DAS2014
2014/8/29

領域分割を用いたCHORD-LAST法に基づく ナンバーリンク解法

田中 雄一郎 †, 高橋 篤司 †

† 東京工業大学 大学院理工学研究科 通信情報工学専攻

E-mail: {tanaka, atsushi}@eda.ce.titech.ac.jp

本稿では，平面基板上の集積回路設計における配線問題と親和性の高いペンシルパズルである，ナンバーリンクの特性について考察し，その解法について述べる．ナンバーリンクは，縦横斜めの周囲 8 マスで隣り合う数字を一塊にして島とすることで，空洞内島配線問題として解くことが可能である．外部配線問題において，CHORD-LAST 法は全ネットが配線可能である時，平面性を失わないネットの配線順序を与える．提案アルゴリズムでは，この順序を利用してナンバーリンクの解を生成する．また，対となる数字が共に外側のマスに位置する時，その数字を結ぶ配線で配線領域を分割することが可能であり，他の数字の組は共に片側の領域に位置する．領域の分割を用いた枝刈りを組み合わせることにより，計算量を削減したアルゴリズムを提案する．

Numberlink solver based on CHORD-LAST method with area decomposition

Yuichiro TANAKA† and Atsushi TAKAHASHI†

† Department of Communications and Computer Engineering, Tokyo Institute of Technology

In this paper, we propose a method that solves Numberlink which is a pencil puzzle with high affinity to a routing problem in integrated circuit design of planar substrate. Numberlink is solved as an island-in-cavity-routing problem by regarding adjacent numbers as an island. In this island routing problem, CHORD-LAST method gives a feasible routing order of nets when the planer routing is possible. This order is utilized in our proposed algorithm. If both pins of a net exist on the outer boundary, the wire which connects these pins divides routing area and other net belongs to one of them. Our proposed algorithm reduces the computation time by combining pruning obtained by routing area division.

1 はじめに

1.1 ナンバーリンクとは

ナンバーリンクとは盤面にある同じ数字同士を線で繋ぐペンシルパズルであり，株式会社ニコリの登録商標である．図 1 に問題例とその解答例を示す．ルールは全部で 4 つ [1] 存在し，これらに反しないように線を引く．

1. 白マスに線を引いて，同じ数字同士を繋ぐ．
2. 線は，マスの中央を通るようにタテヨコに引く．線を交差させたり，枝分かれさせたりしてはいけない．
3. 数字の入っているマスを通過するように線を引いてはいけない．
4. 1 マスに 2 本以上の線を引いてはいけない．

このパズルは平面基板上の集積回路設計における配線問題と親和性が高く，NP 完全であることが証明されている [2]．

1.2 構成

本稿の構成は以下の通りである．第 1 節で導入を行い，第 2 節で本稿で用いる表記方式，用語について定義を行う．第 3 節ではナンバーリンクの特徴から先行研究の改善点を述べ，配線アルゴリズムを提案する．第 4 節ではまとめと今後の課題について述べる．

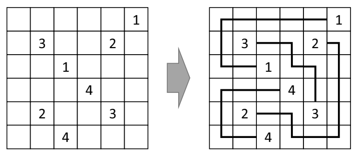

図 1: ナンバーリンクの問題例と解答例

2 本稿における表記方式，用語

2.1 マスの位置表記

各マスの位置を示すに当たり，本稿では DA シンポジウム 2014 アルゴリズムデザインコンテストの盤面表記を用いる [3]．これは一番左上のマスを原点とし，右方向を横座標の正の向き，下方向を縦座標の正の向きとする直交座標系である．例えば，図 1 において一番右上に位

図 2: 左：作為解　右：短絡解

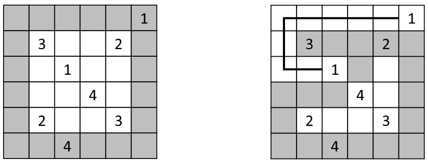

図 3: 左：更新前　右：更新後

置する 1 のマスの座標は (5,0) である．

2.2　短絡解

ナンバーリンクにおいて，解が唯一つであり全てのマスを使用する問題が良問とされる．問題の性質上，作者が全ての配線パターンを把握することが難しく，パズル誌に掲載される問題においても別解が存在することがある．ルール上全てのマスを使用する必要はないため，図 2 に示すような配線に使用しないマスが存在する解も認められる．別解が発覚した過去の経緯から関西解と呼ばれることもあるが，このような解を本稿では短絡解と呼ぶ．

2.3　外周

図 3 に示すように配線の各段階において，配線領域外に隣接するマスの集合を外周と呼ぶ．ある配線の前後で外周上のマスに線が引かれた場合，そのマスは配線後において配線領域外となる．図 3 では 1 の配線の前後により，外周 (灰色のマス) がどのように変化するかを示す．

3　提案手法

3.1　先行研究

ナンバーリンクのソルバーとして，深さ優先探索，充足可能性問題，遺伝的アルゴリズム，ZDD 法，整数計画法を用いた先行研究が存在する．

文献 [4] では冗長となったり，ルール違反となったりする配線を枝刈りしながら深さ優先探索を行っている．公開されているものは横 15 マス縦 15 マスまでの問題に対応しており，短絡解が存在する問題も解ける．事前に短絡解が無いことが分かっている場合は，条件を追加することによって枝刈りをより多く行える．

文献 [5] では SAT 型ソルバーである Sugar を用いて解を求めている．この Sugar は，与えられた制約充足問題や組合せ最適化問題を命題論理の充足可能性問題に符号化し，高速の SAT ソルバーを用いて解を求める制約ソルバーである．マスを頂点とするグラフに見立て，各マスの次数や通過する線の種類を用いてナンバーリンクを制約充足問題に置き換えている．標準では解を 1 つ出力すると終了する設定であるため，短絡解を含めた複数の解を出力するためには追記する必要がある．

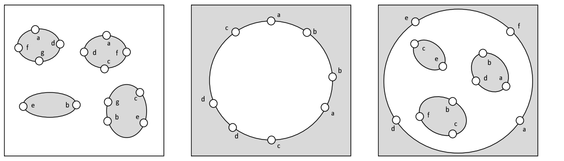

図 4: 左：島配線　中：空洞内配線
右：空洞内島配線

文献 [6] では縦 N マス横 M マスの盤面を N*M の要素を持つ一次元配列の遺伝子として扱い，遺伝的アルゴリズムによって解を求めている．盤上で縦横に隣り合うマスの種類に応じた評価値を返す評価関数を用いている．実験では 4*4 のナンバーリンクで解を得られたが，6*6 のナンバーリンクでは局所解に陥っている．論文内で提案される評価関数は局所解に陥りやすく，盤面が大きくなると短時間で解が求められない可能性がある．短絡解が存在する問題に対する考察はない．

文献 [7] ではフロンティア法を用いてナンバーリンクを解いている．近年，Knuth[8] はグラフ上の s-t パスを ZDD(Zero-suppressed binary decision diagram) で高速に列挙するアルゴリズムを提案している．このアルゴリズムのアイディアに基づく特定の制約を満たす部分グラフ列挙手法をフロンティア法と呼ぶ．短絡解を含めた全ての解を求めることができ，論文内で用いられたほとんどの問題に対して Sugar よりも少ない実行時間で解を求めている．

文献 [9] では，整数計画問題に置き換えたナンバーリンクを GLPK(GNU Linear Programming Kit) を用いて解いている．文献 [5] と同じく，各マスの次数と通過する線の種類を用いてナンバーリンクを変換している．短絡解についての考察はあるものの，実装には至っていない．

2 端子間の平面配線問題は図 4 に示す 3 種類の配線問題に分類できる．しかしこれらはどれも位相的には同じ問題と見なすことができ，いずれもひとつの原理によって解くことができる．この原理に基づいた配線アルゴリズムとして，[10] で紹介されている CHORD-LAST 法が存在する．図 4 の配線問題において全ての配線要求を満たせる場合，CHORD-LAST 法は平面配線を実現する．

CHORD-LAST 法は Tree-connection と Chord-connection の 2 段階で構成されている．Tree-connection では，異なる島が共通の端子をもつ場合にこれらを接続して新たに 1 つの島とする．異なる島が共通の端子をもたなくなるまで，この操作を繰り返す．この様子を図 5 に示す．Chord-connection では，塊となった島の外周において隣り合う端子が同じラベルをもつ場合，これらを接続して新たに島の外周とする．隣り合う端子が同じラベルをもたなくなるまで，この操作を繰り返す．この様子を図 6 に示す．

このアルゴリズムに基づいて，与えられた配線問題が平面配線可能かどうか判定するアルゴリズムが文献 [10] で提案されている．CHORD-LAST 法における Tree-

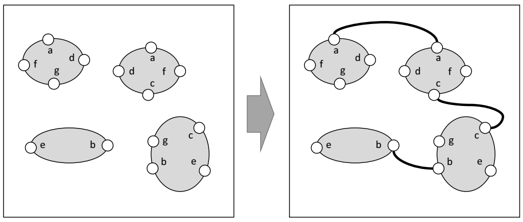

図 5: tree-connection

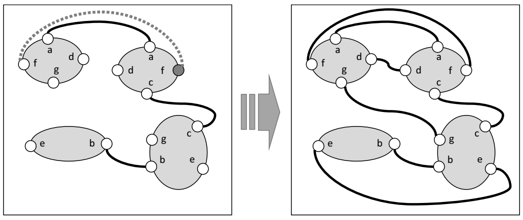

図 6: chord-connection

connection を終えた後，始める前の島々は高々1 本の線によって接続されている．Tree-connection 終了時の島それぞれにおいて，端子を 1 つ選んで外周に沿って 1 周する．自身に帰ってくるまでに通過した端子のラベルを順に並べて，列を構成する．得られた端子列において，先頭と末尾は連続しているものとする．端子列の中で同じラベルの端子が連続している場合は，これら 2 つの端子を列から取り除く．同じラベルの端子が連続しなくなるまで，この操作を繰り返す．最後に空の列が得られた時，与えられた配線問題は平面配線可能である．

3.2　ナンバーリンクの特徴

ナンバーリンクは，平面基板上の集積回路設計における配線問題と以下の点で異なる．

1. 2 つの数字マス (端子) が 1 本の線によって接続される．
2. 別解が存在しない問題が良いとされる．
3. 与えられる問題には必ず解が存在する．

平面基板上の配線問題において，端子間の接続要求をネットと呼ぶ．これをナンバーリンクに置き換えると，各ネットは端子を 2 つ持つ．各ネットに異なる数字を割り当て，盤面上の端子の位置にネットの数字を記すことで問題が与えられる．

ルールによってマスを通過できる線の本数や通り方が決められているため，任意のマス間を通過できる線の最大本数が決まっている．良問とされるナンバーリンクでは，この制限を用いて配線経路の組み合わせが唯一つとなるように端子を配置している．別解が存在するナンバーリンクにおいても，局所的にみると配線経路の組み合わせが唯一つとなる場合がある．配線経路の組み合わせにおいて，このナンバーリンクは多様性をもつ領域と多様性をもたない領域を含む．

ある領域において平面配線を実現しても，その影響によって他の領域が平面配線できなくなる場合がある．平面配線可能である問題に対して領域別に配線を行う場合，多様性をもたない領域から配線を行う方がよい．

端子-端子間，もしくは端子-外周間を結ぶ線分によって複数の領域に区分する．得られた領域に対して，配線経路の組み合わせの多様性を議論する．領域を構成する線分上を通過する線の最大本数は決まっており，本数が大きくなるほど組み合わせが多くなる．端子の初期配置によっては，各ネットにおいて必ず通過しなければいけない領域が存在する場合がある．先の線分と重なる領域が多くなるほど，配線経路の組み合わせは少なくなる．通過できる線の本数から重なる領域の数を差し引いた値を，領域の多様性を判断する指標とする．

ある端子に対して，番号の異なるネットがどのような配線経路をとるのか考える．注目する端子を原点として x,y 座標平面を定めると，他の端子は原点以外に位置する．軸上は 2 つの象限に属するとし，経路を知りたいネットの端子がそれぞれどの象限に位置するか求める．この 2 端子は共に同じ象限に属するか，隣り合う象限，もしくは斜めに位置する象限に 1 つずつ属する．いずれの組み合わせにおいても，経路を知りたいネットは注目する端子に対して時計回りか反時計回りに配線される．この配線の組み合わせを図 7 に示す．灰色のマスは最低 1 回は通過しなくてはならない領域を示し，これは属する象限の組み合わせと回り方で決まる．

あるネットに対して，他のネットはどのような配線経路をとるのか考える．配線を終えたネットは，他のネットにおいて通過できない領域と見なすことができる．端子に対する配線経路と同じく，ネットの配線はその領域に対して時計回りか反時計回りに行われる．図 7 と組み合わせることにより，離れて位置する領域への影響を求められる場合がある．

配線経路の多様性を考慮せずに探索の開始点を決める先行研究が多く，問題と開始点の組み合わせによっては不要な計算を行う可能性がある．また，先行研究には探索順においても多様性を考慮していないものもある．多様性を考慮した開始点や探索順に従って配線することにより，考慮しないアルゴリズムより早く平面配線可能性が失われたことを検出することが可能となる．

ナンバーリンクは解が存在するため，探索開始時の盤面では必ず平面配線可能である．配線アルゴリズムを考案するに当たり，いかに平面配線可能性を失わずに配線していくかが重要である．平面配線可能な盤面において，あるネットの配線経路が唯一つである場合，その配線経路を採用しても平面配線可能性は失われない．配線経路の組み合わせにおいて，選択することにより平面配線可能性を失うことがあれば，そのような配線経路を含む解は存在しない．端子が外周上に位置する場合，平面配線可能性を考慮することにより配線経路の組み合わせを絞

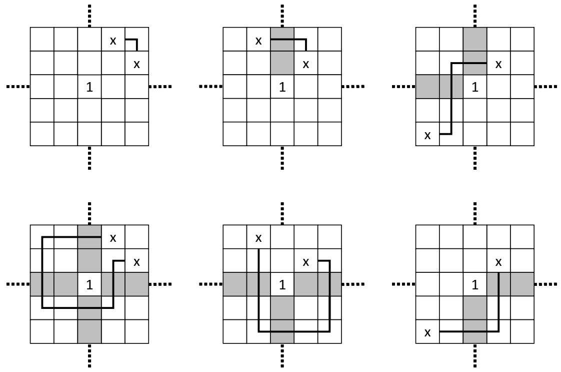

図 7: ネットで接続される端子の位置が
左：同じグループ　中：隣り合うグループ
右：斜めに位置するグループ

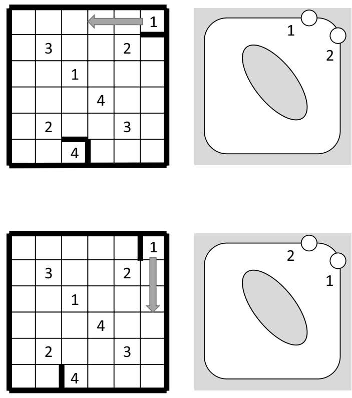

図 8: 外周の取り方による端子列の変化
上段：1 が左にのみ配線できる場合
下段：1 が下にのみ配線できる場合

れる．

配線方向が一意に定まるマスを探索し，見つかった場合は盤面を更新して同様のマスが存在しないか再び探索する．見つからない場合は配線経路の組み合わせが少ない領域で仮配線を行い，平面配線可能性を失わないかを調べる．以上の操作を繰り返して，解を求める．

ナンバーリンクは解を一意に得ることが多いが，平面基板上の配線問題においては目的の違いにより短絡解が多くなりがちである．ナンバーリンクでは良問とするために，端子を密に配して配線経路の組み合わせを限定する．平面基板上の配線問題では解が得られる保証がないため，解が得られるように要求仕様の範囲で端子を疎に配置する．この違いにより，平面基板上の配線問題の方が各領域の多様性に富んで短絡解が生じやすい．配線の多様性を考慮したアルゴリズムは早期に枝刈りを行えるため，短絡解が多い配線問題においても有効であると考えられる．

3.3　CHORD-LAST 法の適用

CHORD-LAST 法をナンバーリンクに適用するため，ナンバーリンクを図 4 の空洞内島配線問題に置き換える．空洞内島配線問題と島配線問題は位相的に同じ問題と見なせるため，島を囲う領域も島として扱う．ある端子に対して，縦横斜めの周囲 8 マスのいずれかで接する端子が存在する場合，これらの間を通して配線することはできない．空洞島配線問題に置き換えた際には，これらの端子は同じ島に位置すると見なすことができる．塊となった島に対し，それぞれの島に位置する端子の個数だけ端子を配置する．対応したラベルを端子に割り当てることで，ナンバーリンクを空洞内島配線問題に置き換えることができる．

島の外周に沿って周回した際に，対応するナンバーリンク上に出てくる端子の順番に応じてラベルを割り当てる．外周の取り方が複数存在するために，順番が一意に定まらない場合がある．図 8 に，ある空洞内島配線問題に対する 2 つの外周の取り方を示す．空洞を構成する島において外周となる部分を太線で示しており，上段と下段とではラベルの割り当て方が異なる．

CHORD-LAST 法では端子-端子間や端子-外周間を通過できる線の本数に制限がない．Tree-connection において，異なる島が共通の端子をもたないと接続できないため，全ての島が 1 つになるとは限らない．そのため，Tree-connection によって接続されない島同士がどのような位置関係にあるのかは分からない．

3.4　局所における平面配線可能性

図 9 左のように何らかの解が得られたナンバーリンクについて考える．破線で示すように，ナンバーリンクをマスの境目にそって切断する．切断された線の断面に，線に対応した端子を新たに付加すると，図 9 右のように 2 つのナンバーリンクを得ることができる．元となるナンバーリンクが平面配線可能であるので，切断後のナンバーリンクも平面配線可能である．ゆえに，切断後のナンバーリンクにも CHORD-LAST 法は適用できる．

切断の前後で分割される領域が同じネットの端子を 1 つずつもつ場合，切断面にその数字が奇数個出現する．そうでない数字は，切断面に偶数個出現する．

切断面に対して，文献 [10] で提案された平面配線可能性の有無を判定するアルゴリズムを適用する．切断面のみで構成される端子列から奇数個出現する数字を先頭，もしくは末尾の方から 1 つずつ取り除く．切断の前後でも平面配線可能であるため，この端子列に対しても文献 [10] のアルゴリズムを適用できる．

図 9 から得られた端子列は 1,3,3,3,4,2,4 であり，分割された領域にまたがる数字は 1,2,3．これらの数字を先頭から 1 つずつ取り除いて得られる端子列は 3,3,4,4 であり，アルゴリズムを適用すると端子列は空となる．

図 10 左のナンバーリンク [11] において座標 (0, 2) に位置する 1 の端子は，上・右・下の 3 方向に線を引くことが可能である．このナンバーリンクを空洞内島配線問

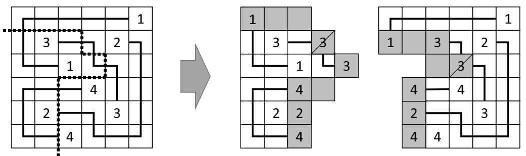

図 9: 破線部で切断したナンバーリンク
マスが重なる部分には斜線が入っている

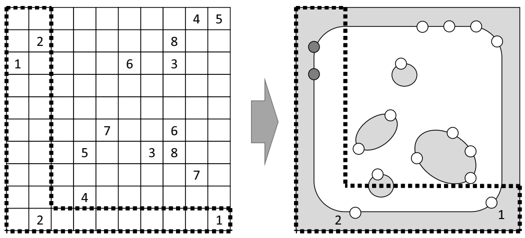

図 10: ナンバーリンクを空洞内島配線問題に置き換えた例

題に置き換えたものを図 10 右に示す．図 10 の枠内において，端子番号が決まっていない端子が 2 つ存在する．空洞内島配線における外周の定義によって，ナンバーリンク上で外周に沿った時にに出てくる端子列が異なるためである．

枠でナンバーリンクを 2 つに分割すると，1 と 2 の端子は対となる端子と共に枠内に存在する．そのため，1 と 2 は切断面に偶数回出現する．平面配線可能であるため，切断面で構成される端子列は文献 [10] のアルゴリズムにより空となる．ゆえに，枠で囲われた領域に対して先のアルゴリズムを適用すると?,?,2,1 という端子列が残る．この領域においても平面配線可能であるため，アルゴリズムによって空となる端子列は 1,2,2,1．座標 (0, 2) に位置する 1 の端子は，対応するナンバーリンクにおいて上以外の方向へ線を伸ばすと平面配線可能性を失う．

3.5 両端が外周上に存在する場合

接続される端子が共に外周に位置する場合は，これらを接続する配線に沿ってナンバーリンクを切断する．切断面を通る配線は存在しないため，切断に用いられなかった端子は切断されたナンバーリンクのどちらかに対となる端子と共に存在する．

図 11 左のナンバーリンク [12] について考える．線を伸ばせる方向が一意であるマスがなくなるまで線を伸ばす．その結果が図 11 右である．

1 の端子は共に外周に位置するため，1 を結ぶ線によって配線領域を 2 つの領域に分割することが可能である．外周のみで端子列を構成した際，1,4,5,3,2,1 となる．1 の配線により外周も分割され，端子が存在する側を外周 A，そうでない側を外周 B とする．2,3,4,5 の端子は外周 A 上に位置するため，外周 B を含む領域にこれらの端子が

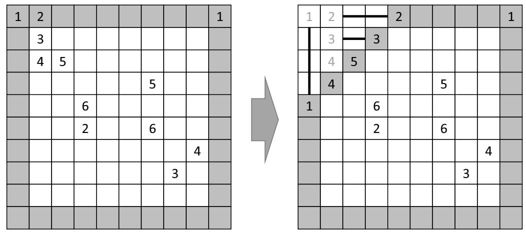

図 11: 通過する線が一意に定まるマスをなくす

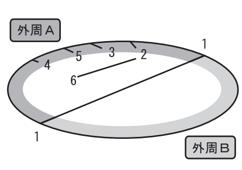

図 12: 1 の配線により
分割された領域

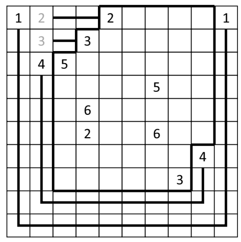

図 13: 1 と 4 の配線後

存在することはない．また，属する領域が決まっている端子に縦横斜めの周囲 8 マスで接する端子も同じ領域に属する．領域と端子の位置関係を図 12 に示す．外周 A 側の領域のみに端子が存在するため，外周 B を通るように 1 の端子を接続しても平面配線可能性を失わない．

外周 B を通るように 1 の配線を行った後，更新された外周上に 4 の端子が共に存在する．1 と同様に分割された領域の片側にのみ 4 を除く端子が存在することになる．そのため，もう片側の外周を通るように 4 を配線しても平面配線性を失われない．以上の配線を行った結果が，図 13 である．

3 の端子が共に外周に存在するため，3 の端子を結ぶ線によって配線領域を分割できる．3 以外の未配線である端子が，分割された領域のどちら側に位置するか図 14 に示す．外周に端子が存在するために配線経路が限られ，2 と 5 の端子に対して 3 の配線が最低 1 回は通過する領域を定めることができる．2 と 6 の端子は周囲 8 マスで接しているため，6 の端子を結ぶ線に対して 3 を接続する線が最低 1 回は通過する領域を定めるこことができる．3 の配線が必ず通る領域を図 15 に示す．

図 15 を踏まえると，2 の配線が最低 1 回は通過する領域を定めることができ，これを図 16 に示す．図 17 に示す配線領域を，破線と 6 の配線に沿うように切断する．得られた上側のナンバーリンクは 2 の端子が共に外周上に位置し，下側のナンバーリンクは 3 の端子が外周上に共に位置する．この様子を図 18 に示す．

外周上に対となる端子が共に存在し，それらで分割される領域の片側にのみ残る端子が位置することとなるため，平面配線可能性を失わずに配線できる．この操作を繰り返していくことにより，図 19 の解が得られる．

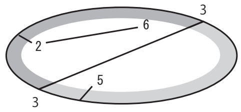

図 14: 2 つの領域への端子の割り当て

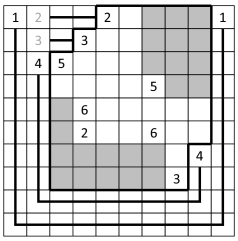

図 15: 3 が最低 1 回は通過する領域

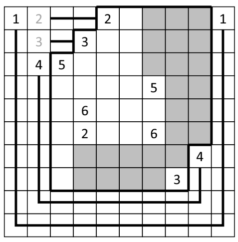

図 16: 2 が最低 1 回は通過する領域

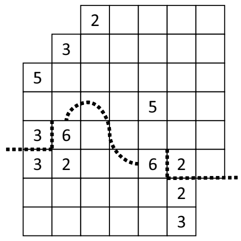

図 17: 配線領域を分割する

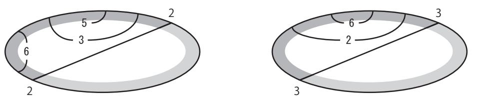

図 18: 左：図 17 の上側　右：図 17 の下側

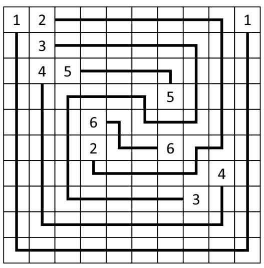

図 19: 得られた解

4　まとめ

ナンバーリンクには解が必ず存在し，空洞内島配線問題に置き換えると CHORD-LAST 法を適用できる．CHORD-LAST 法によって得られるアルゴリズムから，局所的な配線領域における配線経路の多様性を求めることができる．探索の早い段階で枝刈りを行うことが可能となるため，別解が多く存在する問題において有効であると考えられる．今後の課題として，制約条件をより簡潔にすること，先行研究と比較実験を行ってその有効性を議論することなどが挙げられる．

参考文献

[1] ニコリ：“ナンバーリンクのルール”, 2014/7, http://www.nikoli.com/ja/puzzles/numberlink/rule.html, (参照 2014/7/18).

[2] 古妻 浩一, 武永 康彦：“ナンバーリンクの NP 完全性と問題の列挙”, 電子情報通信学会技術研究報告. COMP, コンピュテーション, 一般社団法人電子情報通信学会, 2010/3, Vol.109, No.465, pp.1-7.

[3] DA シンポジウム 2014 幹事団：“参加チーム募集：アルゴリズムデザインコンテスト開催概要”, 2014/5, http://www.sig-sldm.org/DC2014/dc_2014.pdf, (参照 2014/7/18).

[4] 進可: “ナンバーリンクソルバー”, 2005/3, http://www.interq.or.jp/moonstone/person/numlink/index.html, (参照 2014/7/18).

[5] 田村 直之: “ナンバーリンク・パズルを Sugar 制約ソルバーで解く”, 2008/8, http://bach.istc.kobe-u.ac.jp/sugar/puzzles/numberlink.html, (参照 2014/7/18).

[6] 高澤 一彰, 山内 ゆかり: “遺伝的アルゴリズムを用いたナンバーリンクの解法”, 日本大学生産工学部第 42 回学術講演会 (2009-12-5), 2009/12, pp.109-110, http://www.cit.nihon-u.ac.jp/kouendata/No.42/7_sujo/7-032.pdf, (参照 2014/7/18).

[7] 吉仲 亮, 岩下 洋哲, 川原 純, 斎藤 寿樹, 鶴間 浩二, 湊 真一: “DK-2-2 フロンティア法の種々のリンクパズル問題への応用 (DK-2. 第 3 回 ERATO 湊離散構造処理系シンポジウム-グラフ列挙索引化アルゴリズムの新展開-, ソサイエティ特別企画, ソサイエティ企画)”, 電子情報通信学会総合大会講演論文集, 一般社団法人電子情報通信学会, 2012/3, Vol.2012, No.2, pp.“SS-5”-“SS-8”.

[8] Knuth Donald E.: “The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 0: Introduction to Combinatorial Algorithms and Boolean Functions (Art of Computer Programming)”, Addison-Wesley Professional, 2008.

[9] キューブ王：“GLPK でのペンシルパズル (ナンリンなど) 攻略法”, 2013/9, http://www21.tok2.com/home/kainaga11/glpk/glpk.htm, (参照 2014/7/18).

[10] Ching-Yu Chin, Chung-Yi Kuan, Tsung-Ying Tsai, Hung-Ming Chen, Kajitani, Y.: “Escaped Boundary Pins Routing for High-Speed Boards”, Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on, 2013/3, Vol.32, No.3, pp.381-391.

[11] まいなすよん:“おためし問題 3”, ナンバーリンクのおためし問題, http://www.nikoli.com/ja/puzzles/numberlink/, (参照 2014/7/18).

[12] おがわみのり:“おためし問題 2”, ナンバーリンクのおためし問題, http://www.nikoli.com/ja/puzzles/numberlink/, (参照 2014/7/18)