

遺伝的アルゴリズムのスキーマ定理による解析 ——突然変異と交叉の役割

古 谷 博 史†

遺伝的アルゴリズム(GA)の成功にもかかわらず、その理論的基礎付けに関する研究は少ない。スキーマ定理はそれらの中で歴史も長く重要な理論であるが、有効性について様々な批判があり、多くの欠点が指摘されている。最近、我々は突然変異と交叉について厳密なスキーマの進化方程式を導出する方法を見出した。このことにより、突然変異と交叉によるスキーマの変化を理論的に調べることが可能となった。本論文では、線形の適応度を持つ One-Max 問題を例にとり、選択の役割も加えたスキーマ理論の立場から進化の解析を行う。1 次のスキーマについて厳密なスキーマ定理を導き、数値実験と比較する。

Analysis of Genetic Algorithms by Schema Theorem ——Roles of Mutation and Crossover

HIROSHI FURUTANI†

In spite of the success of genetic algorithms (GAs), there are only a few theories on the foundation of GAs. The schema theorem is a long standing and important theory among them. However, there are a variety of criticisms on it, and have been pointed out many shortcomings. Recently, we have obtained a method for deriving exact evolution equations of schemata under the actions of mutation and crossover. This makes it possible to study theoretically the changes of schemata by them. In this paper, we analyze the roles of these operators and selection in the One-Max problem, which has a linear fitness function, by means of the new schema theory. We derive an exact schema theorem for the first order schemata, and compare the theory with numerical experiments.

1. はじめに

最近の様々な分野における遺伝的アルゴリズム(GA)の成功にもかかわらず、その理論的基礎付けに関する研究は少ない。Hollandにより提案されたスキーマ定理は、それら理論的研究の中で最も重要なものと考えられる¹⁾。しかし一方で、その有効性について多くの異論があることも事実である。スキーマ定理に対する批判には、単なるトートロジーにすぎない、スキーマの進化が不等式で記述され定量的な情報が得られない、突然変異と交叉についてスキーマを破壊する効果のみで新たに生成される過程が考慮されていない、などがある。

しかし、そのような批判に答えるため、より定量的なスキーマ定理を導く試みもなされている。Altenbergは、集団遺伝学における重要な定理である Price の定

理から、スキーマに対する進化方程式を導く方法を示した²⁾。また、Stephensらは、突然変異と一点交叉についてスキーマの進化を表現する方程式を導いた^{3),4)}。

最近、我々は Walsh 変換を利用し、遺伝子型頻度の進化方程式からスキーマ頻度の進化方程式を求める方法を開発した⁵⁾。都合の良いことに突然変異と交叉の場合、遺伝子型頻度の Walsh 変換に対する進化方程式は簡潔な形に表される^{8),9)}。したがって、突然変異と交叉に対するスキーマ進化方程式を比較的容易に導くことができた⁵⁾。そしてこのことにより、突然変異と交叉によるスキーマの変化を定量的に調べることが可能となった。

選択は GA における最も重要な遺伝的操作であり、進化の推進役としての役割をになっている。しかし、選択によるスキーマの進化方程式は非常に複雑になり、任意の適応度関数についてその形を求めることは難しい。そのため論文 5) では、選択によるスキーマ進化方程式について詳しくはふれなかった。そこで本論文では、線形の適応度を持ち、数学的取扱いが容易

† 京都教育大学教育学部
Faculty of Education, Kyoto University of Education

な One-Max 問題を例にとり、スキーマ理論の立場から GA の時間発展に対する理論的解析を行う。とくに低次のスキーマについて、選択、突然変異、交叉による進化を記述する方程式を導き、数値実験との比較を行う。

2. 数学モデル

本論文では、GA における選択、突然変異、交叉の役割について考察する。選択では適応度比例選択、交叉では一点交叉と一様交叉を用いることにする。

2.1 集団の記述

ここでは、これから議論する GA の枠組みを紹介し、使用する記号の定義を与える。集団の構成要素は世代ごとに入れ替わるものとし、進化の過程は差分方程式により記述する。また、仮想的に個体数が無限大の集団を考え、確率的揺らぎは無視する。集団内の個体数は時間的に一定とする。個体は ℓ ビット固定長の 2 進ビット列で表し、個体の遺伝子型とよぶ。場合によりこのビット列を非負整数の 2 進表現と見なす。すなわち、 i 番目の遺伝子型 B_i に対応する 2 進ビット列は、

$$i = \langle i_\ell, i_{\ell-1}, \dots, i_2, i_1 \rangle$$

と表される。ここで

$$i_k = 0 \text{ or } 1 \quad (k = 1, \dots, \ell),$$

は、 i の第 k ビットにおける値を表す。また、この i_k の値を第 k 遺伝子座における対立遺伝子の種類と見なすこともある。遺伝子型の種類の総数は $n = 2^\ell$ である。

2 進ビット列 i に含まれるビット 1 の数を

$$|i| = \sum_{k=1}^{\ell} i_k$$

で表す。また、長さ ℓ のビット列 i, j について、同じ長さを持つビット列

$$i \oplus j = \langle i_\ell \oplus j_\ell, \dots, i_1 \oplus j_1 \rangle$$

を定義する。ここで $i_k \oplus j_k$ はビット間の排他的論理和を表す。

集団内の遺伝子型分布の変化を表すため、世代 t における遺伝子型 B_i の相対頻度 $x_i(t)$ を用いる。各相対頻度は

$$0 \leq x_i(t) \leq 1 \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

であり、規格化の条件

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i(t) = 1. \quad (1)$$

を満たす。

GA の進化を記述するとき、直接 $x_i(t)$ を扱うより、その Walsh 変換

$$\tilde{x}_i(t) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} W_{ij} x_j(t) \quad (2)$$

を用いたほうが表現が簡単になることがある。ここで Walsh 関数 W_{ij} は、整数 i, j の 2 進表現

$$i = \langle i_\ell, i_{\ell-1}, \dots, i_1 \rangle, j = \langle j_\ell, j_{\ell-1}, \dots, j_1 \rangle$$

を用いて

$$W_{ij} \equiv W_i(j) = \prod_{k=1}^{\ell} (-1)^{i_k \cdot j_k}, \quad (3)$$

と表される。

以下、 \tilde{x}_i を Walsh 係数とよぶ。Walsh 係数では、ビット列 i に含まれる 1 の個数とその位置 b_m が重要になる。そのような場合には

$$k = |i|, \quad 1 \leq b_1 < \dots < b_k \leq \ell$$

とし、

$$\tilde{x}_i(t) = \tilde{x}^{(k)}[b_1, \dots, b_k](t) \quad (4)$$

と表すことにする。また、 k を Walsh 係数の次数とよぶ。

0 次の Walsh 係数 \tilde{x}_0 は、 $W_{0j} = 1$ を式 (2) に代入して求めることができ、規格化の条件 (1) から

$$\tilde{x}_0(t) = \sum_{j=0}^{n-1} x_j(t) = 1, \quad (5)$$

となる。また

$$\tilde{x}^{(k)}[b_1, b_2, \dots, b_k] = \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{m=1}^k (-1)^{j(b_m)} x_j \quad (6)$$

となる。ここで

$$j(b_1), \dots, j(b_k)$$

はビット列 j の各ビット位置におけるビット値を表す。

2.2 連鎖不平衡

交叉や突然変異の役割を考察するうえで非常に重要な概念に連鎖不平衡 (linkage disequilibrium f^D) がある。これは遺伝子の頻度分布に注目して定義される。

いま $\ell \geq 2$ の個体からなる集団を考え、その中の 2 つの遺伝子座 b, b' に注目する。集団が、遺伝子座 b においてビット値 m をとる相対頻度を $P[m_b]$ と表す。また、遺伝子座 b, b' においてビット値 m, m' をとる相対頻度を $P[m_b, m'_{b'}]$ とする。連鎖不平衡を定量的に表すために連鎖不平衡係数を定義する。連鎖不平衡係数としてよく使われるのは D 係数で

$$\begin{aligned} D[b, b'] &= P[0_b, 0_{b'}]P[1_b, 1_{b'}] \\ &\quad - P[0_b, 1_{b'}]P[1_b, 0_{b'}] \\ &= P[1_b, 1_{b'}] - P[1_b]P[1_{b'}], \end{aligned} \quad (7)$$

と定義される。また、一般にはより高次の D 係数も定義されるがここでは省略する。2つの遺伝子座が独立であれば $P[1_b, 1_{b'}] = P[1_b]P[1_{b'}]$ となり、 $D[b, b'] = 0$ が成り立つ。

3. 進化方程式とその Walsh 変換

ここでは、選択、突然変異、交叉による集団分布の変化を差分方程式により記述する。またそれらの Walsh 変換を求める。

3.1 選択

選択には適応度比例選択を採用する。選択後の世代 $t+1$ における遺伝子型の相対頻度は、世代 t における相対頻度から

$$x_i(t+1) = \frac{f_i}{\bar{f}(t)} x_i(t) \quad (i=0, \dots, n-1), \quad (8)$$

となる。ここで f_i は遺伝子型 B_i の適応度であり、 $\bar{f}(t)$ は世代 t における集団の平均適応度である。

$$\bar{f}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i x_i(t). \quad (9)$$

進化方程式 (8) は一見すると非線形であるが、その解は容易に求めることができ、

$$x_i(t) = \frac{f_i^t x_i(0)}{\sum_j f_j^t x_j(0)} \quad (i=0, \dots, n-1) \quad (10)$$

で与えられる。比例選択を採用すると次の定理を導くことができる⁷⁾。

定理 3.1 (Fisher の定理) 世代あたりの平均適応度の変化を $\Delta \bar{f}(t) = \bar{f}(t+1) - \bar{f}(t)$ とすると

$$\Delta \bar{f}(t) = \frac{1}{\bar{f}(t)} \text{VAR}(f), \quad (11)$$

$$\text{VAR}(f) = \sum_i f_i^2 x_i(t) - \bar{f}(t)^2.$$

を得る。ここで $\text{VAR}(f)$ は適応度の分散である。

証明：進化方程式 (8) の両辺に f_i をかけ、 i について和をとれば

$$\bar{f}(t+1) = \frac{1}{\bar{f}(t)} \sum_i f_i^2 x_i(t)$$

となり、求める定理を得る。□

$\Delta \bar{f}$ を進化速度の指標と考えれば、進化のためには適応度の分散を大きくすることが重要であることが分かる。

適応度 f_i の Walsh 変換

$$\tilde{f}_i = \sum_{j=0}^{n-1} W_{ij} f_j \quad (12)$$

を用いて、進化方程式 (8) の Walsh 変換を表すことができる。

定理 3.2 (選択による進化方程式の Walsh 変換) 選択による効果を形式的に $\widehat{S}\tilde{x}_i(t) = \tilde{x}_i(t+1)$ と表せば

$$\widehat{S}\tilde{x}_i(t) = \frac{1}{n\bar{f}(t)} \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{f}_j \tilde{x}_{i \oplus j}(t), \quad (13)$$

となる。

証明：式の導出には、Walsh 関数の性質

$$W_{ij} = W_{ji}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} W_{ij} W_{ij'} = n\delta_{j,j'},$$

$$W_{ij} W_{ij'} = W_{i, j \oplus j'},$$

を用いる。式 (8) の i を k に置き換え、左から Walsh 関数 W_{ik} をかけて k について和をとる。

$$\sum_k W_{ik} x_k(t+1) = \frac{1}{\bar{f}(t)} \sum_k W_{ik} f_k x_k(t),$$

左辺からは $\tilde{x}_i(t+1)$ が得られる。右辺の $\sum_k W_{ik} f_k x_k$ に逆 Walsh 変換

$$f_k = \frac{1}{n} \sum_j W_{kj} \tilde{f}_j, \quad x_k = \frac{1}{n} \sum_{j'} W_{kj'} \tilde{x}_{j'}$$

を代入する。そして

$$W_{ik} W_{kj} = W_{k, i \oplus j}, \quad \sum_k W_{k, i \oplus j} W_{kj'} = n\delta_{j', i \oplus j},$$

$$\sum_{j'} \delta_{j', i \oplus j} \tilde{x}_{j'} = \tilde{x}_{i \oplus j},$$

から求める結果が得られる。□

ここで $i=0$ の場合

$$\tilde{x}_0(t+1) = \frac{1}{n\bar{f}(t)} \sum_j \tilde{f}_j \tilde{x}_j(t) = 1$$

となり、規格化条件 (5) は変化しない。平均適応度は

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{f}_j \tilde{x}_j(t) \quad (14)$$

と表すことができる。

3.2 突然変異

突然変異による相対頻度の変化は

$$x_i(t+1) = \sum_{j=0}^{n-1} M_{ij} x_j(t), \quad (15)$$

と表すことができる。突然変異行列 M_{ij} は B_j から B_i への 1 世代あたりの変異の確率であり、ビットあ

たりの突然変異率 p と i と j の間の Hamming 距離 $d(i, j)$ を用いて

$$M_{ij} = (1 - p)^{\ell - d(i, j)} p^{d(i, j)}, \quad (16)$$

と表すことができる。

定理 3.3 (突然変異による進化方程式の Walsh 変換) 進化方程式 (15) の Walsh 変換は、突然変異の効果形式的に \widehat{M} として

$$\widehat{M}\tilde{x}_i(t) = (1 - 2p)^{|i|} \tilde{x}_i(t), \quad (17)$$

で与えられる。

証明：式 (15) の i を k に置き換え、左から Walsh 関数 W_{ik} をかけて k について和をとる。

$$\sum_k W_{ik} x_k(t+1) = \sum_k \sum_j W_{ik} M_{kj} x_j(t).$$

左辺から $\tilde{x}_i(t+1)$ が得られる。右辺のうち k についての和は、Walsh 関数が M_{kj} の固有ベクトルであることを用い、

$$\sum_k W_{ik} M_{kj} = (1 - 2p)^{|i|} W_{ij},$$

となる。この式を代入して求める結果が得られる。□

3.3 交 叉

交叉の取扱いは、選択や突然変異にくらべて少し面倒であるが、ここでは交叉マスクにより定式化する。交叉前の 2 つの親の遺伝子型を $B_i, B_{i'}$ とし、交叉の結果 2 つの子が生まれるものとする。交叉のパターンを ℓ ビットのビット列 $r = \langle r_\ell, \dots, r_1 \rangle$ で表し、第 1 子と第 2 子の遺伝子型 $B_j, B_{j'}$ を

$$j_k = \begin{cases} i_k & (r_k = 0) \\ i'_k & (r_k = 1), \end{cases} \quad j'_k = \begin{cases} i'_k & (r_k = 0) \\ i_k & (r_k = 1), \end{cases}$$

で与えることにする。場合により、交叉マスクの別な表現を用いることもある。ビット位置の集合を

$$S = \{1, 2, \dots, \ell\}$$

とし、交叉マスク r に含まれるビット 0 のすべてのビット位置の集合 $S(r)$ 、ビット 1 のすべてのビット位置の集合 $S(\bar{r})$ を用いて r を表現する。

交叉による進化方程式は、 $n \times n^2$ 交叉行列 C を用いて

$$x_k(t+1) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} C(k, \widehat{ij}) x_i(t) x_j(t). \quad (18)$$

と表すことができる。整数 \widehat{ij} は i と j から構成される 2ℓ ビットのビット列である。論文 8) で示したように

$$\widehat{ij} = \langle i_\ell, j_\ell, i_{\ell-1}, j_{\ell-1}, \dots, i_1, j_1 \rangle,$$

とすれば、交叉行列 C は 2 つの 2×4 行列のテンソル積により表現できる。

交叉による進化方程式 (18) もまた Walsh 変換により簡潔な形に変換できる。結果のみ示すと、交叉マスク r に対する進化方程式の Walsh 変換は

$$\tilde{x}_k(t+1) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i, i \oplus k}(r) \tilde{x}_i(t) \tilde{x}_{i \oplus k}(t), \quad (19)$$

となる。ここで係数 $c_{ij}(r)$ は、整数 i について定義された関数

$$\delta(i) = \begin{cases} 1 & (i = 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を用いて次式で与えられる。

$$c_{ij}(r) = \frac{1}{2} \prod_{m \in S(r)} \delta(j_m) \prod_{m \in S(\bar{r})} \delta(i_m) + \frac{1}{2} \prod_{m \in S(r)} \delta(i_m) \prod_{m \in S(\bar{r})} \delta(j_m). \quad (20)$$

GA で用いられる一点交叉や一様交叉などは、様々な交叉マスクの重ね合わせになる。

$$R = \sum_r R(r)r.$$

ここで $R(r)$ は交叉マスク r の重み係数である。

定理 3.4 (交叉による進化方程式の Walsh 変換) 進化方程式は、 R による交叉の効果形式的に $\widehat{C}(R)$ として、

$$\widehat{C}(R) \tilde{x}_k(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i, i \oplus k}(R) \tilde{x}_i(t) \tilde{x}_{i \oplus k}(t), \quad (21)$$

となる^{8),9)}。

この進化方程式は式 (19) と同じ形をしているが、右辺の $c_{ij}(R)$ は式 (20) の和になる。一点交叉と一様交叉について以下に $c_{ij}(R)$ の具体的な形を示しておく。 χ を交叉率とし、

$$c_{ij}(R) = (1 - \chi) \frac{\delta(i) + \delta(j)}{2} + \chi c_{ij}(\chi = 1). \quad (22)$$

とする。ここで $c_{ij}(\chi = 1)$ は、交叉率が $\chi = 1$ における値である。

一点交叉の $c_{ij}(\chi = 1)$ は、

- $i = 0$ または $j = 0$ の場合

$$c_{ij}(\chi = 1) = \frac{\log(i) - \text{hi}(i) + \log(j) - \text{hi}(j)}{2(\ell - 1)}. \quad (23)$$

関数 $\text{hi}(i)$ と $\log(i)$ はそれぞれ次式で定義される。

$$\begin{aligned} \text{hi}(i) &= \begin{cases} 1 & (i = 0) \\ i_{\max} & (\text{otherwise}), \end{cases} \\ \text{lo}(i) &= \begin{cases} \ell & (i = 0) \\ i_{\min} & (\text{otherwise}), \end{cases} \end{aligned}$$

ここで, i_{\max} はビット列 i の最も左 (上位) にあるビット 1 の位置を示し, i_{\min} は最も右 (下位) にあるビット 1 の位置を示す.

- $i \neq 0$ かつ $j \neq 0$ の場合

$i_{\min}, i_{\max}, j_{\min}, j_{\max}$ の位置関係に依存して決まる.

$$c_{ij}(\chi = 1) = \begin{cases} (i_{\min} - j_{\max})/2(\ell - 1) & (i_{\min} > j_{\max}) \\ (j_{\min} - i_{\max})/2(\ell - 1) & (j_{\min} > i_{\max}) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

一様交叉の場合は,

$$\begin{aligned} c_{ij}(R) &= (1 - \chi) \frac{\{\delta(i) + \delta(j)\}}{2} \\ &+ \chi \prod_{m=1}^{\ell} \frac{1}{2} \{\delta(i_m) + \delta(j_m)\}. \quad (24) \end{aligned}$$

4. スキーマ定理

スキーマ定理は, Holland により提案され¹⁾, その後, GA の理論的解析において一貫して中心的地位を占めている. ここでは, Holland のスキーマ定理を紹介した後, 我々の突然変異と交叉に対する新しいスキーマ定理⁵⁾ について述べる. 選択に対する一般的なスキーマ定理を導くことは難しいので, 次章で具体的な適応度関数として One-Max 問題を取り上げ, それに対するスキーマ定理を導く.

4.1 Holland のスキーマ定理

スキーマは, 遺伝子型のうち, あるビットの組合せを持つものだけを集めた集合のことである. スキーマは 3 種類の記号 $\{0, 1, *\}$ で表現され, $*$ は 0 でも 1 でもよいことを表す. ビット 0 と 1 を定義されたビットとよぶ. スキーマのオーダー $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ は, スキーマ \mathcal{H} に含まれる定義されたビット (ビット 0 と 1) 数を表す. たとえばスキーマ $\mathcal{H} = *11**0*$ を例にとると $\mathcal{O}(\mathcal{H}) = 3$ となる. 定義長 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ は, \mathcal{H} の両端にある定義されたビットの間の距離であり, この例では $\mathcal{L}(*11**0*) = 4$ となる.

スキーマ定理の代表的な表現として, Holland による一点交叉を用いた次の式がある¹⁾.

定理 4.1 (Holland のスキーマ定理) $h(\mathcal{H}, t)$ を世代 t におけるスキーマ \mathcal{H} の相対頻度を表すものとすると,

$$\begin{aligned} h(\mathcal{H}, t + 1) &\geq h(\mathcal{H}, t) \frac{f(\mathcal{H})}{\bar{f}(t)} \{1 - \chi \frac{\mathcal{L}(\mathcal{H})}{\ell - 1} - p\mathcal{O}(\mathcal{H})\}. \quad (25) \end{aligned}$$

ここで $f(\mathcal{H})$ はスキーマ \mathcal{H} に含まれる遺伝子型の平均適応度を表す.

交叉によりスキーマが破壊される確率が $\chi\mathcal{L}(\mathcal{H})/(\ell - 1)$ であり, 突然変異による破壊の確率が $p\mathcal{O}(\mathcal{H})$ となる. この式ではスキーマの生成過程がまったく考慮されていない.

スキーマ \mathcal{H} のオーダー, 定義されたビットの位置および各ビットの値を明示的に

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(k)}[i(b_1), i(b_2), \dots, i(b_k)],$$

と表す. ここで, $k = \mathcal{O}(\mathcal{H})$ であり,

$$1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k \leq \ell$$

は定義されたビットの位置を表す. スキーマ \mathcal{H} の相対頻度 $h(\mathcal{H})$ も同様にして

$$h(\mathcal{H}) = h^{(k)}[i(b_1), i(b_2), \dots, i(b_k)],$$

と表すことにする. スキーマの分布は, 遺伝子型分布 $x_i(t)$ のあるビット位置 b_k またはビット位置の集合 $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ への射影とも考えることができる.

4.2 Walsh 変換とスキーマ定理

我々は論文 5) において, Walsh 変換によりスキーマ定理が導出できることを示した. ここではその内容を紹介する. この方法では, 突然変異や交叉のスキーマを生成する効果も考慮されている.

まずビット i_k と j_k について, 2 つのビットの値が等しくなる条件が

$$\delta(i_k - j_k) = \frac{1}{2} \{1 + (-1)^{i_k} (-1)^{j_k}\}$$

と表せることに注意する. このことを用いて 1 次のスキーマ $\mathcal{H}^{(1)}[i(b_1)]$ の相対頻度 $h(\mathcal{H})$ を求める.

$$\begin{aligned} h^{(1)}[i(b_1)] &= \sum_{j=0}^{n-1} \delta(i(b_1) - j(b_1)) x_j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} \{x_j + (-1)^{i(b_1)} (-1)^{j(b_1)} x_j\} \\ &= \frac{1}{2} \{1 + (-1)^{i(b_1)} \bar{x}^{(1)}[b_1]\} \end{aligned}$$

を得る. ここで規格化条件の式 (1) と Walsh 係数の表現 (6) を用いた.

L 次のスキーマについてもスキーマ頻度を Walsh 係数で表現することができる.

定理 4.2 (スキーマ頻度の Walsh 係数による展開) $S = \{b_1, \dots, b_L\}$ をすべての定義されたビットの位置

の集合とし, $S' = \{b'_1, \dots, b'_k\}$ をその部分集合とすると,

$$\begin{aligned} h^{(L)}[i(b_1), \dots, i(b_L)] \\ = \frac{1}{2^L} \sum_{S'} (-1)^{i(b'_1) + \dots + i(b'_k)} \tilde{x}^{(k)}[b'_1, \dots, b'_k] \end{aligned} \quad (26)$$

を得る. ここで右辺の和は集合 S のすべての部分集合についてとるものとし, S 自身や空集合 \emptyset も含める. 空集合に対応する項は $\tilde{x}^{(0)}[\emptyset] = 1$ となる.

証明: L 次のスキーマについて

$$\begin{aligned} h^{(L)}[i(b_1), i(b_2), \dots, i(b_L)] \\ = \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{m=1}^L \delta(i(b_m) - j(b_m)) x_j \end{aligned}$$

の右辺の δ 関数を展開し, 各項を整理すればよい. 口
たとえば 2 次のスキーマの頻度は

$$\begin{aligned} h^{(2)}[i(b_1), i(b_2)] \\ = \frac{1}{4} \{ 1 + (-1)^{i(b_1)} \tilde{x}^{(1)}[b_1] + (-1)^{i(b_2)} \tilde{x}^{(1)}[b_2] \\ + (-1)^{i(b_1) + i(b_2)} \tilde{x}^{(2)}[b_1, b_2] \} \end{aligned} \quad (27)$$

で与えられる.

逆変換も同様に次式で与えられる.

$$\begin{aligned} (-1)^{i(b_1) + \dots + i(b_L)} \tilde{x}^{(L)}[b_1, \dots, b_L] \\ = \sum_{S'} (-1)^{L-k} 2^k h^{(k)}[i(b'_1), \dots, i(b'_k)]. \end{aligned} \quad (28)$$

ここでも和は集合 S のすべての部分集合についてとるものとする.

4.3 突然変異に対するスキーマ方程式

これらの結果を用いて, Walsh 係数の進化方程式をスキーマの進化方程式に変換することができる.

定理 4.3 (突然変異のスキーマ定理) 突然変異によるスキーマ頻度の変化は

$$\begin{aligned} \widehat{M} h^{(L)}[i(b_1), \dots, i(b_L)] \\ = \sum_{S'} (1 - 2p)^k p^{L-k} h^{(k)}[i(b'_1), \dots, i(b'_k)] \end{aligned} \quad (29)$$

で与えられる. ここでも右辺は, 集合 S のすべての部分集合についての和である.

証明: 突然変異による Walsh 係数の進化方程式 (17) をもとに, Walsh 係数とスキーマ頻度の関係式 (26) と (28) を用いればよい. 口

1 次のスキーマの場合,

$$\widehat{M} h^{(1)}[i(b_1)] = (1 - 2p) h^{(1)}[i(b_1)] + p \quad (30)$$

となり, 2 次のスキーマでは

$$\begin{aligned} \widehat{M} h^{(2)}[i(b_1), i(b_2)] &= (1 - 2p)^2 h^{(2)}[i(b_1), i(b_2)] \\ &+ (1 - 2p) p h^{(1)}[i(b_1)] + (1 - 2p) p h^{(1)}[i(b_2)] \\ &+ p^2, \end{aligned} \quad (31)$$

となる.

Stephens らも突然変異に対するスキーマ進化方程式を導いた^{3),4)}. 彼らの式は, スキーマ \mathcal{H} のオーダーを $k = O(\mathcal{H})$ として

$$\widehat{M} h(\mathcal{H}) = \sum_{\mathcal{H}'} (1 - p)^{k - d(\mathcal{H}, \mathcal{H}')} p^{d(\mathcal{H}, \mathcal{H}')} h(\mathcal{H}') \quad (32)$$

で与えられる. 右辺の和は, スキーマ \mathcal{H} と同じ位置で定義されたすべての k 次のスキーマについてとる. $d(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ は, 定義されたビットについての 2 つのスキーマ間の Hamming 距離である. 式 (29) と (32) が同値であることは証明できる⁵⁾.

4.4 交叉に対するスキーマ方程式

交叉についてのスキーマ方程式を導くため, スキーマの別の表現として

$$\{0, 1\} \rightarrow 1, \quad \{*\} \rightarrow 0 \quad (33)$$

で与えられるビット列 $i(\mathcal{H})$ を用いる. たとえば,

$$\mathcal{H} = *10* \Rightarrow i(\mathcal{H}) = \langle 0, 1, 1, 0 \rangle$$

となる. この表示ではビット 0 と 1 の区別がないが, 交叉による演算の前後ではビットの値が変化することはないのでこの表現で十分である.

交叉の効果は Walsh 係数とスキーマとで同等であり, 同じ結果を与える. 定義されたビット位置の集合を $U = \{b_1, b_2, \dots, b_L\}$, 交叉マスク r により 2 分されるビット位置の集合をそれぞれ U_0, U_1 とすれば,

$$\widehat{C}(r) h^{(L)}[U] = h^{(m)}[U_0] h^{(L-m)}[U_1], \quad (34)$$

が成り立つ.

多くの交叉は, 重み $R(r)$ による複数の交叉マスクの重ね合わせとして表される.

$$\widehat{C}(R) = \sum_r R(r) \widehat{C}(r) \quad (35)$$

とすると, スキーマに対する交叉の効果は式 (21) を用い求めることができる.

定理 4.4 (交叉のスキーマ定理) スキーマに対する交叉の効果は

$$\widehat{C}(R) h(k) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i, i \oplus k}(R) h(i) h(i \oplus k), \quad (36)$$

と表現される. ただし, $h(k), h(i)$ の k や i はスキーマの 2 進表現 (33) である.

$c_{i,i \oplus k}$ は, i と $i \oplus k$ は同じビット位置でもとに 1 となると値が 0 になる. したがって, 右辺の和には左辺で定義されたビットのみが現れ, しかもそれは $h(i)$ か $h(i \oplus k)$ のいずれかのみに現れる.

5. One-Max 問題におけるスキーマ解析

5.1 One-Max 問題

One-Max 問題の適応度は

$$f_i = |i| = \sum_{k=1}^{\ell} i_k \quad (37)$$

と定義され, ビット列 i 中のビット 1 の個数に等しい. このように線形の適応度を持つため, One-Max 問題の解析は数学的取扱いが比較的容易である. ここでは主に 1 次のスキーマに注目し, 選択, 突然変異, 交叉の効果を調べてゆく. 式の表現を簡単にするため,

$$h^{(1)}[i_k = 1] \rightarrow h^{(1)}[1_k]$$

などと簡略化して表すことにする.

適応度の Walsh 変換も非常に簡単な形をしており,

$$\tilde{f}_i = \begin{cases} n\ell/2 & (i = 0) \\ -n/2 & (|i| = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (38)$$

で与えられる. 平均適応度は式 (14) から

$$\bar{f}(t) = \frac{\ell}{2} \tilde{x}_0(t) - \sum_{m=1}^{\ell} \frac{1}{2} \tilde{x}^{(1)}[m](t)$$

となる. $\tilde{x}_0 = 1$ と $h^{(1)}[1_m] = (1 - \tilde{x}^{(1)}[m])/2$ から

$$\bar{f}(t) = \sum_{m=1}^{\ell} h^{(1)}[1_m] \quad (39)$$

を得る.

0 次のスキーマは規格化条件を表し, 世代により変化することはない. まず 1 次のスキーマについて進化方程式を求め. 適応度の Walsh 変換 (38) を式 (13) に代入し,

$$\begin{aligned} & \tilde{x}^{(1)}[k](t+1) \\ &= \frac{1}{2\bar{f}(t)} \left\{ \tilde{x}^{(1)}[k] - \sum_{m \neq k} \tilde{x}^{(2)}[k, m] - 1 \right\} \end{aligned}$$

を得る. ただし, 右辺の $\tilde{x}^{(2)}[k, m]$ について k と m の大小は問わないことにする.

このように選択の場合には, 1 次の式に対しより高次の項が現れる. One-Max 問題では 2 次の項までしか現れないが, 一般の適応度ではより多くの高次項が現れて取扱いが非常に難しくなる. このことは先に述

べた連鎖不平衡の問題と密接に関連している. One-Max 問題では 2 次の連鎖不平衡係数が現れるが, これは 2 つの遺伝子座が独立ではなく関係し合うことを意味する. さらに高次の項が関係するということは, その次数の遺伝子座が互いに関連しながら進化することであり, 当然動きも複雑になり解析も困難になる.

2 次の項 $\tilde{x}^{(2)}[k, m]$ を取り扱うため, 連鎖不平衡係数

$$\begin{aligned} D[k, m] &= h^{(2)}[1_k, 1_m] - h^{(1)}[1_k]h^{(1)}[1_m] \\ &= \frac{1}{4} \{ \tilde{x}^{(2)}[k, m] - \tilde{x}^{(1)}[k]\tilde{x}^{(1)}[m] \} \end{aligned}$$

を用いる.

$$\tilde{x}^{(2)}[k, m] = 4D[k, m] + \tilde{x}^{(1)}[k]\tilde{x}^{(1)}[m]$$

を代入し, すこし整理すると,

$$\tilde{x}^{(1)}[k](t+1) = \tilde{x}^{(1)}[k](t) - \frac{2v_k(t)}{\bar{f}(t)} \quad (40)$$

を得る. ここで $v_k(t)$ は分散の意味を持ち,

$$\begin{aligned} v_k(t) &= v_k^a(t) + v_k^e(t) \\ v_k^a(t) &= \frac{1}{4} \{ (1 - \tilde{x}^{(1)}[k])(1 + \tilde{x}^{(1)}[k]) \} \\ &= h^{(1)}[1_k]h^{(1)}[0_k] \\ v_k^e(t) &= \sum_{m \neq k} D[k, m] \end{aligned} \quad (41)$$

と定義する. $v_k^a \geq 0$ は第 k ビットのものに依存する. それに対し v_k^e は他のビットとの相関であり, 一般に負になることもある.

v_k , \bar{f} とともにスキーマの頻度を用いて表せることに注意し, 1 次のスキーマに対するスキーマ定理

$$\begin{aligned} h^{(1)}[1_k](t+1) &= \hat{S}h^{(1)}[1_k](t) \\ &= h^{(1)}[1_k](t) + \frac{v_k(t)}{\bar{f}(t)} \end{aligned} \quad (42)$$

を導くことができる. この式は 1 次のスキーマについて閉じているように見えるが, 先に示したように v_k が 2 次のスキーマを含むため, このままでは解けない. 選択による 1 世代あたりの変化を

$$\Delta h^{(1)}[1_k](t) \equiv h^{(1)}[1_k](t+1) - h^{(1)}[1_k](t)$$

とし,

$$\Delta h^{(1)}[1_k](t) = \frac{v_k(t)}{\bar{f}(t)} \quad (43)$$

を得る. この式は Fisher の定理⁷⁾, 式 (11) に非常によく似た形をしている. このことの意味は最後の章で議論する.

スキーマ定理 (42) はこのままでは解くことができないが, 適当な近似を導入することにより解を得るこ

とができる．後で突然変異と交叉の役割に関連して述べる理由により， $v_k^e = 0$ と仮定する．さらに，この仮定の正当性については数値実験との関連の中で検討する．またすべてのビットは対等に進化するとして，

$$P_1(t) = h^{(1)}[1_k](t)$$

と仮定し，1 次のスキーマのビット位置依存性を無視する．そうすると，

$$\bar{f}(t) = \ell P_1(t), \quad v_k(t) = v_k^a(t) = P_1(t)\{1 - P_1(t)\}$$

から進化方程式

$$P_1(t+1) = P_1(t) + \frac{1}{\ell}\{1 - P_1(t)\} \quad (44)$$

が得られる．その解は

$$P_1(t) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^t \{1 - P_1(0)\} \quad (45)$$

となり， $t \rightarrow \infty$ で $P_1(t) \rightarrow 1$ に収束する．

5.2 突然変異と交叉の効果

1 次のスキーマに対し交叉は直接には効果を及ぼさない．しかし，選択の過程を通して間接的に影響を与える．ここではまず突然変異の役割を調べる．1 次のスキーマに対する突然変異の効果は式 (30) で表される．より分かりやすくするため，新たに $1/2$ を基準にしたスキーマの頻度を導入する．

$$\tilde{h}^{(1)}[i(b_1)] = h^{(1)}[i(b_1)] - \frac{1}{2}.$$

この表現でのスキーマ定理は

$$\widehat{M}\tilde{h}^{(1)}[i(b_1)] = (1 - 2p)\tilde{h}^{(1)}[i(b_1)]. \quad (46)$$

となり，突然変異は縮小演算子であることが分かる．したがって突然変異は

$$h^{(1)}[i(b_1)] \rightarrow \frac{1}{2}$$

と 1 次のスキーマの頻度を $1/2$ に近づける働きをする．

次に，近似式 (44) の突然変異による変化を見てみる．選択の後で突然変異を適用したとすると，

$$\begin{aligned} P_1(t+1) &= (1 - 2p)\left(1 - \frac{1}{\ell}\right)P_1(t) + \frac{1}{\ell}(1 - 2p) + p, \end{aligned} \quad (47)$$

となる．この解は

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 - 2p)\left(1 - \frac{1}{\ell}\right), \\ \beta &= 1 - \frac{p}{2p + (1 - 2p)/\ell} \end{aligned}$$

として

$$P_1(t) = \alpha^t \{P_1(0) - \beta\} + \beta \quad (48)$$

で与えられる．

交叉の効果は 2 次以上のスキーマに現れる．この例では，1 次のスキーマに対する方程式 (42) の v_k を通じて影響する． v_k^a は 1 次のスキーマの積であるから， v_k^e のみが交叉により変化する．一点交叉や一様交叉による D 係数の変化は，交叉率を $\chi = 1$ とした場合

- 一点交叉

$$\widehat{C}(R)D[k, m] = \left(1 - \frac{|m - k|}{\ell - 1}\right)D[k, m]$$

- 一様交叉

$$\widehat{C}(R)D[k, m] = \frac{1}{2}D[k, m]$$

で与えられる⁸⁾．一点交叉ではビット位置に依存するが，一様交叉では位置に無関係に決まる．いずれにしろ交叉は D 係数の，したがって v_k^e の絶対値を小さくするように働く．

突然変異も v_k^e の絶対値を小さくする働きをする．結果のみ示すと，

$$\widehat{M}D[k, m] = (1 - 2p)^2 D[k, m]$$

となる．突然変異と一様交叉による v_k^e への効果は

$$\widehat{M}v_k^e = (1 - 2p)^2 v_k^e \quad (49)$$

$$\widehat{C}(R)v_k^e = v_k^e/2 \quad (50)$$

で与えられる．このように突然変異と交叉が十分効果的に効いた場合，先の $v_k^e = 0$ という仮定が成り立つことが期待できる．

この章の最後に 1 次スキーマに対する選択，突然変異，交叉の効果をもとめておく．各世代において選択，交叉，突然変異の順に適用する．世代 t の最初に，スキーマ頻度は $h^{(1)}[1_k](t)$ であるものとする．まず選択により式 (42) から $\widehat{S}h^{(1)}[1_k](t)$ が得られる．次に交叉であるが，交叉は 1 次のスキーマに対しては効果を及ぼさない⁵⁾．しかし，2 次のスキーマに対しては効果があり，連鎖不平衡係数の絶対値を減少させ， v_k^e を 0 に近づける働きをする．その結果， v_k の値を変化させ，次の世代 $t+1$ における選択の働きにおいて式 (42) の中の v_k を通じて影響を与える．このように間接的ではあるが，1 次のスキーマに対し交叉が効果を持つことに注意しなければならない．

突然変異は 1 次のスキーマに直接影響を及ぼす．式 (30) から

$$\widehat{M}\widehat{S}h^{(1)}[1_k](t) = (1 - 2p)\widehat{S}h^{(1)}[1_k](t) + p$$

となり，1 次スキーマに対する選択と突然変異の効果をもとめて表現することができる．

$$\widehat{M} \widehat{S} h^{(1)}[1_k](t) = (1 - 2p)h^{(1)}[1_k](t) + \frac{(1 - 2p)v_k(t)}{\bar{f}(t)} + p \quad (51)$$

から，選択と突然変異による 1 次スキーマ頻度の变化を

$$\Delta h^{(1)}[1_k] = \widehat{M} \widehat{S} h^{(1)}[1_k](t) - h^{(1)}[1_k](t)$$

とすると，

$$\Delta h^{(1)}[1_k] = \{1 - 2h^{(1)}[1_k]\}p + \frac{(1 - 2p)v_k(t)}{\bar{f}(t)} \quad (52)$$

となる．右辺の第 1 項は $h^{(1)}[1_k] > 1/2$ では負になり，第 2 項の係数 $1 - 2p$ はスキーマの頻度を増加させる v_k の効果を減少させてしまう．したがって，この式だけから判断すると突然変異は有害な遺伝的操作ということになってしまう．しかし，突然変異には式 (49) で示したように，交叉と同様に v_k 中の v_k^e の絶対値を縮小する働きもあることに注意しなければならない．これらの働きの関係は後の数値実験で明らかにする．また，突然変異には存在していない対立遺伝子を生成する働きがあること，ここで示した理論は確率的効果を含まないものであることなども指摘しておく．

6. 数値実験

これまでに得られた結果を数値実験により検討する．とくに突然変異と交叉がどのような役割をしているか，1 次のスキーマに注目して調べることにする．集団の個体数は 200 とし，乱数を変えながら同じ計算を 100 回繰り返し平均をとった．突然変異率 p は，0.00001，0.001，0.01 と 0.1 の 4 種類の値を用いた．交叉はビット位置に依存しない一様交叉を適用した．交叉率は $\chi = 0$ と $\chi = 1$ の計算を比較し，交叉の効果を調べた．また，近似式 (44)，(48) を導出するうえで用いた仮定 $v_k^e = 0$ の妥当性についても検討した．初期集団は，各ビット位置において 1 の出現確率が 1/4 となるように一様乱数を発生させて生成した．

図 1 は v_k^e を無視して得られた $P_1(t)$ の近似式 (48) を各突然変異率 p について計算したものである． p が大きくなるに従い $P_1(t)$ の増加は遅れていき，定常状態での値も小さい．このようにこの図からは，突然変異が有害な遺伝的操作であることが示唆される．

しかし，実際の GA 計算について調べてみると異なる結果が得られる．図 2 は交叉率 $\chi = 0$ とした GA 計算の結果である．最も進化の効率が良いのは $p = 0.01$ の計算であり，図 1 で最も良い結果を与え

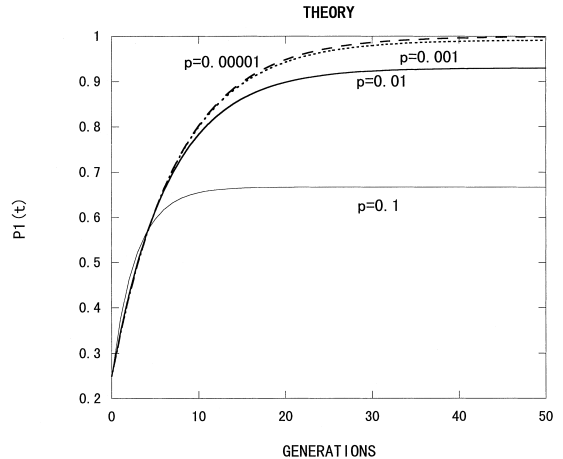


図 1 $P_1(t)$ の理論的予測
Fig. 1 Theoretical prediction for $P_1(t)$.

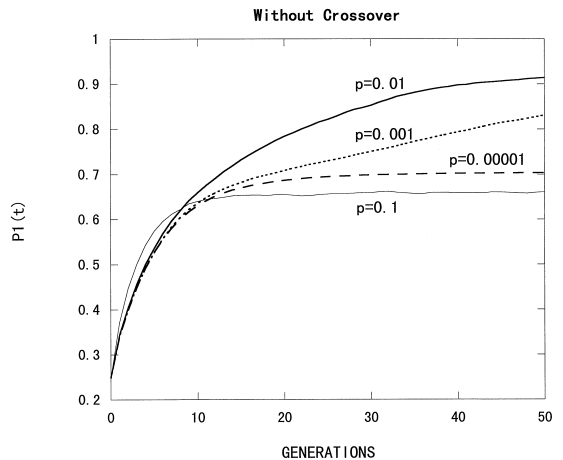


図 2 $P_1(t)$ の数値実験 (交叉なし)
Fig. 2 Numerical experiments for $P_1(t)$ without crossover.

た $p = 0.00001$ による GA は大幅に進化速度が遅くなっている．しかし一方で， $p = 0.1$ の結果はほとんど変化なく，やはり一番進化が遅い．このように，交叉のない場合は最適な突然変異率 p がある．

実際の GA 計算でも交叉があると状況は大きく異なる．図 3 に交叉率 $\chi = 1$ とした GA での， $P_1(t)$ の世代による変化を示した．この結果は図 1 の理論予測とほぼ一致し，やはり突然変異率 p が小さいほど良い結果を与える．このことは再び突然変異の有害性を示唆しているようにも思える．

以下ではこの 2 つの矛盾した結果について考察する．まず計算結果が大きく変化した $p = 0.00001$ について，交叉の有無による変化を調べた．図 4 に v_k ， v_k^a ， v_k^e の世代による変化を $\chi = 0$ (上図) と $\chi = 1$ (下

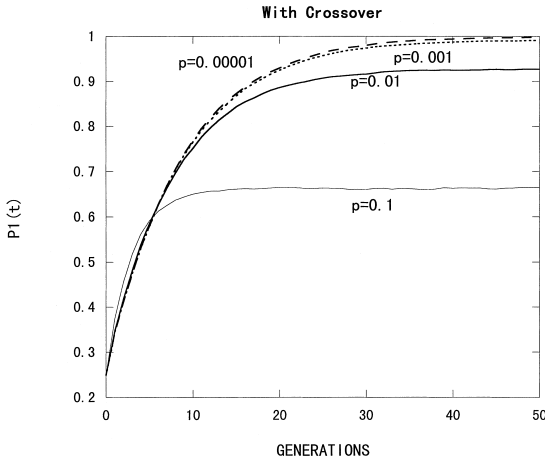


図 3 $P_1(t)$ の数値実験 (交叉あり)

Fig. 3 Numerical experiments for $P_1(t)$ with crossover.

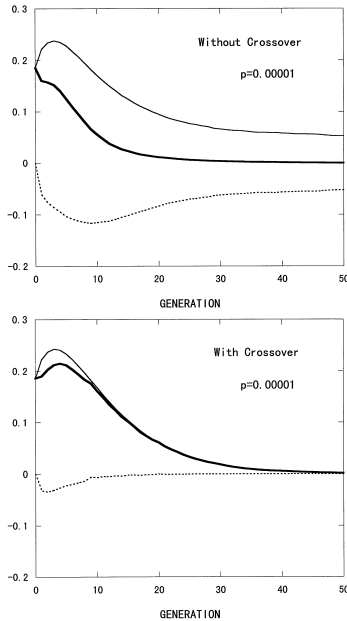


図 4 分散に及ぼす交叉の効果 ($p = 0.00001$)

Fig. 4 Effect of crossover on variances ($p = 0.00001$).

図)について示した. 各項をそれぞれ太い実線 (v_k), 細い実線 (v_k^a), 点線 (v_k^e) で表した. 交叉があると v_k の値が大きくなり, 式 (51) から進化が加速されることが分かる. 交叉がない場合, v_k^e が大きな負の値をとり, 結果的に v_k の値を小さくし, 進化が遅れてしまうことが分かる. 逆に交叉があると v_k^e の絶対値が小さくなり, 大きな v_k をもたらしめている.

対照的な結果を図 5 に示した. 強い突然変異 ($p = 0.1$) を用いた以外は図 4 とまったく同じ計算の結果である. 図 2 と図 3 を比較すると, 交叉の効果はほ

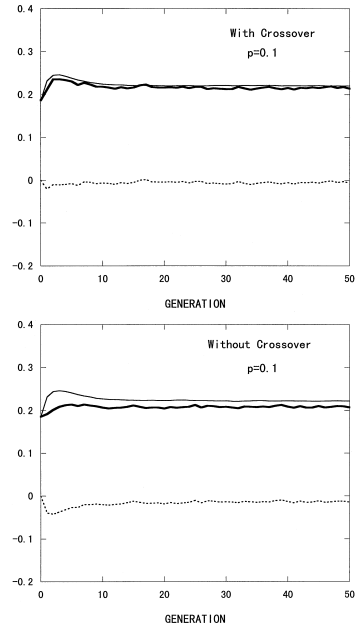


図 5 分散に及ぼす交叉の効果 ($p = 0.1$)

Fig. 5 Effect of crossover on variances ($p = 0.1$).

んど見られないが, この図からも交叉の効果が小さいことが分かる. それは, 交叉がなくても突然変異の効果ですでに v_k^e の絶対値が小さくなっているからである. しかし, この場合は突然変異の負の効果も大きく, 進化速度が計算例中で最も遅い.

7. おわりに

1 次のスキーマは最も基本的なスキーマであり, その振舞いを調べることから始めなければならない. 突然変異は 1 次のスキーマに対して直接の効果を持つが, 交叉は影響を与えない. しかし, 交叉の効果は選択を通じて間接的に現れる. また突然変異も同様に間接的な効果を与える.

選択による 1 次のスキーマに対する効果は式 (43) で表される. この式をすべての k について足し合わせ, One-Max 問題における平均適応度の式 (39) を用いると,

$$\Delta \bar{f}(t) = \bar{f}(t+1) - \bar{f}(t) = \frac{1}{\bar{f}(t)} \sum_k v_k(t)$$

となる. この式は Fisher の定理, 式 (11) によく似ている. 我々は One-Max 問題における分散 $\text{VAR}(f)$ の解析的な形を求めた¹⁰⁾. それによれば, 適応度の分散は

$$\text{VAR}(f) = V^a + V^e, \tag{53}$$

で与えられ, 式 (41) と対応させると,

$$V^a = \sum_{k=1}^{\ell} v_k^a, \quad (54)$$

$$V^e = \sum_{k=1}^{\ell} v_k^e. \quad (55)$$

となり, $\sum_k v_k = \text{VAR}(f)$ という対応をしている. したがって, 1 次のスキーマの進化方程式 (43) を k について足し合わせれば Fisher の定理が得られる. このことから進化方程式 (43) は, Fisher の定理のスキーマへの拡張になっていることが分かる. また, 分散 V^a はつねに正だが, 分散 V^e は正負いずれの符号もとりうることに注意してほしい. 交叉はつねに V^e の絶対値を減少させるので, $V^e < 0$ の場合は交叉により分散は増加する. また突然変異も同じ効果を持つ.

GA では解集団の分散は大きいほど良い, といわれている. このことは Fisher の定理から理解でき, 適応度の分散が大きいほど進化速度は速くなる. そして One-Max 問題では負の連鎖不均衡を生成するので, 結果的に交叉が遺伝にとって有益な遺伝的操作となる. このように交叉が有効になるためには, 連鎖不均衡が負になることが重要である. One-Max 問題のように, 適応度が各遺伝子座からの寄与の単純な和になる場合, 負の連鎖不均衡を生成することは 2 遺伝子座の場合に Felsenstein ら^{11),12)} によって示された. しかし, 任意の数の遺伝子座についての解析的な研究はまだないようである. 適応度関数の形から連鎖不均衡係数の符号が予測できれば, 交叉を適用するか否かの判断に非常に有益であり, 今後の研究の進展に期待したい.

突然変異は, よく指摘されるように進化にとって有害な働きをすることがある. しかし One-Max 問題の例では, とくに交叉がない場合, 有益な効果も及ぼす. この効果は, 進化を阻害する働きを持つ v_k^e の絶対値を小さくすることによりもたらされるが, 交叉も同じ効果を持つため, 交叉があると突然変異の有害な面のみ現れることになる. このように, 突然変異と交叉は互いに無関係ではなく, 両者を統一的に取り扱うことによってのみ, 2 つの遺伝的操作の役割を明らかにすることができる.

参考文献

1) Holland, J. H.: *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, MIT Press, Massachusetts (1992).

- 2) Altenberg, L.: *The Schema Theorem and Price's Theorem*, *Foundations of Genetic Algorithms 3*, Whitley, L.D. and Vose, M.D. (Eds.), pp.23–49 (1995).
- 3) Stephens, C. R. and Waelbroeck, H.: Effective degrees of freedom in genetic algorithms, *Physical Review E*, No.57, pp.3251–3264 (1998).
- 4) Stephens, C.R. and Waelbroeck, H.: Schemata evolution and building blocks, *Evolutionary Computation*, No.7, pp.109–124 (1999).
- 5) 古谷博史: Walsh 変換による突然変異と交叉に対するスキーマ定理の導出, *情報処理学会論文誌*, Vol.43, No.4, pp.1050–1060 (2002).
- 6) Maynard Smith, J.: *Evolutionary Genetics*, Oxford University Press, Oxford (1998).
- 7) Fisher, R.A.: *The Genetical Theory of Natural selection*, 2nd edition, Dover, New York (1958).
- 8) 古谷博史: 遺伝的アルゴリズムにおける交叉の Walsh 解析, *情報処理学会論文誌*, Vol.42, No.9, pp.2270–2283 (2001).
- 9) Vose, M.D.: *The Simple Genetic Algorithms*, MIT Press, Massachusetts (1999).
- 10) Furutani, H.: Study of Crossover in One Max Problem by Linkage Analysis, *Proc. Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO-2001)*, Spector, L., et al. (Eds.), Morgan Kaufmann, pp.320–327 (2001).
- 11) 古谷博史, 藤林由紀, 村田真知子: 遺伝的アルゴリズムにおける交叉の役割の連鎖解析, *情報処理学会研究会報告*, 2001-MPS-33, pp.53–56 (2001).
- 12) Felsenstein, J.: The Effect of Linkage on Directional Selection, *Genetics*, No.52, pp.349–363 (1965).

(平成 14 年 2 月 4 日受付)

(平成 14 年 4 月 24 日再受付)

(平成 14 年 5 月 28 日採録)



古谷 博史 (正会員)

昭和 26 年生. 昭和 49 年京都大学理学部卒業. 昭和 51 年同大学大学院理学研究科物理学第二専攻修士課程修了. 昭和 54 年同大学院博士課程単位修得退学. 昭和 56 年高知医科大学助手. 昭和 63 年同大学助教授. 医療情報システムの研究開発に従事. 平成 2 年より京都教育大学教授. 遺伝子情報システム, 遺伝的アルゴリズム等の研究に従事. 理学博士. 医療情報学会, ソフトウェア科学会各会員.