情報処理学会論文誌 Vol.55 No.3 1160–1166 (Mar. 2014)

テクニカルノート

集団AHPにおける一対比較行列推定法の提案

坂巻 英一[1,a)]

受付日 2013年9月22日, 採録日 2013年11月1日

概要：AHP（階層分析法）は人間の意思決定プロセスをモデル化する手法として 1980 年代以降，さかんに研究が行われてきた．ところが，先行研究を概観すると，多くの研究が個人の意思決定プロセスを対象としており，集団における意思決定に AHP を利用した研究はこれまでのところあまり行われていないのが現状である．一方，数少ない集団 AHP に関する先行研究の 1 つに，最適化問題に帰着させることで，集団における意思決定をモデル化した研究がある．本稿では先行研究において報告されている最適化問題を利用した集団 AHP モデル構築法の問題点について検討するとともに，先行研究モデルの改善提案を行うことを目的とする．あわせて，提案モデルを実データに適用することにより提案モデルの妥当性について検証する．

キーワード：AHP，集団的意思決定，震災復興，商品開発，パッケージデザイン

A Proposal of How to Estimate Pairwise Matrix of Group AHP

Yoshikazu Sakamaki[1,a)]

Received: September 22, 2013, Accepted: November 1, 2013

Abstract: AHP (Analytical Hierarchy Process) is studied as one of the most popular methods to model decision making process since 1980s. But most of the previous studies are focused on individual decision making and there are few studies focused on group decision making process. In this study, we review previous studies of AHP focused on group decision making and discuss about issues of them. Additionally, we propose how to improve algorithm of these model. We also apply our proposal to the development of product design in restoration business and confirm effectiveness of our proposal.

Keywords: AHP, group decision making, earthquake disaster reconstruction, product development, package design

1. はじめに

人間の意思決定プロセスのモデル化において，どの評価基準をどれだけ重視するか，を一対比較法と呼ばれる心理学的測定法を用いて算出し，意思決定者の意思決定プロセスをモデル化する AHP（Analytical Hierarchy Process, 階層分析法）と呼ばれるモデルに関する研究が 1980 年代以降さかんに行われており，現在，商品開発，都市開発から企業における人事評価に至るまで，様々な場面で利用されている [1], [2], [3].

一方，先行研究を概観すると，AHP は個人の意思決定プロセスをモデル化する場面ではさかんに研究されている反面，集団における意思決定プロセスのモデル化に関しては Saaty [4] の研究等が存在するものの，これまでのところ，ほとんど行われていないのが現状である．こうした中，集団 AHP に関する数少ない研究の 1 つとして，一対比較行列の評価値がとりうる値の上限値と下限値を区間設定し，最適化問題に帰着させたうえで評価値の最適解を推定する方法が 90 年代の後半に杉山らによって提案されたことがある [5]．さらに，2000 年代に入ると杉山らのモデルに不満関数と呼ばれる関数を組み込むことで評価値の推定精度を向上させる取り組みが山田らや八巻らによって行われるようになった [6], [7]．その後，杉山らが提案する方法に関

1 公立大学法人宮城大学事業構想学部
the School of Project Design, Miyagi University, Kurokawa, Miyagi 981–3271, Japan
a) sakamaki@myu.ac.jp

して，モデルの改良等，目新しい研究は行われていないのが現状である．

本研究では杉山らの研究を基礎とし，集団 AHP を最適化問題に帰着させる方法で解く際に生じるいくつかの問題点について考察するとともに，これらの問題点を改善するためのアルゴリズムを提案することを目的とする．

2. 先行研究の紹介

まず，AHP の概要について説明する．今，選択肢 n に対する i 番目の属性の評価値を z_{in} と書く．このとき，i 番目の属性の視点から見た基準となる選択肢 n に対する評価対象となる選択肢 m の満足度を，意思決定者に一対比較の形で評価してもらう．これを行列形式にまとめたものが式 (1) である．以後，意思決定者 k が i 番目の属性の視点から選択肢に対する一対比較を行うことで得られるデータを行列形式にまとめたものを一対比較行列と呼び $\mathbf{A}_{ik}$ と書くことにする．

$$\begin{array}{cc} & \text{基準となる選択肢} \\ \text{評価対象となる選択肢} & \begin{bmatrix} \frac{z_{i1}}{z_{i1}}, \frac{z_{i1}}{z_{i2}}, \cdots, \frac{z_{i1}}{z_{in}}, \cdots, \frac{z_{i1}}{z_{iN}} \\ \vdots \\ \frac{z_{im}}{z_{i1}}, \frac{z_{im}}{z_{i2}}, \cdots, \frac{z_{im}}{z_{in}}, \cdots, \frac{z_{im}}{z_{iN}} \\ \vdots \\ \frac{z_{iN}}{z_{i1}}, \frac{z_{iN}}{z_{i2}}, \cdots, \frac{z_{iN}}{z_{in}}, \cdots, \frac{z_{iN}}{z_{iN}} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{i11}, a_{i12}, \cdots, a_{i1n}, \cdots, a_{i1N} \\ \vdots \\ a_{im1}, a_{im2}, \cdots, a_{imn}, \cdots, a_{imN} \\ \vdots \\ a_{iN1}, a_{iN2}, \cdots, a_{iNn}, \cdots, a_{iNN} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{ik} \qquad (1)$$

ここで，一対比較行列に対し，行列の右側から選択肢 n に対する i 番目の属性についての部分効用 z_{in} を掛けてみる．

$$\begin{bmatrix} \frac{z_{i1}}{z_{i1}}, \frac{z_{i1}}{z_{i2}}, \cdots, \frac{z_{i1}}{z_{in}}, \cdots, \frac{z_{i1}}{z_{iN}} \\ \vdots \\ \frac{z_{in}}{z_{i1}}, \frac{z_{in}}{z_{i2}}, \cdots, \frac{z_{in}}{z_{in}}, \cdots, \frac{z_{in}}{z_{iN}} \\ \vdots \\ \frac{z_{iN}}{z_{i1}}, \frac{z_{iN}}{z_{i2}}, \cdots, \frac{z_{iN}}{z_{in}}, \cdots, \frac{z_{iN}}{z_{iN}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{i1} \\ \vdots \\ z_{in} \\ \vdots \\ z_{iN} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} z_{i1} \\ \vdots \\ z_{in} \\ \vdots \\ z_{iN} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

すると，一対比較行列における行列の分母がすべて消えてなくなり，計算した結果は部分効用 z_{in} のベクトルに選択肢の数 N を掛け合わせたものに等しくなる．このことから，選択肢の数 N が一対比較行列の固有値，選択肢に対する部分効用が一対比較行列の固有ベクトルと一致することが分かる．つまり，一対比較行列を作成したうえで，固有値，固有ベクトルを計算することにより，特定の属性の視点から見た選択肢に対する意思決定者の部分効用を計算することが可能になるのである．

この方法で，すべての属性の視点から選択肢の組合せを評価してもらい，意思決定者に一対比較行列を作成させたうえで，選択肢に対する部分効用を計算する．そして，部分効用に重みを掛けたうえで，選択肢に対する全体効用を計算する．

ここで一対比較行列の対角線にはすべて 1 が入る．これは，基準となる選択肢と同一の選択肢を評価対象の選択肢として比較しても，まったく同じ評価値になるはずだからである．作成された一対比較行列が，意思決定者の意思決定プロセスを正しく反映しているのであれば，属性 i の視点から評価された一対比較行列 $\mathbf{A}_i$ において

$$a_{imn} = \frac{1}{a_{inm}} \qquad (3)$$

が成り立つ．また，このとき，任意の選択肢 m，n に対し，

$$a_{imn} = \frac{z_{im}}{z_{in}} \qquad (4)$$

も同時に成り立つはずである．今，一対比較行列の評価値が式 (4) を満たすとき，一対比較行列の最大固有値を $\lambda_{\max}$ と書くならば，式 (2) から $\lambda_{\max} = N$ となることが分かる．また，フロベニウスの定理から，$\lambda_{\max} \geqq N$ がつねに成り立つことが知られており，一対比較行列が意思決定者の決定プロセスを正しく反映している場合にのみ，等号が成り立つことになる [8], [9]．

ここで，$\lambda_{\max} - N$ は一対比較行列の整合性からのずれの大きさを表しており，式 (5) は一対比較行列が意思決定者の決定プロセスをどの程度良く反映しているかを表す尺度となる．

$$C.I. = \frac{\lambda_{\max} - N}{N - 1} \qquad (5)$$

これは整合度（consistency index）と呼ばれており，頭文字をとって C.I. と書かれることが多い．C.I. が大きくなるほど不整合度は高いことになるが，Saaty は C.I. が 0.1 ないしは 0.15 以下であれば，一対比較行列は意思決定者の意思決定プロセスを正しく反映していると見なしてよいことを経験則に基づき示している．

こう考えると，最大固有値 $\lambda_{\max}$ は正の値をとる必要がある．この点に関し，行列の対角要素が対角線を挟んで互いに逆数の関係にある場合，その行列の最大固有値は必ず正の値をとることが先行研究において示されている [8]．つまり意思決定者によって作成された一対比較行列は，対角線を挟んだ対角成分が互いに逆数に近い関係にあることが望ましいことになる．こうした理由により，選択肢どうしの一対比較評価には，Saaty 以来，伝統的に**表 1** で示されるような評価点が使用されてきた [1]．つまり，意思決定者の意思決定プロセスが一対比較行列に正しく反映されているならば，各評価値と対角線を挟んで反対側の対角要素

表 1　一対比較行列で使用する評価値
Table 1 Evaluation Value used in the pairwise matrix.

意　味	評価尺度
同程度に満足	1
やや満足	3
かなり満足	5
非常に満足	7
極めて満足	9
あまり満足でない	1/3
それ程満足でない	1/5
殆ど満足でない	1/7
全く満足でない	1/9

には元の評価値の逆数が入ることを想定した評価が行われる．これは，基準となる選択肢と評価対象となる選択肢を入れ替える前と後とでは，選択肢のペアに対して，逆の満足度を得ることが想定されるためである．

こうして，選択肢に対する部分効用が行列演算によって，一対比較行列の固有ベクトルの形で算出されると，次に，部分効用 z_{in} に対する重み ω_i をどのようにして計算するか，が課題になる．実は，重み ω_i についても，属性どうしの一対比較を行うことで容易に求めることが可能である．ここでは，基準となる属性項目 i に対して，評価対象となる属性項目 j が選択肢に対する効用を決定するうえでどの程度重要であるか，を意思決定者に評価してもらう方法によりデータを収集する．そのうえで，選択肢に対する効用を算出した場合と同様の方法により，一対比較行列に対する固有値と固有ベクトルを算出することで得られる最大固有値に対する固有ベクトルが，各属性項目に対する重要度を表すことになる．この計算過程を式 (6) に示す．

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{基準となる属性項目} \\
\text{評価対象となる属性項目} &
\begin{bmatrix}
\frac{\omega_1}{\omega_1}, \frac{\omega_1}{\omega_2}, \cdots, \frac{\omega_1}{\omega_i}, \cdots, \frac{\omega_1}{\omega_I} \\
\vdots \\
\frac{\omega_j}{\omega_1}, \frac{\omega_j}{\omega_2}, \cdots, \frac{\omega_j}{\omega_i}, \cdots, \frac{\omega_j}{\omega_I} \\
\vdots \\
\frac{\omega_I}{\omega_1}, \frac{\omega_I}{\omega_2}, \cdots, \frac{\omega_I}{\omega_i}, \cdots, \frac{\omega_I}{\omega_I}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_i \\ \vdots \\ \omega_I \end{bmatrix}
= \lambda
\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_i \\ \vdots \\ \omega_I \end{bmatrix}
\end{array}
\qquad (6)
$$

こうして算出された属性項目に対する重要度を重みとして，部分効用の重み付け線型和を計算することにより，意思決定者が各選択肢に対して持つ全体効用を算出することが可能になる．これらの結果から，分析で使用する属性の数を I とした場合，$I+1$ 個の一対比較行列を作成し，固有値，固有ベクトルを計算することで，意思決定者の選択肢に対する全体効用を測定できることが分かる．

ここまで説明してきたように，Saaty によって提案された AHP は，1 人の意思決定者の意思決定プロセスをモデル化するうえで有効な手法であるといえる．ところが，商品開発や地域開発等，我々の社会における多くの意思決定は 1 人の意思決定者によって行われることはほとんどなく，多くの場合，集団によって行われるのが現状である．こうした点を考慮した場合，Saaty によって提案された AHP を集団に対しても適用できるように，モデルの改善を行う必要があると考えられる．先行研究を概観すると，AHP を集団に対して適用する方法として，

1. 集団の中で話し合いをしたうえで集団として 1 つの一対比較行列を作成する方法
2. 意思決定者 1 人 1 人に一対比較行列を作成してもらい，評価値の幾何平均をとることで一対比較行列を作成する方法

等が考案されてきた [4], [10]．これらの方法は集団全体としての選択肢への効用を把握することを容易にするため，実務において広く利用されてきたという経緯がある．

その後，杉山ら [5] は集団 AHP において，一対比較行列の評価値を最適化問題に帰着させることで解く方法を提案している．また，山田ら [6] は杉山らの研究を発展させ，一対比較行列に不満関数という概念を組み合わせたうえで，モデルの予測精度向上を目的とした研究を行っている．次章では，杉山らが提案するモデルの概要を説明する．

3. 杉山モデルの概要

前章で既述したように，杉山ら [5] は集団 AHP を最適化問題に帰着させることで，一対比較行列の評価値を推定する方法を提案している．ここで杉山らの提案モデルについて説明する．

今，N を意思決定者が選択可能な選択肢の数，$\lambda_{\max}$ を一対比較行列の最大固有値とする．このとき，式 (5) で与えられる指標が一対比較行列の整合度を表していることは，すでに述べたとおりである．杉山らはこの整合度を目的関数とし，以下のような制約条件を設定したうえで，目的関数を最小化するような一対比較行列の評価値を探し出すことで，集団に対する AHP を最適化問題に帰着させる手法を提案している．

[目的関数]

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - N}{N - 1} \qquad (7\text{-}1)$$

[制約条件]

$$\sum_{j=1}^{I} a_{jmn} z_{jn} = \lambda z_{in} \qquad (7\text{-}2)$$

$$a_{jmn} a_{jnm} = 1 \qquad (7\text{-}3)$$

$$z_{in} > 0 \qquad (7\text{-}4)$$

$$\sum_{i=1}^{I} z_{in} = 1 \qquad (7\text{-}5)$$

$$\tilde{l}_{jmn} \leq a_{jmn} \leq \tilde{u}_{jmn} \qquad (7\text{-}6)$$

ただし，制約条件式において，

a_{jmn}　意思決定者集団における属性項目 j の視点から見

た選択肢 n を基準とした場合の選択肢 m に対する評価値

z_{in} 属性項目 i の視点から見た意思決定者集団における選択肢 n に対する効用

$\tilde{l}_{jmn}$ 意思決定者集団における属性項目 j の視点から見た選択肢 n を基準とした場合の選択肢 m に対する効用のとりうる値の最小値

$\tilde{u}_{jmn}$ 意思決定者集団における属性項目 j の視点から見た選択肢 n を基準とした場合の選択肢 m に対する効用のとりうる値の最小値

である．

杉山らの提案する手法は，これらの制約条件の下で，集団 AHP を最適化問題に帰着させ，目的関数を最小化するような評価値を推定している点で，Saaty らが提案する手法と比較し柔軟性があると考えられる．一方で，杉山らのモデルには目的関数を最小化する過程で局所最適解に解が収束する危険性が指摘されており，一対比較行列の推定を行った結果，評価値に大きなばらつきが生じ，解が不安定になる可能性がある [6]．そこで，本研究では，杉山らの提案手法を基礎とし，集団 AHP における一対比較行列の要素を推定する方法の改善提案を行うことを試みる．

4. 本研究における提案モデル

3 章で既述したように，杉山らが提案するモデルを用いて一対比較行列の評価値を推定すると，解が一意に定まらず，推定結果に大きなばらつきが生じることが先行研究において問題点として指摘されてきた．こうしたばらつきが発生する原因として，

1. 杉山らのモデルでは一対比較行列の評価値がとりうる値の上下限値のみを制約条件としており評価値そのものの分布がモデル内で考慮されていない，
2. 一対比較行列ごとの整合度を目的関数としたモデルを構築しており，意思決定者の最終的な選択結果と一対比較行列の整合度がモデル内で結びついていない，

といった点が理由として考えられる．

そこで本稿ではこうした先行研究モデルにおける問題点を改善するためのモデルの改善提案を行う．

集団 AHP を考えた場合，一対比較行列が満たすべき究極的な条件は，一対比較行列から算出される選択肢に対する選択確率が，実際の集団における選択確率と一致していることではなかろうか．本研究では一対比較行列から算出される選択肢に対する選択確率が実際の選択肢に対する選択確率と一致するように評価値を決定するアルゴリズムを提案することにする．

本研究において提案する集団 AHP のアルゴリズムは以下のとおりである．

【STEP 1】解決すべき課題の設定

集団 AHP を利用して解決すべき課題を設定する．そのうえで，分析対象となる選択肢，ならびに，属性項目を決定する．

【STEP 2】調査票の作成ならびにデータの収集

【STEP 1】で決定した選択肢，ならびに，属性項目を用いて一対比較行列を作成する．そして，意思決定者に一対比較行列を提示し，選択肢どうし，ならびに，属性項目どうしの一対比較を行ってもらうことで調査データを収集する．ただし，一対比較行列の評価は表 1 で示した 9 段階の評価値を使用する．ここで作成された一対比較行列を $\mathbf{A}_{ik}$ $(i = 1, 2, \ldots, I,\ k = 1, 2, \ldots, K)$ とし，式 (8) のように記述することとする．ただし，i は属性項目番号，k は意思決定者番号である．

$$\mathbf{A}_{ik} = \begin{bmatrix} a_{ik11}, a_{ik12}, \cdots, a_{ik1n}, \cdots, a_{ik1N} \\ \vdots \\ a_{ikm1}, a_{ikm2}, \cdots, a_{ikmn}, \cdots, a_{ikmN} \\ \vdots \\ a_{ikN1}, a_{ikN2}, \cdots, a_{ikNn}, \cdots, a_{ikNN} \end{bmatrix} \tag{8}$$

同様に，属性項目どうしの一対比較により得られた行列を $\mathbf{B}_k$ とし，式 (9) のように記述する．ただし，i および j は属性項目番号である．

$$\mathbf{B}_{k} = \begin{bmatrix} b_{k11}, b_{k12}, \cdots, b_{k1i}, \cdots, b_{k1I} \\ \vdots \\ b_{kj1}, b_{kj2}, \cdots, b_{kji}, \cdots, b_{kjI} \\ \vdots \\ b_{kI1}, b_{kI2}, \cdots, b_{kIi}, \cdots, b_{kII} \end{bmatrix} \tag{9}$$

【STEP 3】選択肢に対する選択確率

意思決定者に選択肢群を提示し，実際に選択行動を起こすとした場合，どの選択肢を選択するか，を調査する．この結果を基に，それぞれの選択肢に対する集団の選択確率を式 (10) を基に計算する．

$$p'_n = \frac{d_n}{\sum_{n=1}^{N} d_n} \tag{10}$$

ただし，

n 選択肢番号（$n = 1, 2, \ldots, N$）

d_n すべての意思決定者のうち選択肢 n を選択した人数

である．

【STEP 4】一対比較行列における評価値の推定

ここで，属性項目 i の視点から評価した集団における選択肢どうしの一対比較行列を $\mathbf{X}_i$，属性項目どうしの一対比較行列を $\mathbf{W}$ と書くことにする．ただし，$\mathbf{X}_i$ と $\mathbf{W}$ は意思決定者の集団全体に共通の評価値からなる行列であり，集団全体で 1 つだけ作成されるものとする．

ここで，$\mathbf{X}_i$ の評価値 x_{imn} ならびに $\mathbf{W}$ の評価値 w_{ij} を以下の手順に従い推定する．

今，x_{imn} ならびに w_{ij} の初期値を一様乱数により決定する．次に，一対比較行列 $\mathbf{X}_i$ に関する固有ベクトル $\mathbf{Z}_i$，および $\mathbf{W}$ に関する固有ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を計算する．そのうえで，固有ベクトル $\mathbf{Z}_i$ を横に並べて行列 $\mathbf{Z}$ を作成すると式 (11) のような行列が得られる．

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{i1} & \cdots & z_{I1} \\ \vdots & & \vdots & & \\ z_{1n} & \cdots & z_{in} & \cdots & z_{In} \\ \vdots & & \vdots & & \\ z_{1N} & \cdots & z_{iN} & \cdots & z_{IN} \end{bmatrix} \tag{11}$$

また，属性項目どうしの一対比較行列 $\mathbf{W}$ から固有ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を算出すると式 (12) のようになる．

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \ \cdots \ \omega_i \ \cdots \ \omega_I]^T \tag{12}$$

さらに，行列 $\mathbf{Z}$ と固有ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を掛け合わせ，選択肢 n に対する集団の効用 u_n を算出する．

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{i1} & \cdots & z_{I1} \\ \vdots & & \vdots & & \\ z_{1n} & \cdots & z_{in} & \cdots & z_{In} \\ \vdots & & \vdots & & \\ z_{1N} & \cdots & z_{iN} & \cdots & z_{IN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_i \\ \vdots \\ \omega_I \end{bmatrix} \tag{13}$$

ここで選択肢 n に対する集団の選択確率を計算すると式 (14) のようになる．

$$p_n = \frac{u_n}{\sum_{n=1}^{N} u_n} \tag{14}$$

ただし，

n 選択肢番号（$n = 1, 2, \ldots, N$）

u_n AHP から算出される選択肢 n に対する効用

である．

ここで算出された選択肢に対する予想選択確率 p_n と【STEP 3】で算出された実際の選択確率 p'_n の差分をとり，式 (15) に基づき，差分の合計 dif_p を計算する．

$$dif_p = \sum_{n=1}^{N} (p'_n - p_n)^2 \tag{15}$$

式 (15) において dif_p がゼロに近ければ近いほど，予想選択確率 p_n は実際の選択確率 p'_n に近い値であることを意味している．ここで，dif_p が ε 以下であれば予想選択確率と実際の選択確率との間には差異がないと見なし，一様乱数により作られた一対比較行列を最終候補として残すことにする．すなわち，差分の合計 dif_p が

$$dif_p < \varepsilon \tag{16}$$

を満たすとき，一様乱数により作られた一対比較行列は実際の意思決定者の意思決定プロセスをよく反映していると見なす．本研究では式 (15) を目的関数とし，式 (16) を満たすような $\mathbf{X}_i$ の評価値 x_{imn} ならびに $\mathbf{W}$ の評価値 w_{ij} を最適化問題を解く方法で決定することにする．

【STEP 5】整合度評価

【STEP 4】で得られた一対比較行列の整合度を算出する．整合度の算出には式 (5) を使用し，先行研究に基づき，すべての一対比較行列の整合度が 0.15 未満の場合にのみ，一対比較行列のセットを最終候補として残すことにする．

【STEP 6】繰返し計算

【STEP 4】と【STEP 5】の計算を多数回実施し，最終候補となる一対比較行列の組合せを逐次記録してゆく．

【STEP 7】実際の評価値との差分の計算

AHP 階層モデルから算出される効用が実際の選択結果と一致し，なおかつ，整合度が十分に小さな値をとる一対比較行列を求めたとしても，これらの条件を満たす評価値の組合せが複数存在する可能性がある．そこで，次に，最終候補として残された集団における一対比較行列について，実際に個々の意思決定者が行った評価結果と乱数発生により与えられた評価値の差分 dif_{all} を式 (17) に基づき計算する．

$$\begin{aligned} dif_{all} = &\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}(a_{ikmn} - x_{imn})^2 \\ &+ \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(b_{kij} - w_{ij})^2 \end{aligned} \tag{17}$$

そのうえで，これらの差分の合計が最も小さくなる一対比較行列を集団における最終的な一対比較行列と見なす．

5. 提案手法の実データへの適用

本章では，4 章において提案したアルゴリズムを実データに適用することにより，提案モデルの妥当性を検証することを試みる．

【STEP 1】解決すべき課題の設定

東日本大震災以降，被災地における復興に向けた取り組みの 1 つとして，復興商品の開発があげられる．本研究では，「仙台駄菓子」を用いた復興商品開発プロジェクトにおいて，消費者が高い満足を感じる商品パッケージを集団 AHP を用いてデザインした結果を報告する．

【STEP 2】調査票の作成ならびにデータの収集

実験に使用した商品パッケージのデザインは 4 種類ある．これら 4 種類の「仙台駄菓子」のパッケージを本研究において選択肢として使用する．また，商品パッケージが持つ属性項目として，本研究では「書体の美しさ」「色合いの良さ」「文字の力強さ」の 3 つを使用した．本研究における実験使用した AHP 階層モデルは**図 1** のとおりである．また，実験の概要を以下に示す．

［実験概要］
実験実施時期　2012 年 10 月
被験者　　宮城県内居住者 96 名
実験方法　被験者に対し質問紙を提示したうえで，質問紙に対し評価値を記入させる方法によりデータを収集

【STEP 3】実際の選択結果に関する集計

ここで，各選択肢を実際に選択した回答者数を構成比率とともにまとめた結果を**表 2** に示す．

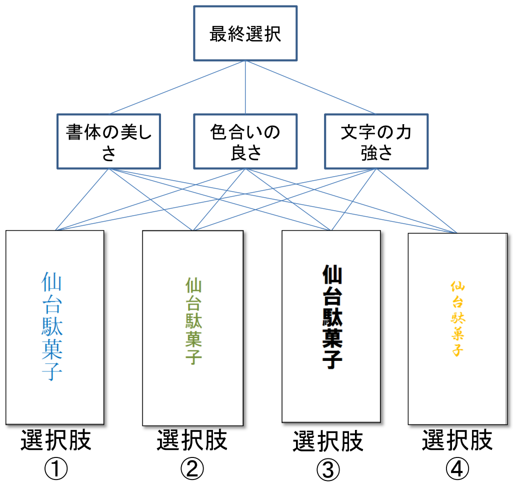

図 1　検証実験で使用した AHP 階層
Fig. 1　AHP model used in the verification experiment.

表 2　各選択肢を実際に選択した回答者数と構成比率
Table 2　Number of decision makers and percentage.

	選択肢①	選択肢②	選択肢③	選択肢④	合計
人　数	28	19	9	38	96
構成比率	29.8%	20.2%	9.6%	40.4%	100.0%

表 3　提案モデルから算出された固有ベクトル
Table 3　Eigen vector calculated by our model.

固有ベクトル	書体の美しさ	色合いの良さ	文字の力強さ	属性に対する重み
選択肢①	0.281	0.326	0.423	0.798
選択肢②	0.152	0.468	0.296	0.122
選択肢③	0.100	0.040	0.147	0.080
選択肢④	0.467	0.167	0.134	

表 4　選択肢に対する最終的な効用と選択確率
Table 4　Final utility and choice probability for each alternatives.

最終的な効用	効用	選択確率
選択肢①	0.298	0.298
選択肢②	0.202	0.202
選択肢③	0.096	0.096
選択肢④	0.404	0.404

【STEP 4】【STEP 5】【STEP 6】一対比較行列における評価値の推定

次に，4 章で示した方法に従い，最適化問題を解く方法により一対比較行列の評価値を決定する作業を繰り返し実施した．ただし，本研究では繰返し計算を 10,000 回実施している．そのうえで，最終候補となった一対比較行列の中から，実際の意思決定者集団の評価結果に最も近いものを最終的な一対比較行列として採用することにした．ただし，式 (16) における ε として本研究では 1×10^{-10} を使用している．また，最適化問題の解法には Newton 法を使用した．

【STEP 7】実際の評価値との差分の計算

最後に，最終候補として残された一対比較行列について，実際に個々の意思決定者が行った評価結果と乱数発生により与えられた評価値の差分 dif_{all} を式 (17) に基づき計算する．そのうえで，これらの差分の合計が最も小さくなる一対比較行列を一対比較行列の最終候補として採用する．本章における実験で採用された一対比較行列から算出された固有ベクトルを**表 3** に，また，固有ベクトルから算出された選択肢に対する効用，ならびに，選択確率を**表 4** にまとめて示す．

分析結果を基に各選択肢に対する最終的な効用，および，選択確率を算出した結果，すべての選択肢について，表 2 に示す実際の意思決定者の集団の選択確率と完全に一致していることが確認できる．

6.　先行研究モデルとの比較

ここで，本研究における比較対象モデルとして，杉山らのモデルに基づき，最適化問題に帰着させる形で一対比較行列の評価値を推定した結果を示す．本研究におけるアンケート調査では，すべての質問項目について，一対比較行列における評価値の最大値は 9，最小値は 1/9 であった．そこで，比較対象モデルでは，評価値のとりうる値の最大値をすべて 9 に，また，最小値をすべて 1/9 に設定したうえで，評価値の推定を行った．杉山らの提案モデルに基づき固有ベクトルを算出した結果を**表 5** に，また，4 つの選択肢すべてについて，最終的な効用を算出した結果を**表 6** に示す．

表 5　杉山らのモデルを用いて算出された固有ベクトル
Table 5　Eigen vector calculated by comparison model.

固有ベクトル	書体の美しさ	色合いの良さ	文字の力強さ	属性に対する重み
選択肢①	0.595	0.408	0.478	0.551
選択肢②	0.418	0.471	0.353	0.566
選択肢③	0.456	0.219	0.489	0.614
選択肢④	0.513	0.750	0.639	

表 6　杉山らのモデルを用いて算出された各選択肢に対する最終的な効用

Table 6　Utility and choice probability calculated by comparison model.

最終的な効用	効用	選択確率
選択肢①	0.852	0.255
選択肢②	0.714	0.214
選択肢③	0.675	0.202
選択肢④	1.099	0.329

比較対象モデルを用いて，各選択肢に対する効用を算出したところ，選択肢 ④ に対する効用が最も大きくなるという結論が得られたものの，各選択肢に対する選択確率は実際の選択結果とはかけ離れていることが分かる．これらの分析結果から，杉山らの提案するモデルと比較して本研究における提案モデルは，消費者の意思決定プロセスをモデル化するうえで有効であることが確認された．

7.　考察と今後の展望

本稿では集団に対する AHP を用いた意思決定モデル構築法に関する研究を行った結果を報告した．先行研究を概観すると，Saaty の提案以降，AHP は個人の意思決定プロセスをモデル化する場面を中心に研究が行われてきた．一方で，集団に対する意思決定プロセスをモデル化した研究はこれまでのところほとんど報告されていなかったのが現状である．AHP を集団の意思決定に応用した数少ない先行研究の 1 つとして，最適化問題に帰着させる方法で集団 AHP をモデル化した杉山らの研究があげられる．ところが，杉山らが提案するモデルには一対比較行列の評価値が一意に定まらないという問題があることが先行研究において指摘されていた．そこで，本研究では杉山らの提案モデルを基礎として，AHP を集団的意思決定に応用することを目的とした研究を実施した．

本研究における提案モデルの新規性として，一対比較行列から算出される選択肢に対する選択確率が実際の選択確率と一致するように評価値を決定し，また，個々の意思決定者による評価値とモデルが算出する集団における評価値の差分が最小になるような評価値の組合せを選択した点に新規性がある．

実際に，提案手法を東日本大震災における復興商品の開発に適用した結果，本研究における提案モデルは，杉山らのモデルと比較しても実際の消費者の選択肢に対する選択結果を非常に高い精度で予測しており，集団の意思決定プロセスを，AHP を用いてモデル化するうえで有効であることが示された．

本研究ではモデル構築用データ（in-sample-data）のみを用いた検証実験を行っている．この点に関して，構築されたモデルや提案手法の妥当性を評価する際には，検証用データ（out-of-sample-data）を用いたクロスバリデーションが行われることが多い．今回の実験ではクロスバリデーションまでは行えなかったので，提案手法の妥当性評価を今後の課題としたい．

本研究により得られた知見が AHP に関する研究を行っている方々の研究の一助となれば幸いである．

謝辞　本稿を執筆するにあたり，匿名で貴重なご意見をいただきました査読者の先生方にこの場をお借りして，心より御礼申し上げます．

参考文献

[1] Saaty, T.L.: *The Analytic Hierarcy Process*, McGraw-Hill (1980).

[2] 木下栄蔵，大屋隆生：戦略的意思決定手法 AHP，朝倉書店 (2007).

[3] 高萩栄一郎，中島信之：Excel で学ぶ AHP 入門—問題解決のための階層分析法，オーム社 (2005).

[4] Saaty, T.L.: Group decision making and the AHP, *The Analytic Hierarchy Process: Application and Studies*, Golden, B.L., Wasil, E.A. and Harker, P.T. (Eds.), pp.59–67, Berlin:Springer-Verlag (1989).

[5] 杉山　学，山田善靖，砂川雅彦：区間 AHP における整合度算出の提案，1995 年度日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会予稿集，pp.1136–1137 (1995).

[6] 山田善靖，杉山　学，八巻直一：合意形成モデルを用いたグループ AHP，*Journal of the Operations Research*, Vol.40, No.2, pp.236–244, オペレーションズリサーチ学会 (1996).

[7] 八巻直一, 杉山　学, 劉　曉東, 山田善靖：不満関数を用いる集団区間 AHP 法, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.45, No.3, pp.268–284, 公益社団法人日本オペレーションズ・リサーチ学会 (2002).

[8] Frobenius, F.G.: Über linear Substitutionen und bilineare Formen, *Journal für die reine und angewante Mathematik*, Vol.84, pp.1–63 (1878).

[9] Aupetit, B. and Genest, C.: On some useful properties of the Perron eigenvalue of a positive reciprocal matrix in the context of the analytic hierarchy process, *European Journal of Operational Research*, Vol.70, pp.263–268 (1993).

[10] Basak, I. and Saaty, T.L.: Group decision making using the analytic hierarchy process, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol.17, pp.101–109 (1993).

坂巻 英一　（正会員）

公立大学法人宮城大学事業構想学部．