

「後ろ向き推論」支援による 三角形合同証明問題のための学習システム

隠田亮介^{†1} 平井佑樹^{†1} 金子敬一^{†1}

人工知能を構築する手法の1つに「後ろ向き推論」がある。これは、ある命題や定理が与えられたとき、その命題の結論に着目して、それが成り立つための前提条件を明らかにする過程を繰り返すことによって命題や定理を証明しようとするものである。人間が三角形合同証明問題の学習時に行う推論方法としても重要であることが報告されており、学校教育においてもこの推論方法を活用できるようにすることが目指されている。本研究では、学習者が三角形合同証明問題を解く過程において、後ろ向き推論によって思考することを支援するシステムを開発し、その学習効果を測定することを目的とする。提案システムの学習効果を検証するため、公立中学校第2学年の生徒36人を被験者とした評価実験を行った。実験では、事前テストの成績によって実験参加者をA群とB群の2つのグループに分け、A群は本システムを利用して、B群は後ろ向き推論の支援機能を持たないシステムを利用して学習した。学習後、事後テストとアンケートを行った。仮説検定の結果、両群の事後テストの成績は、両群の事後テスト成績の上位層間においてA群の方が有意に良い成績を修めていることが分かった。一方で、後ろ向き推論の発現率には、両群間で有意な差はなく、同程度の発現であると認められた。

A Learning System for Providing the Congruence of Two Triangles by Supporting ‘Backward Chaining’

RYOSUKE ONDA^{†1} YUKI HIRAI^{†1} KEIICHI KANEKO^{†1}

Backward chaining is an inference rule to ascertain whether provided proposition is true or not, and it starts from proposition and clarifies postulates required to prove the proposition. Furthermore, it is possible for human beings to utilize the technique to prove some propositions, and it is aimed to utilize it in school curriculums. In this study, we have designed and implemented a system that supports learners to use backward chaining to solve proof problems about the congruence of two triangles. In addition, we have carried out an evaluation experiment in a public junior high school to measure the learning effect of the system. As a result of hypothesis tests, for students with good pre-test scores, the effect of the system was verified. On the other hand, significant increase of the number of occurrences of backward chaining of the experimental participants who used the system was not observed.

1. はじめに

平成25年度現在、三角形合同証明問題は、日本では中学校第2学年で学習する図形分野の単元の一つである。三角形の「合同」という概念自体は小学校第5学年で学習する。しかし、それは合同という言葉の意味や、合同な三角形の組に成り立つ性質の直観的な理解に過ぎず、演繹的にその関係を証明しようとする作業は、図形の問題に限らず、中学校に入って初めて学習する。中学校で学ぶ「証明」につながる学習として、生徒は小学生のうちから自分の考えを他者に「説明する」という活動を行っている。しかし、それに具体的根拠を付け加えて論理的に行う「証明する」という活動は、簡単に達成できる課題ではない。実際、文部科学省が毎年春に実施している全国学力・学習状況調査の報告書によると、演繹的な証明に係る問題の正答率は低い傾向にあることが伺える。例えば、平成19年度から同22年度調査結果までをまとめた資料[1]では、帰納的に正しいと予想できる命題を、文字を用いて証明する問題の正答

率が49.2%に留まり、解答欄が空欄であることを示す無回答率は36.1%に上っている。三角形合同証明問題を解く問題の正答率も48.2%に留まっており、同報告書において事柄が成り立つ理由を説明することに課題があるとしている。直近の平成25年度調査の報告書[2]には、中学校数学科図形分野の課題として、三角形合同証明問題の証明の方針を立てることが挙げられている。それに伴い、同調査の報告書では、授業において仮定と結論を整理しそれらをつなぎ合わせる活動を取り入れる必要があることを提言している。これらは以前の報告書においても度々課題として挙げられたもので、今日に至るまでなかなか解消されなかった。

人工知能を構築する手法の中に「前向き推論 (forward chaining)」と「後ろ向き推論 (backward chaining)」というものがある。どちらも、ある命題が与えられたときに、その命題の結論が正しいかどうかを確かめるための推論規則であり、探索の方向によってそれぞれの名前がつけられる。前向き推論とは、与えられた命題の仮定を元に、そこから演繹的に正しいことを明らかにする過程を繰り返し、結論へと結びつける推論規則である。後ろ向き推論とは、与えられた命題の結論を元にして、その条件が成立するための

^{†1} 東京農工大学
Tokyo University of Agriculture and Technology

前提条件を明らかにする過程を繰り返すことで、その結論の真偽を確かめる推論規則である。特に、仮定と結論が与えられている命題では、後ろ向き推論の結果、仮定が真であると判明したことをもって結論が真であることを証明する[3]。どちらの推論規則も、人工知能を用いて数学的な問題や定理を証明しようとするシステムに対して盛んに応用されている[4, 5, 6]。一方、両推論規則は人間が問題や定理を証明する場面の推論方法として利用することも考えられる。その場合の後ろ向き推論の特徴は、結論が真になるための前提条件となる「サブゴール」を見つけ出すことと捉えることができる[7, 8]。両調査から三角形合同証明問題において、「すべての生徒が、前向き推論の解答ストラテジーを所有していた」、「上手く問題を解決できた生徒は、解答中に後ろ向き推論の解答ストラテジーを利用していた」、「解決できなかった生徒には、後ろ向き推論の解答ストラテジーを利用しない生徒が多かった」ことが明らかになっている。ここでは、それぞれの推論規則を利用した問題解決における戦略を、ストラテジーと定義しており、本論文でもこれに従うこととする。両調査では、後ろ向き推論の解答ストラテジーの欠落が、問題解決の失敗に繋がっているとされており、今後生徒に対して後ろ向き推論による思考能力を開発していくことが課題になることを示唆している。

冒頭で述べたとおり、文部科学省は、三角形合同証明問題に取り組むにあたり、証明の方針を立てることが重要であると指摘している[2]。また、証明の方針を立てるためには、「(1) 結論を示すためには何が分かれば良いか」、「(2) 仮定からいえることは何か」、「(3) (1)と(2)を結びつけるには、あと何が言えればよいか」について考える場面を設定することが大切であるとしている。

文献[2]においては、授業時間内に教師と生徒間でのやり取りによって、こうした活動を取り上げ、育んでいくことを想定している。しかし、授業時間内でのやり取りでは、時間に制限があり、またすべての生徒が教師とのやり取りに参加できるとも限らない。そのため、授業中にそのやり取りを理解できなかった生徒が、授業の復習をする際には、新たに1人でストラテジーを考えなければならなくなる。そこで、本研究では、もし、家庭学習などの復習時間帯にこうした思考方法に取り組むことができれば、より高い教育効果が得られるのではないかと考えた。

本研究では、学習者が三角形合同証明問題を解く過程において、学習者が後ろ向き推論によって思考することを支援するシステムを構築し、それが与える学習効果を測定することを目的とする。

以下、本論文では、第2章で本研究と関連する研究およびシステムを紹介し、第3章で本研究において提案するシステムの概要および挙動について述べる。第4章で提案システムの評価実験概要と結果について述べ、第5章で提案システムについて検討を行う。第6章で本研究をまとめる。

2. 関連研究

伊藤[9]は、三角形合同証明問題に苦手意識のある人々が、これを容易に学習できるように支援するシステムを開発した。システムでは、「平行と角」、「合同証明」、「合同条件」の3つを学習できる。システムの特徴として、学習者がどのようなステップで証明を記述したのか、ログを取って調べることができる。しかし、あるところで解答が進まなくなった学習者に対して、システムは適切な支援を提供しない。自学自習用のシステムであれば、それ以上解答が進まなくなる学習者に対して適切な指導が必要不可欠である。

ネットレの学習室[10]は、三角形合同証明問題に限らず、中学校におけるいくつかの教科を Web ブラウザ上で学習することができるシステムである。学習者は、システム上のソフトウェアキーボードを使い、画面で空欄となっている箇所を埋めていくことで学習する。その入力が正しければ自動的に次の行に遷移、間違っていればその場で「答えが違う」とフィードバックされる。システムの特徴は、反復性とスモールステップの学習法にある。一方、システムが提供する問題は、システム側であらかじめ証明の組み立てがなされてから出題される。そのため、学習者はその与えられた証明構成に基づいて証明を進めるので、ただ1通りの証明構成しか学習することができない。

Advanced Geometry Tutor [11] (以下、AGT と表記する) は、三角形合同証明問題に対応した学習システムである。AGT の特徴は、学習者の能力レベルに基づいた Scaffolding ストラテジーを有している点である。そのストラテジーは大きくプロアクティブとリアクティブの2種類に分けることができる。プロアクティブ Scaffolding は、「成功したら支援を減らし、失敗したら支援を増やして統制する」という Wood らの理論[12]に基づいている。ここでは、学習者が解答のステップに正解すると能力レベルを増やし、間違えるとそれを減らして実現する。その上で、プロアクティブ Scaffolding では、学習者の能力レベルに合わせて、「Show-tell: 何をすべきか細かく教え3種類を使い分ける」、「Tell: どう考えるかを伝え、問題にどう適用するかを尋ねる」、「Prompt: 学習者の解答を促す」の3種類を使い分ける。一方、リアクティブ Scaffolding は、解答のステップが行われた直後に起こる。最初の間違いの後には、「もう一度」といった最小限のフィードバックを返す。その後の間違いに対しては、プロアクティブ Scaffolding 同様、前述の3種類の Scaffolding を使い分ける。AGT では、前向き推論で学んだ学習者の方が、後ろ向き推論で学んだ学習者よりも証明記述を上手くできたと結論づけている。その理由として、後ろ向き推論の学習者がサブゴールを設定することに困難があることを指摘している。しかしながら、AGT は、そのような学習者への支援機能を持っていない。すなわち、AGT は、先に述べた文献[2]の提言を踏まえておらず、学習

システムとしては問題が残る。

Reasoning control matrix for the proving process [13] (以下, RCM と表記する) は, 三角形合同証明問題の教授法として研究・開発された。学習者は, 三角形合同証明問題に取り組むに当たり, RCM の Section1 から Section6 に推論の過程を記入する。学習者が三角形合同証明問題を解くにあたり必要となる推論の段階をまとめることで学習する。実験は 15 歳の生徒を対象に行われ, RCM を利用した生徒は, そうでない生徒に比べて形式的な証明を書く能力が向上したと結論付けている。RCM は教授法の 1 つとして, このように証明手続きを整理することで, 証明記述能力の向上につながったとしている。しかし, RCM を利用して学習するには, 1 つの問題を解答するために 1 つ 1 つの空欄を埋めなければならないと, 大きな労力と時間を必要とする。そのため, 我慢強く学習に取り組める生徒に対しては効果を発揮するかもしれない。しかし, そうとは限らないすべての生徒に対してこの教授法が優れているかどうかは疑問である。

これらの関連研究を踏まえ, 本研究では「後ろ向き推論の支援を行う」, 「より汎用性の高い証明記述を可能にする」の 2 つの着眼点を据えることで関連研究の問題点の解決を図る。

3. システムの設計と実現

3.1 システムの概要

三角形合同証明問題を学習するのが中学校第 2 学年であることから, 本研究では, 第 2 学年修了までに学習する内容をシステムの対応範囲とした。この問題は, 中学校第 3 学年で学習する円周角の定理との相性も良く, 円と組み合わせられて出題されることもある。しかし, 上述の理由から, 円を利用する問題は対象外とし, 補助線を引くことで解決することができる問題も同様の理由から対象外とした。

三角形合同証明問題における証明記述のフォーマットは, いくつか存在する。本システムでは, このうち図 1 に示すような, 日本の教科書で多く利用されているフォーマットを採用した。図 1 に示す証明フォーマットでは 2~4, 7~8 行目において理由および式の 2 列で構成されている。5, 6 行目も理由と式のセットと見ることができると, この部分も含めて 2 列の表にまとめるフォーマットも考えられる[11, 14]。しかし, 本研究ではシステム実装でのスペースの都合上, 5, 6 行目は 2 列の中にも含めず, それぞれを 2 行に分ける形にした。以降, 理由を示した列を「理由列」, 式を示した列を「式列」, 同じ行の理由と式を合わせたものを「証明手順」と表記する。

ところで, 図 1 のフォーマットで証明する三角形合同証明問題では, 問題文によって, それを証明するために必要な解答の行数が変わる。これに着目すると, 今回取り上げる問題は, 結論とそれを証明するために必要な行数の関係において, 次の 3 つのパターンに分類することができる。

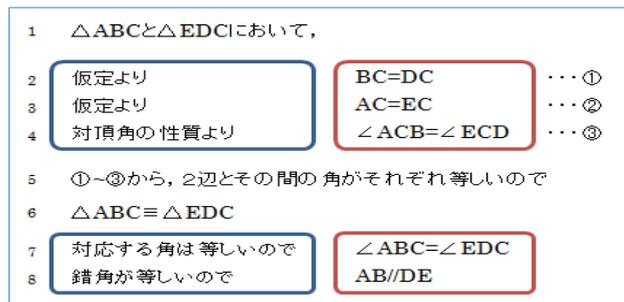


図 1 証明フォーマット

Figure 1 A form for mathematical proof.

- A) 三角形の合同が結論 : 6 行
- B) 合同な三角形の対応する辺や角の相等が結論 : 7 行
- C) 図形の性質を証明することが結論 : 8 行

以後, これらをそれぞれ「パターン A」, 「パターン B」, 「パターン C」と表記する。図 1 の場合を例にすると, この証明では「2 直線の平行」という図形の性質を結論としているため, 8 行で証明が可能であるパターン C に分類する。

三角形合同証明問題の解答記述方法は多岐にわたる。文部科学省は, 学習者が証明記述方法を習得するためには, 「自分の言葉で筋道を立てて説明できるようにすることが大切」だとしている[15]。これを達成するために, 本システムでは, 記述式による解答形式を取り入れる。この場合, 証明手順の順序等, 学習者の捉え方次第で証明の記述が変わることがある。その場合でも, 学習者自身が証明を構築することを考慮し, 学習者自身が捉えた三角形の表記でも正しく採点できるようにする。ただし, 本研究で対象とした中学生全員が, キーボードのタイピングに精通しているとは限らず, 理由の入力に当たって不必要に手間がかかる可能性がある。そこで, 記述式の解答入力は, 比較的簡単に入力できるアルファベットと数字のみに限定した。

プリントを利用して三角形合同証明問題を演習する場合, 長さの等しい辺や, 大きさの等しい角, 平行な直線などに印をつけることがある。従来のシステムにおいては, 問題図に初めから印がつけられているもの[9]や, 印づけを受け付けられないもの[10]が散見できる。その場合, 学習者は手元の紙に図を写すなどして印づけを行わなければならないと, 手間が多くかかってしまう。本システムにおいては, 演習中のこの作業をシステムのみで行えるよう, 紙面上での印づけを色づけによって代替できるようにする。

プリントを利用して三角形合同証明問題の演習をする際の学習者のつまずきの 1 つに, 問題において思考の対象とすべき三角形の組が見抜けがない場合がある。また, 対象とする三角形の組は見抜くことができても, 合同条件を適用するために必要となる等しい辺や角の組が思い浮かばない場合もある。本システムにおいては, コンピュータ

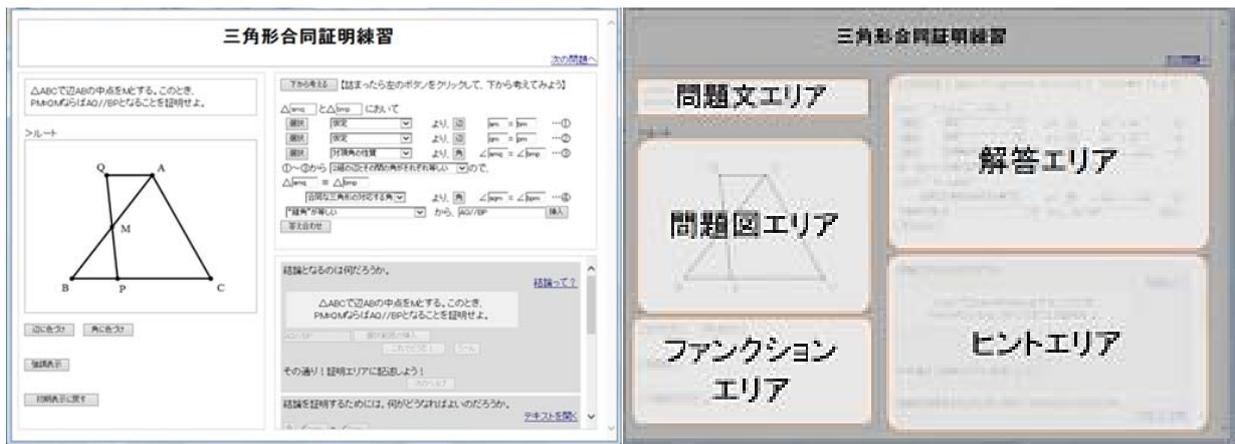


図 2 システムの概観

Figure 2 Overview of the proposed system.

を利用する利点を考え、問題の図の表示方法を変えることで学習者が問題の対象となる三角形、および等しい辺や角の位置関係を認知しやすくなるよう支援する。

プリントや問題集による自習では、学習者は、問題でつまづきがあったときに、教科書を見直すことがある。システムによる学習を考えると、そのような場合に学習者がシステムと教科書を往復する動作にはとても無駄が多い。本システムでは、問題の演習中にいつでも重要事項を確認することのできるテキストをシステム内に用意し、学習者がそれを確認しながら演習できるようにする。

3.2 学習の流れ

学習者がドリルのページを開くと、図 2 左のように問題文、および問題図が表示された状態となる。学習者はそれらを頼りに、図 3 に示す解答エリアの解答入力フォームに証明を入力する。本節では、問題「 $\triangle ABC$ で辺 AB の中点を M とする。辺 BC 上に点 P をとり、 $PM=QM$ となるように線分 PQ をとるとき、 $AQ//BP$ となることを証明せよ。」を例に、本システムで学習する際の流れを追って説明する。

(1) 着目する三角形

三角形の合同を利用して与えられた命題を証明するために、学習者はまず、着目する 2 つの三角形を定める。今回の問題であれば、 $\triangle AMQ$ と $\triangle BMP$ に着目すれば良い。学習者はこの情報を解答入力フォームの 1 行目に入力する。学習者が正しく入力すると、システムは自動的にそれを判断し、次の行への入力が可能となる。ここでの入力は、大文字と小文字の区別がない。また、「 $\triangle AMQ$ と $\triangle BMP$ 」を、「 $\triangle MQA$ と $\triangle MPB$ 」や「 $\triangle BMP$ と $\triangle AMQ$ 」と解答しても、システムはそれを正答と判断する。以降、辺の長さや角の大きさの式においても同様である。ただし、次行からの式の記述において、1 行目で左側に入力した三角形に関するものは左辺に入力する必要がある。

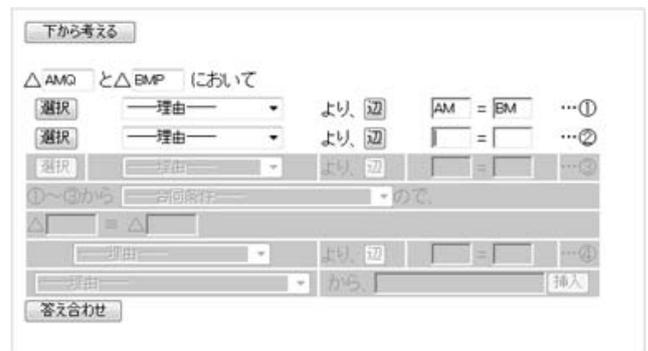


図 3 解答入力フォーム

Figure 3 The form for answering a question.

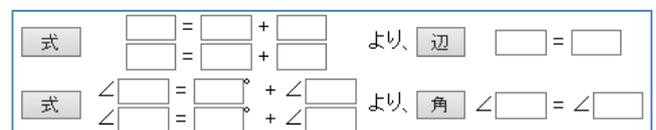


図 4 理由列の式入力モード

Figure 4 The mode for inputting some formulas.

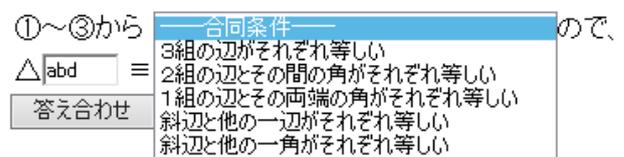


図 5 合同条件の入力

Figure 5 The form for selecting the congruent condition.

(2) 3 つの式と、3 つの理由

2 行目から 4 行目において、学習者は、合同条件を適用させるための式を立てる。各行の式は、式列の「=」を挟んで並べられたテキストボックスに入力する。式列の左側にはボタンがあり、入力の対象を「辺」と「角」で切り替えることができる。両者の間で誤入力が生じないように、辺入力モードでは 2 文字、角入力モードでは 3 文字までしか入力できない。学習者が式を正しく入力すると、システム

はそれを判断し、次の行への入力が可能となる。2 行目から 4 行目までの理由列の各行への入力は、「選択モード」と「式入力モード」に分けられる。両者は、理由列の左側にあるボタンによって切り替えることができる。「選択モード」では、当該行の等式の理由として、「仮定」や「対頂角の性質」といった、定理名等を入力する場合に用いる。「選択モード」では、プルダウンメニューによる選択式を採用した。一方、「式入力モード」では、当該行の等式の理由づけに、複数の式が必要である場合に用いる。式入力モードは、問題作成者が任意に設定した式のフォーマットに基づいて、学習者に入力を要求する（図 4 参照）。

(3) 合同条件

学習者は 5 行目に、合同条件をプルダウンメニューの選択式で入力する。その様子を図 5 に示す。

(4) 合同な図形の性質の利用

7 行目に、合同な図形の性質を利用して、辺の長さや角の大きさの式を記述する際には、理由列のプルダウンメニューから該当する理由を選択し、式列のテキストボックスに「3 つの式」と同様に式を入力する。この式が正しく入力されたことをシステムが判断すれば、次の行への入力が自動的に可能となる。

(5) 結論と、その理由

8 行目に、合同な図形の性質を利用して、平行等の図形の性質を結論として記述する場合には、理由列のプルダウンメニューから該当する理由を選択して入力する。結論となる式は、問題文中の記述をそのまま記述すればよい。

学習者は、解答入力フォームに解答の記述が完了したら、フォーム下部の「答え合わせ」ボタンをクリックする。その後、その場で採点結果についてフィードバックされ、証明に誤答が存在する場合には、システムが具体的にその部分を指摘する。解答入力フォームに空欄がある場合、システムがそれを指摘して解答を促す。システムが学習者の入力した解答を正答と判断した場合、学習者は、表示されるダイアログの「OK」ボタンをクリックすることで、次の問題へと進むことができる。

3.3 後ろ向き推論支援の流れ

後ろ向き推論の支援機能は、主にヒントエリアで行われる。学習者は、ヒントエリアにある「ヘルプの表示」ボタンをクリックすることで、システムが提供する後ろ向き推論ののりついたヒントを見ることができる。システムが学習者に提供するヒントは、最大で 7 段階存在する。

(1) 問題の結論を確認する

後ろ向き推論を実行するためには、まず学習者に問題の結論を正しく把握させる必要がある。そこで、システムはまず学習者に、問題文からその問題の結論を抜き出させる。

(2) サブゴールを明らかにする（パターン C のみ）

次に学習者は、問題の結論を証明するために必要となる命題（サブゴール）を把握する必要がある。例えば、前節

の問題においては、結論となる命題が「2 直線が平行である」ことである。システムは学習者に、この結論命題のサブゴールである「錯角が等しければ平行になる」という命題を、教科書機能を通じて把握させ、具体的に錯角が等しいことを表す式を入力させる。パターン A およびパターン B においては、この段階に当てはまるサブゴールが存在しないため、この段階は表示されない。

(3) 合同な三角形の組を見つける（パターン B, C のみ）

三角形合同証明問題として、与えられた問題を解決するために、着目すべき三角形の組を学習者に把握させる。パターン B およびパターン C の問題では、与えられた結論または段階 2 で定めたサブゴールを証明するために、それらに関連する三角形の組を見つけて抜き出させる。パターン A の問題では、もともと着目すべき三角形の組が与えられているため、この段階は表示されない。この場合、段階 1 の「問題の結論を確認する」でこれらを把握させる。

(4) 仮定から分かることを整理する

段階 1 から段階 3 までで明らかになった、合同を証明すべき三角形の組において、仮定から等しいと分かる辺や角がどこか明らかにさせ、学習者に入力させる。

(5) 現時点の条件から、考えられる合同条件を推理する

段階 4 までで明らかになっている条件を元に、現時点で考えられる合同条件を考えさせる。例えば、2 組の辺の長さが等しいと分かった場合、この時点で考えられる合同条件は、「三辺相等」もしくは「二辺夾角相等」の 2 つである。

(6) その合同条件を適用するために、必要な式を見つける

段階 5 で取り上げた合同条件を適用するためには、段階 4 で明らかにしたこと以外に、あとどの辺や角が等しいと分かれば良いのかを明らかにさせる。例えば、段階 5 の例において、「二辺夾角相等」を利用するためには、適切な位置の 1 組の角の大きさが等しいと言えればよい。それ以外の条件についても同様に考える。

(7) 教科書機能等を元に、考えさせる

段階 6 で明らかにした、辺や角の組を等しいと明らかにするため、教科書機能や強調表示機能の利用を促す。

各段階のヒントは、図 2 に示すようなボックスの形で表示される。このヒントボックスが学習者に求める入力は、チェックボックス、テキストボックス、ラジオボタンで構成されており、学習者は、ヒントボックスの記述を元に、入力を行う。入力の正誤判定の結果、正解すると、次の段階のヒントを得られる。失敗すると、システムはそれをダイアログとしてフィードバックし、解答の確認を促す。

ところで、後ろ向き推論の理論によれば、学習者は結論から順に思考することになる。すなわち、本システムで学習する学習者は、これらの機能によって、解答入力フォームにおける下段から順に解答を考える。この思考過程を印象付けるため、本システムは「下から考える」機能を搭載している。学習を始めた時点で学習者が操作するのは、図 3

のように解答入力フォームの上段から入力していく、「上から考える」状態である。一方で、「下から考える」機能に切り替えると、学習者は解答入力フォームの下段から順に入力できるようになり、結論を起点に考えるという後ろ向き推論の思考過程を、より鮮明に印象付けることが期待できる。両機能について、学習者は任意のタイミングでこれらを使い分けることができる。片方に限定しなかったのは、三角形合同証明問題を解決できた学習者の多くが、前向き推論と後ろ向き推論を使い分けていたという研究結果[7, 8]に基づく。さらに、「上から考える」機能で解答を入力中、学習者から一定時間、解答が認められなくなると、システムは「下から考える」機能を利用することを促す。

4. 評価実験

4.1 実験概要

学習者が三角形合同証明問題を解く過程において、本システムを利用することで、よりの確に証明手順を示すことができるようになるかどうかという学習効果をテストとアンケートによって検証した。公立中学校2年生の36人を対象とした。テストは筆記によって解答する問題を出题し、1つの証明手順に必要な式およびその理由づけが正しくできて各1点とした。すなわち、パターンAでは6点満点、パターンBでは8点満点、パターンCでは10点満点となる。本実験で用いるテストは、パターンAに属する問題を1問、パターンBに属する問題を2問、パターンCに属する問題を1問の計4問を出题するため、1回分のテストでは32点満点(6点×1, 8点×2, 10点×1)となる。

実験は、まず、事前テストを行い、その得点結果に基づいて、平均得点および分散がほぼ等しくなるように被験者を18人ずつA群、B群の2つに分けた。その後、A群の学習者は、本システムを利用して学習した。B群の学習者は前向き推論を支援するシステム(以下、「比較システム」と表記する)を利用して学習した。最後に事前テストや事後テストの点数を比較して、システムの有効性を検証した。

事前テスト実施時点で、学習者は三角形合同証明の基本を授業で学んでいる。しかし、学習者によって三角形合同証明問題の解決能力に差があると考えられる。そうした問題解決能力の違いを考慮するため、今後の評価において、A群またはB群を事前テストの成績順に人数の等しい3つの集団に分け、さらに細かく考察する。A群またはB群の成績上位6名で構成される学習者集団を、A群またはB群の高位層、成績下位6名の学習者集団を低位層、どちらにも属さない6名の学習者集団を中位層と呼ぶことにする。

なお、事前テストにおいて、A群の平均点は18.17点(標準偏差10.84)、B群は18.33点(標準偏差10.73)であった。Levene検定によって等分散性を仮定($p=0.97$)した後にt検定を行い、有意水準5%の下で両群の平均点に有意差があるといえない($p=0.96$)ことが認められた。また、高位

層、中位層、低位層に分割した際にも、一元配置分散分析やSteel-Dwassの多重比較を行い、高位層同士、中位層同士、低位層同士について、有意水準5%のもとで平均点に差があるとは言えないことが認められた。これらの検定結果から、事前テスト実施時点で、A群とB群はほぼ同じ成績分布であり、A・B群の高位層同士、中位層同士、低位層同士について、ほぼ同じ成績分布であることを確認した。

実験で行うテスト時間は、事前テスト、事後テスト共に20分間に設定した。1回のテストで出题する問題数は、テスト時間を考慮すれば3~4問程度が適当であると考えられる。教科書や問題集[16, 17, 18]を参考にし、「パターンAの基本的な問題」、「パターンBの基本的な問題」、「角の二等分線や垂線等、作図をテーマにしたパターンBの問題」、「2直線の平行を証明する、パターンCの基本的な問題」の4つの分類に基づいて問題を選出した。また、問題の難易度は、教科書の練習問題や章末問題のレベルに設定した。

実験で使用する教材は、本システムと比較システムである。両システムにおいて、学習者は同じ問題を、同じ順序で解くようにした。ここで学習する問題は、パターンA, B, Cの分類に基づいて、計10問を用意した。両システムには、色づけ機能、強調表示機能、教科書機能が実装されており、学習者は状況に応じてそれらを利用することができる。唯一の差異は支援の方法である。本システムでは後ろ向き推論を支援するために、前章で述べた通り学習を進める。一方、比較システムでは、前向き推論を支援するために、「下から考える」機能を有せず、システムが提供するヒントは前向き推論に基づいたものとなっている。

4.2 実験結果

表1に、各群における事後テスト得点を示す。総じてA群の平均点の方が高い結果となった。しかし、t検定によってこれらを比較したところ、有意水準5%のもとで有意差があると認められなかった。事後テスト実施時点において、両群の成績分布はおおよそ等しいことを確認した。

次に、各群内の成績別学習者集団での比較を行った。その結果を表2に示す。Levene検定の結果、有意水準5%のもとで、「各学習者集団の分散に違いがない」という帰無仮説を棄却した($p=0.00$)。各学習者集団が等分散であるとはみなせないため、Kruskal-Wallis検定によって、学習者集団間の成績の順位和のずれが有意であるかどうかを確認した。その結果、有意水準5%のもとで、「学習者集団間の成績の順位和に差がない」という帰無仮説は棄却された($p=0.00$)。そのため、学習者集団間の成績の順位和には有意に差があるといえる。また、どの学習者集団間の成績の母平均に差があるのかを調べるため、Steel-Dwassの多重比較を行った。その結果、有意水準5%のもとでA群の高位層とB群の高位層の間で有意差があることが認められた。よって、A群の高位層はB群の高位層に比べて良い成績を修めたといえる。一方、中位層間および、低位層間において有意差は認

表 1 事後テストの得点比較

Table 1 Comparing of the post-test results between group A and B.

問題 (満点)	A 群の平均値 (標準偏差)	B 群の平均値 (標準偏差)	p 値
問 1 (6)	4.11 (2.16)	3.61 (1.60)	0.45
問 2 (8)	5.06 (3.29)	4.78 (3.06)	0.80
問 3 (8)	5.00 (3.59)	4.89 (3.56)	0.93
問 4 (10)	3.94 (3.96)	3.78 (3.55)	0.90
合計 (32)	18.11 (11.50)	17.06 (9.55)	0.77

表 2 学習者集団ごとの得点比較

Table 2 Comparing of the post-test results among high-, middle-, or low-score participants of group A and those of group B.

学習者 集団	A 群の平均値 (標準偏差)	B 群の平均値 (標準偏差)	Steel-Dwass の多重 比較における p 値
高位層	30.00 (0.63)	24.83 (6.91)	0.046
中位層	21.00 (3.03)	20.17 (2.40)	0.99
低位層	3.33 (4.97)	6.17 (6.94)	0.93

表 3 事後テストにおける後ろ向き推論の発現率

Table 3 Usage ratio of the 'backward chaining' in the post-test.

問題	A 群の発現率 (発現数)	B 群の発現率 (発現数)	二群の比率の差の比 較における p 値
問 1	0.39 (7)	0.28 (5)	0.24
問 2	0.39 (7)	0.33 (6)	0.36
問 3	0.33 (6)	0.28 (5)	0.36
問 4	0.61 (11)	0.67 (12)	0.36

められず、両群の中位層同士、低位層同士の成績分布はほぼ等しいことを確認した。

最後に、学習者が事後テストの各問題を、どのようなストラテジーに基づいて解答したのか調査した。各問題に対して、解決のために考えられる思考手順を列挙し、筆者が文献[7]に倣ってそのそれぞれを前向き推論と後ろ向き推論の解答ストラテジーに分類した。アンケートにおいて被験者には、事後テストの解答中に実際に考えついた内容にチェックしてもらった。A 群と B 群において、後ろ向き推論ストラテジーがどれだけ発現したのかを表 3 に示す。問 1 から問 4 のすべてにおいて、A 群と B 群の間に有意水準 5% のもとで有意な差があるとは認められなかった。これにより、A 群と B 群の「後ろ向き推論」を用いた解答ストラテジーの発現は、同程度であったとみることができる。

5. 検討

評価実験の結果、A 群と B 群の間に有意な差が現れなかった。しかし、両群における成績別学習者集団ごとに評価すると、A 群と B 群の高位層間に有意な差が認められた。また、中位層間、低位層間には有意差が認められなかったものの、概観すると高位層、中位層、低位層の順に A 群の方が良い成績を修めたことも確かめられた。つまり、元々

成績上位に位置する学習者の方が、本システムの利用によってより高い効果を受けられたと考えられる。しかし、教育においては高位層のみに働きかければよいわけではなく、中位層や低位層を含めた学習者全体に対して同等の効果を発揮できる必要がある。すなわち、中位層や低位層に対していかに働きかけられるかが今後の重要な課題となる。では、なぜ高位層間以外に有意な差が見られなかったのか。その原因として考えられるものを本章で考察する。

(1) ヘルプの利用率

A 群 18 人のうち、後ろ向き推論支援機能を利用したと回答した生徒は 8 人 (高位層 3 人, 中位層 2 人, 低位層 3 人) に留まった。筆者が学習時間中に巡回している間も、生徒は支援機能を利用して解答を考えるより、あらゆる解答を入力してみるといったストラテジーに従っている光景が見て取れた。今回、推論の流れを意識させるために導入した「下から考える」機能および「上から考える」機能が、後ろ向き推論支援機能の利用を停滞させた可能性がある。

本来、この「下から考える」機能は、結論を起点にして考えるという後ろ向き推論ストラテジーを体得させるために導入した。しかし、この機能および「上から考える」機能における、解答入力可能行の遷移条件を「入力为正解だったら」としたために、学習者が様々な解答を入力して、正解を見つけるというストラテジーに従ってしまったと考えられる。そのため、入力の段階では、学習者に入力が正解かどうか、知らせないようにする必要がある。そうすることによって、学習者が、解答を考えるストラテジーに従うことが期待できる。その場合、学習者が問題解決に行き詰まると、何とかして正解しようと、後ろ向き推論支援機能を利用した可能性がある。

(2) 出題範囲および難易度

事後テストの各問題において、後ろ向き推論ストラテジーの発現と獲得点数の間に相関があるかどうか調べたところ、問 2~問 4 において、有意水準 5% のもと両者間に有意な正の相関があることが明らかになった (問 1 : $r=0.33$, $p=0.06$, 問 2 : $r=0.38$, $p=0.02$, 問 3 : $r=0.47$, $p=0.02$, 問 4 : $r=0.54$, $p=0.00$ (p は無相関検定の有意確率))。結果を見ると、問題が複雑になればなるほど後ろ向き推論ストラテジーの発現が、問題解決のために重要であると考えられる。

しかしながら、本実験においては、実験協力校の授業進捗の関係もあり、三角形合同証明問題の基本的な問題しか扱うことができなかった。円周角の定理や補助線を利用して解く問題等、出題範囲を広くして、あらゆる難易度の問題に対して調査を行うと、より後ろ向き推論の重要性が増し、システムによる高い効果が得られた可能性がある。

(3) 利用時間および期間の短さ

本実験における学習時間は、30 分間であった。その時間中に何問解くことができたか質問したところ、被験者が解答した問題数の平均は 4.8 問であり、パターン A から C ま

での問題をそれぞれ1問程度しか取り組めていなかったことが分かった。学校での授業で既にある程度形成された、三角形合同証明問題の解決ストラテジーを再構築するためには、十分な時間と継続的な学習が必要であると考えられ、今回の実験では十分に後ろ向き推論ストラテジーの訓練を積むことができなかったと考えられる。そのため、利用時間もさることながら、後ろ向き推論の解決ストラテジーに触れる機会を継続的に取ることで改善される可能性がある。

(4) 生徒の状況を考慮したヘルプ

学習者が後ろ向き推論支援機能を有効に活用できなかった原因の1つとして、学習者が自身の状況に応じた支援を受けられなかった可能性がある。本実験における後ろ向き推論支援のアルゴリズムは、どの学習者に対しても1通りであった。しかし、学習者の推論ストラテジーは多様であり、推論過程中的つまづきの種類も多岐にわたると考えられる。そのため、学習者の状況を加味した支援を提供することができれば、学習者は支援機能をより有効に活用できた可能性がある。例えば、解答入力の状態を考慮して、提供する支援を切り替えるなどのアルゴリズムを導入することによって、この課題に対応することができると考える。

また、高位層以外に有意な差が現れなかった原因としては、支援機能の記述や表現が、学習者に伝わりにくかった可能性もある。新たな問題解決ストラテジーを身に付けるために、より支援を細分化したり、記述を簡単な表現にしたり、推論過程をフローチャートなどによって視覚化したりといった、分かりやすい支援のためのさらなる工夫も必要であると考えられる。

6. おわりに

本研究では、学習者が三角形合同証明問題を解く際に、その解決に対して有効だとされている、後ろ向き推論の思考方法を支援するシステムを開発した。また、学習者の三角形合同証明問題に対する学習を支援するため、問題図への色づけ機能、強調表示機能、教科書機能を導入した。

本研究で開発した後ろ向き推論を支援する三角形合同証明問題の学習システムを利用するA群と、前向き推論を支援する学習システムを利用するB群との比較を行うため評価実験を行った。評価実験は公立中学校の2年生、36人を対象として行った。その結果、A群とB群の成績高位層間において、A群の高位層の方が有意に良い成績を修めたことが認められた。その一方、A群とB群に発現した後ろ向き推論ストラテジーの割合には有意な差がなく、A群とB群ともに、同程度の学習者が後ろ向き推論ストラテジーを利用したことが分かった。

今後の課題は、後ろ向き推論支援機能の改善、教師による問題作成支援のためのデータベースの導入、対応範囲の拡張、自動採点機能の改善が挙げられる。

謝辞 本研究で実施した評価実験に参加いただいた、東京農工大学降旗信一准教授、および実験協力校の教職員と生徒の皆様に感謝いたします。

参考文献

- 1) 文部科学省国立教育政策研究所: 全国学力・学習状況調査の4年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ～自動生徒への学習指導の改善・充実に向けて～(中学校編), 教育出版(2012).
- 2) 文部科学省国立教育政策研究所: 平成25年度全国学力・学習状況調査報告書(2013).
- 3) IT用語辞典バイナリ, ウェブリオ株式会社, (オンライン). Available: <http://www.sophia-it.com/content/%E5%BE%8C%E3%82%8D%E5%90%91%E3%81%8D%E6%8E%A8%E8%AB%96>. [アクセス日: 28 12 2013].
- 4) Matsuda, N. and VanLehn, K.: GRAMY: A Geometry Theorem Prover Capable of Construction, *Journal of Automated Reasoning*, Vol. 32, No. 1, pp. 3-33, 2004.
- 5) Wilson, S. and Fleuriot, J. D.: Combining Dynamic Geometry, Automated Geometry Theorem Proving and Diagrammatic Proofs, *Proc. of the European Joint Conferences on Theory and Practice of Software Satellite Workshop on User Interfaces for Theorem Provers* (2005).
- 6) Chou, S.-C., Gao, X.-S., and Zhang, J.-Z.: Automated Generation of Readable Proofs with Geometric Invariants. II. Theorem Proving with Full-Angles, *Journal of Automated Reasoning*, Vol. 17, pp. 325-347 (1996).
- 7) 狩俣智: ACTによる中学生の問題解決研究, 琉球大学教育学部教育実践研究指導センター紀要, No. 3, pp. 1-11 (1995).
- 8) 牧野智彦: 中学校数学での証明の「架橋過程」における生徒の認知的困難点, *日本科学教育学会研究報告*, Vol. 26, No. 5, pp. 25-30 (2012).
- 9) 伊藤哲也: 三角形の合同の証明問題の支援システム, 東京農工大学工学部卒業論文(2002).
- 10) 大屋門戸: ネットレの学習教室(オンライン). Available: <http://netlessonlab.com/>. [アクセス日: 12/12/2013].
- 11) Matsuda, N. and VanLehn, K.: Advanced Geometry Tutor: An Intelligent Tutor that Teaches Proof-writing with Construction, *Proceedings of the 12th International Conference on Artificial Intelligence in Education*, pp. 443-450 (2005).
- 12) Wood, D., Wood H., and Middleton, D.: An Experimental Evaluation of Four Face-to-Face Teaching Strategies, *International Journal of Behavioral Development*, Vol. 1, No. 2, pp. 131-147 (1978).
- 13) Dimakos, G., Nikolusdakis, E., Ferentinos, S., and Choustoulakis, E.: Developing a Proof-writing Tool for Novice Lyceum Geometry Students, *The Teaching of Mathematics*, Vol. 10, No. 2, pp. 87-106 (2007).
- 14) Wong, W.-K., Yin, S.-K., Yang H.-H., et al.: Using Computer-Assisted Multiple Representation in Learning Geometry Proofs, *Educational Technology & Society*, Vol. 14, No. 3, pp. 43-54 (2011).
- 15) 文部科学省: 中学校学習指導要領解説数学編, 教育出版(2008).
- 16) 岡本和夫, 小関照純, 森杉馨, 佐々木武: 未来へ広がる数学2, 啓林館(2013).
- 17) 藤井齊亮, 俣野博: 新しい数学2, 東京書籍(2013).
- 18) 中学校数学学習サイト(オンライン). Available: <http://math.005net.com/mondai.php>. [アクセス日: 12/12/2013].