼ぶ．ウォーク W の**ラベル**を，$\psi_G(W) := \sum_{i=1}^{l} \psi_G(e_i, v_i)$ により定義する．ただしここで，$e_i = v_{i-1}v_i$ のとき $\psi_G(e_i, v_i) := \psi_G(e_i)$，$e_i = v_iv_{i-1}$ のとき $\psi_G(e_i, v_i) := -\psi_G(e_i)$ とする (この性質から，ラベルが α の枝 uv とラベルが $-\alpha$ の枝 vu を同一視する)．ラベルが 0 のウォークを**平衡的である** (*balanced*) といい，0 でないウォークを**非平衡的である** (*unbalanced*) という．また，非平衡的な閉路を含む $\mathbb{Z}_3$ ラベル付きグラフを**非平衡的である** (*unbalanced*) といい，すべての閉路が平衡的であるような $\mathbb{Z}_3$ ラベル付きグラフを**平衡的である** (*balanced*) という．

$\mathbb{Z}_3$ ラベル付きグラフ G の異なる 2 点 s, t を指定したとき，s–t パスのラベルとしてあり得るラベルの集合を $l(G; s, t)$ で表す．また，$\mathcal{D}$ を，次の条件を満たす三つ組 (G, s, t) 全体の集合として定義する：s, t は $\mathbb{Z}_3$ ラベル付きグラフ G の異なる 2 点であって，任意の G の点 v に対し，v を含む s–t パスが G 中に存在する．このとき，以下の性質は容易に確認できる．

命題 1. 任意の $(G, s, t) \in \mathcal{D}$ に対し，$|l(G; s, t)| = 1$ であることと G が平衡的であることは同値である．

平面に埋め込まれたグラフに対し，非有界な面を**外面**，それ以外の面を**内面**と呼ぶ．

点集合 $X \subseteq V$ に対し，その**近傍**を $N_G(X) := \{y \in V \setminus X \mid xy \in E \text{ or } yx \in E\}$ により定める．本稿では，誤解の恐れがない場合，単一要素からなる集合とそれを構成する要素を区別せずに表記する．

2.2 群ラベル付きグラフに対する操作

本節では，後の特徴付けのために必要な操作を定義する．以下では，特に断らない限り，$G = (V, E)$ を $\mathbb{Z}_3$ ラベル付きグラフとし，$s, t \in V$ を指定された異なる 2 点とする．以下の操作は (s または t におけるシフトを除き) $l(G; s, t)$ に影響を与えない．

定義 2. 点 $v \in V$ とラベル $\alpha \in \mathbb{Z}_3$ に対し，ψ_G **を** v **周りで** α **だけシフトする**とは，v に入る各枝 $e \in E$ に対して $\psi_G(e)$ を α だけ増やし，v から出る各枝 $e \in E$ に対して $\psi_G(e)$ を α だけ減らす操作を指す．

定義 3. 点集合 $X \subseteq V$ と 2 点 $x \in X$, $y \in V \setminus X$ が以下を満たすとする：
- X に誘導される部分グラフ $G[X]$ が平衡的であり，かつ，$G - y$ の 2 連結成分である．
- $G - \{x, y\}$ において，X の任意の点は s, t を含まない連結成分に属する．

このとき，X の **2-縮約**を以下の操作と定義する：
- ψ_G を各点 $v \in X - x$ 周りで $l(G[X]; v, x)$ だけシフトする (その結果 $\psi_G(e) = 0$ $(\forall e \in E(X))$ となる)．
- X に属する点を 1 点 (この点を再び x と呼ぶ) に併合する．
- 同じラベルを持つ並行枝ができた場合，各 1 本を残し他は除去する．

定義 4. 点集合 $X \subseteq V \setminus \{s, t\}$ が以下を満たすとする：
- $|N_G(X)| = 3$.
- $G_X := G[X \cup N_G(X)] - E(N_G(X))$ が連結であり，かつ，平衡的である．

このとき，X の **3-縮約**を以下の操作と定義する：
- X に属する点をすべて除去する．
- 異なる 2 点 $x, y \in N_G(X)$ の各組に対し，x から y への有向枝であってラベルが $l(G_X; x, y)$ であるものを追加する．ただし，同じラベルの枝が既にある場合は追加しない．

定義 5. 三つ組 $(H, x', y') \in \mathcal{D}$ と，異なるラベルを持つ $x \in V$ から $y \in V$ への並行枝 $e_1, e_2 \in E$ が，$l(H; x', y') = \{\psi_G(e_1), \psi_G(e_2)\}$ を満たすとする．このとき，e_1, e_2 を (H, x', y') で**置換する**とは，G から e_1, e_2 を除去し，x' を x と，y' を y と同一視することにより G と H を合わせたグラフを作る操作をいう．

3. 主結果

3.1 特徴付け

命題 1 より，$|l(G; s, t)| = 1$ であるための必要十分条件が得られている．本研究の主結果である定理 9 では，$l(G; s, t)$ が $\mathbb{Z}_3$ の異なる 2 要素からなる場合を特徴付けており，これにより三つ組 $(G, s, t) \in \mathcal{D}$ の $l(G; s, t)$ に関する完全な分類が可能となる．

定義 6. 異なる $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_3$ に対し，$\mathcal{D}^0_{\alpha,\beta}$ を以下の性質を満たす三つ組 $(G, s, t) \in \mathcal{D}$ の集合とする：
- 2-縮約または 3-縮約できる点集合を G が含まない．
- G が次の性質を満たすように平面埋め込み可能である．
  - s, t がともに外面の境界上にある．
  - 外面の境界をなす 2 本の s–t パスのラベルがそれぞれ α, β である．

– 内面であって，その境界が非平衡的な閉路となるものがただ 1 つ存在する．

定義 7. 異なる $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_3$ に対し，$\mathcal{D}^1_{\alpha,\beta}$ を以下の性質を満たす三つ組 $(G, s, t) \in \mathcal{D}$ の集合であって極小なものとする：
- $\mathcal{D}^0_{\alpha,\beta} \subseteq \mathcal{D}^1_{\alpha,\beta}$.
- $(G, s, t) \in \mathcal{D}^1_{\alpha,\beta}$ に対し，異なるラベル $\alpha', \beta' \in \mathbb{Z}_3$ を持つ並行枝 $e_1, e_2 \in E(G)$ を $(H, x', y') \in \mathcal{D}^0_{\alpha',\beta'}$ で置換して得られるグラフを G' をしたとき，$(G', s, t) \in \mathcal{D}^1_{\alpha,\beta}$ である．

定義 8. 異なる $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_3$ に対し，$\mathcal{D}_{\alpha,\beta}$ を以下の性質を満たす三つ組 $(G, s, t) \in \mathcal{D}$ の集合とする：G から始めて 2-縮約と 3-縮約を有限回適用して得られるグラフ G' であって，$(G', s, t) \in \mathcal{D}^1_{\alpha,\beta}$ であるものが存在する．

定理 9. α, β が $\mathbb{Z}_3$ の異なる要素であるとする．このとき，任意の $(G, s, t) \in \mathcal{D}$ に対し，$l(G; s, t) = \{\alpha, \beta\}$ であることと $(G, s, t) \in \mathcal{D}_{\alpha,\beta}$ であることは同値である．

3.2 アルゴリズム

前節で述べた $(G, s, t) \in \mathcal{D}$ の分類条件がすべて多項式時間で判定可能であることに基づき，与えられた $\mathbb{Z}_3$ ラベル付きグラフ G と G 中の異なる 2 点 s, t に対し，$l(G; s, t)$ を計算する多項式時間アルゴリズムが構成できる．また，任意の $\alpha \in l(G; s, t)$ に対し，ラベルが α である s–t パスを発見する多項式時間アルゴリズムを提案する．

定理 10. 任意の $\mathbb{Z}_3$ ラベル付きグラフ G と G 中の任意の異なる 2 点 s, t に対し，$l(G; s, t)$ は多項式時間で計算可能である．また，任意の $\alpha \in l(G; s, t)$ に対し，ラベルが α である s–t パスは多項式時間で発見可能である．

アルゴリズムの概略を述べる．まず，$l(G; s, t)$ の計算は，以下の事実に基づく．
- $(G, s, t) \in \mathcal{D}$ の判定および不要な点の集合 $\{v \in V(G) \mid v$ を通る s–t パスが G 中に存在しない．$\}$ の計算は，$G + st$ の 2 連結成分を計算することで多項式時間で可能である．以下 $(G, s, t) \in \mathcal{D}$ を仮定する．
- $l(G, s, t) = 1$ の判定は，G が平衡的であるかどうかの判定に等しく (命題 1)，これは多項式時間で可能である．
- $l(G, s, t) > 1$ の場合，命題 1 より G 中に非平衡的な閉路が存在し，これを通る s–t パスで少なくとも 2 種類のラベル α, β が作られる．
- $l(G; s, t) \supseteq \{\alpha, \beta\}$ のとき，$l(G; s, t) = \{\alpha, \beta\}$ の判定は，以下のように多項式時間で可能である．
  – $t \notin N_G(s)$ であれば，G に s から t へのラベル α の枝を追加する．
  – G に 2 点カット $\{x, y\}$ が存在すれば ($G - \{x, y\}$ が非連結であれば)，x, y を含み，$\{x, y\}$ によって s, t から分離される部分グラフ H における $l(H; x, y)$ を計算し，H をこれに含まれるラベルの並行枝で置き換える．
  – G に 3-縮約可能な点集合が存在すれば，その 3-縮約を行う．
  – G は 3 連結 (ゆえに 2-縮約不可能) かつ 3-縮約不可能であるので，$l(G; s, t) = \{\alpha, \beta\}$ と $(G, s, t) \in \mathcal{D}^0_{\alpha,\beta}$ は同値．後者の判定は以下の通り多項式時間で可能である：1) 平面性を判定する．2) 平面埋め込み可能であれば，3 連結性より埋め込まれた G の面の集合は並行枝の影響を除き一意に定まる [3, Chapter 4] ので，s と t が同じ面の境界上にあるかどうかを判定し，そのような面があるならばその面が外面になるように埋め込む．3) 内面であってその境界が非平衡的な閉路であるものが唯一かどうかを判定する．

次に，すべての $\alpha \in l(G; s, t)$ に対し，ラベルが α である s–t パスを計算するアルゴリズムの概略を述べる．ここで，$|l(G; s, t)| \leq 2$ の場合は，$l(G; s, t)$ の計算の途中で既にそのようなパスが求まっていることに注意すると，$l(G; s, t) = \mathbb{Z}_3$ の場合に限ってよいことがわかる．このとき，以下のように計算可能である．

(1) 各 $s' \in N_G(s) - t$ に対して，$l(G - s; s', t)$ を計算する．
(2) すべての $s' \in N_G(s) - t$ に対して $|l(G - s; s', t)| \leq 2$ であれば，そのラベルを達成する s'–t パスがすべて得られている．それらのパスを枝 $ss' \in E$ を用いて延長した s–t パスと，枝 $st \in E$ によって 3 つのラベルが達成されるので，それらから 3 つの異なるラベルを持つ s–t パスを選ぶ．
(3) ある $s' \in N_G(s) - t$ に対して $l(G - s; s', t) = \mathbb{Z}_3$ であれば，$(G - s; s', t)$ に対して再帰的に解く．

謝辞

本研究は，JST ERATO 河原林巨大グラフプロジェクト，および，JSPS 科研費 No. 24106002, 24700004 の助成を受けたものである．また，第三著者は JSPS 特別研究員 (DC) である．

参考文献

[1] M. Chudnovsky, J. Geelen, B. Gerards, L. Goddyn, M. Lohman, P. D. Seymour: Packing non-zero A-paths in group-labelled graphs, *Combinatorica*, **26** (2006), 521–532.
[2] M. Chudnovsky, W. Cunningham, J. Geelen: An algorithm for packing non-zero A-paths in group-labelled graphs, *Combinatorica*, **28** (2008), 145–161.
[3] R. Diestel: *Graph Theory 4th ed.*, Springer–Verlag, Heidelberg, 2010.
[4] T. Huynh: *The Linkage Problem for Group-Labelled Graphs*, Ph.D. Thesis, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Ontario, 2009.
[5] K. Kawarabayashi, P. Wollan: Non-zero disjoint cycles in highly connected group labelled graphs, *Journal of*

Combinatorial Theory, Ser. B, **96** (2006), 296–301.
[6] Y. Shiloach: A polynomial solution to the undirected two paths problem, *Journal of the ACM*, **27** (1980), 445–456.
[7] P. D. Seymour: Disjoint paths in graphs, *Discrete Mathematics*, **29** (1980), 293–309.
[8] S. Tanigawa, Y. Yamaguchi: Packing non-zero A-paths via matroid matching, *Mathematical Engineering Technical Reports*, METR 2013-08, University of Tokyo, 2013.
[9] C. Thomassen: 2-linked graphs, *European Journal of Combinatorics*, **1** (1980), 371–378.
[10] Y. Yamaguchi: Packing A-paths in group-labelled graphs via linear matroid parity, *Proceedings of the 25th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2014)*, 562–569, 2014.