Vol.2014-AL-147 No.3
2014/3/3

辺容量付き電力需給ネットワーク

丸田　真平[1,a)]　西関 隆夫[1,b)]

概要： 辺容量付き電力需給ネットワークはグラフ G で表現できる．G の各点は供給点あるいは需要点であり，供給量あるいは需要量が割当てられており，各辺には辺容量が割当てられている．定常ネットワークでは，すべての供給量，需要量および辺容量が非負の定数である．一方，パラメトリックネットワークでは，供給量，需要量および辺容量は変数 λ の関数である．各需要点は，丁度一つの供給点からグラフ G の辺を通してその需要量だけの "電力" を受け取りたい．一方，各供給点は，いくつかの需要点へ G の辺を通して "電力" を送ることができるが，送る電力の合計はその供給量以下である．このとき，グラフ G をいくつかの連結成分に分割し，各成分に供給点が丁度 1 つ含まれ，その供給点からその成分内の各需要点へその需要量だけのフローを流し，しかも各辺の電力フローはその容量以下であるようにしたい．このような G の分割を求める問題が分割問題である．もし G がこのような分割を持たないならば，すべての需要量を一様に $r(0 \leq r < 1)$ 倍に減少させ，G がそのような分割を持つようにできる r の最大値 r^* を求めたい．最大供給率問題は，この r^* を計算する問題である．本論文では，木であるグラフ G を取り扱い，はじめに定常木ネットワークに対する最大供給率を計算する多項式時間アルゴリズムを与える．次に，パラメトリック木ネットワークの分割問題に対するアルゴリズムを与える．すべての供給量，需要量および辺容量が変数 λ の区分的線形関数であるとき，そのアルゴリズムの計算時間は擬多項式である．

キーワード：アルゴリズム，グラフ，木，パラメトリックネットワーク，電力需給

Parametric Power Supply Networks with Edge-Capacities

Abstract: Suppose that each vertex of a graph G is either a supply vertex or a demand vertex and is assigned a supply or a demand and that each edge of G is assigned a capacity. All demands, supplies and capacities are nonnegative constant numbers in a steady network, while they are functions of a variable λ in a parametric network. Each demand vertex should receive an amount of "power" equal to the demand from exactly one supply vertex through edges in G. On the other hand, each supply vertex can supply "power" to some demand vertices, but the total amount should not exceed the supply. One thus wishes to partition G to connected components by deleting edges from G so that each component has exactly one supply vertex whose supply is at least the sum of demands in the component and the flow through each edge does not exceed the capacity. The "partition problem" asks whether G has such a partition. If G has no such partition, one wishes to find the maximum number r^*, $0 \leq r^* < 1$, such that G has such a partition when every demand is reduced to r^* times the original demand. The "maximum supply rate problem" asks to compute r^*. In this paper, we deal with a network in which G is a tree, and first give a polynomial-time algorithm for the maximum supply rate problem for a steady tree network, and then give an algorithm for the partition problem on a parametric tree network, which takes pseudo-polynomial time if all the supplies, demands and edge-capacities are piecewise linear functions of λ.

Keywords: Algorithm, Graph, Tree, Parametric network, Power supply

[1] 関西学院大学
理工学部　情報科学学科
〒 669-1337
三田市学園 2-1
[a)] auf10083@kwansei.ac.jp
[b)] nishi@kwansei.ac.jp

1. まえがき

辺容量付き電力需給ネットワークはグラフ G で表現できる．G の各点は供給点あるいは需要点であり，供給量あるいは需要量が割当てられており，各辺には容量が割当て

ⓒ 2014 Information Processing Society of Japan

られている．供給点 v の供給量を s_v と表し，需要点 v の需要量を d_v と表し，辺 e の容量を c_e と表す．定常ネットワークでは，供給量，需要量および辺容量がすべて非負の整定数である．一方，パラメトリックネットワークでは，供給量，需要量および辺容量は，時刻，気温，原油価格などを変数 λ とする関数である [1,2,6,7,8,9]．このとき供給点 v の供給量を $s_v(\lambda)$ と表し，需要点 v の需要量を $d_v(\lambda)$ と表し，辺 e の容量を $c_e(\lambda)$ と表す．図 1 の定常木ネットワークにおいて，供給点は正方形で，需要点は円で描かれており，供給量や需要量はその内側に書かれており，辺は直線分で描かれており，辺にその容量が付けられている．図 2(a) はパラメトリックネットワークを表しており，その定数でない需要量 $d_{v_3}(\lambda)$, $d_{v_4}(\lambda)$ および辺 $e = (v_3, v_5)$ の容量 $c_e(\lambda)$ は図 2(b) に描かれている．

各需要点 v は，丁度 d_v だけの “電力” を一つの供給点からグラフ G の辺を通して受け取りたい．一方，各供給点 v は G の辺を通していくつかの需要点へ “電力” を送ることができるが，送る電力の合計はその供給量 s_v 以下でなければならない．このとき，グラフ G から何本か辺を除去して G をいくつかの連結成分に分割して，各成分には供給点が丁度 1 つ含まれ，その供給点からその成分内の各需要点へその需要量だけのフローを流し，しかも各辺を流れる電力量はその容量以下であるようにしたい．（除去された辺にはフローは流れない．）このような分割はグラフ G の**許容分割**と呼ばれている [3,7]．**分割問題**は与えられたグラフ G に許容分割があるかどうかを問う．もし G が許容分割を持たないならば，$0 \le r < 1$ なる実数 r を用い，すべての需要量 d_v を一様に r 倍に減少させ，新しい需要量を $d'_v = r \cdot d_v$ とした時に，G に許容分割があるようにできる r の最大値 r^* を見つけたい．この r^* を**最大供給率**と呼び，r^* を計算する問題を**最大供給率問題**と呼ぶ [7]．

図 1(a) の木 T には許容分割がなく，T の最大供給率 r^* は 3/7 である．T の各需要量を新たに $d'_v = (3/7) \cdot d_v$ にした新しい木を図 1(b) に示す．新しい木の許容分割は図 1(b) で点線で表されている．各辺に付けられた括弧の中の数字は，その辺を流れるフローの値である．

分割問題は定常直並列ネットワークに対してすら NP 完全であるので [4]，最大供給率問題は定常直並列ネットワークに対してすら NP 困難である．したがって，どちらの問題も，定常直並列ネットワークに対してすら多項式時間で解くことができそうもない．しかし，定常木ネットワークに対しては，分割問題は，辺容量がない場合 [4] および辺容量がある場合 [5] のどちらでも線形時間で解くことができる．一方，辺容量がないならば，定常木ネットワークの，最大供給率問題が多項式時間で解け，パラメトリック木ネットワークの分割問題が擬多項式時間で解くことができる [7]．

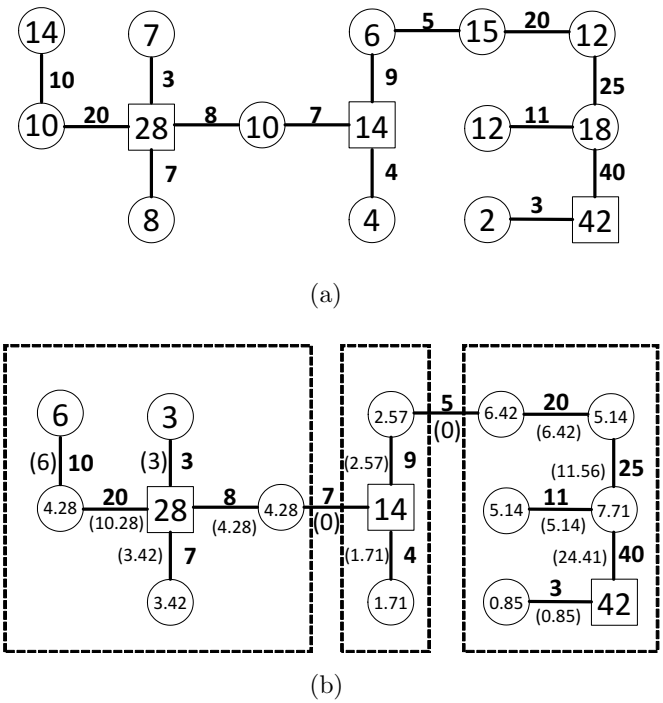

図 1 (a) 許容分割のない辺容量付き木ネットワーク T，(b) 最大供給率 $r^* = 3/7$ の新しいネットワークとその許容分割

本文では，まず文献 [7] のアルゴリズムを拡張して，辺容量があっても定常木ネットワークの最大供給率問題が多項式時間で解けることを示す．n を T の点数とし，L を T の対数サイズとすると，そのアルゴリズムの計算時間は $O(nL)$ である．次に，辺容量付きパラメトリック木ネットワークに対する分割問題を解くアルゴリズムを与える．供給量，需要量および辺容量が整数係数を持つ区分的線形関数であるとき，そのアルゴリズムの計算時間は擬多項式である．より正確に言うと，すべての需要量，供給量および辺容量の整数係数の絶対値の合計を W とすると，そのアルゴリズムの計算時間は $O(nW^2)$ である．

2. 定常木ネットワークの最大供給率問題

この節では，辺容量付き定常木ネットワークの最大供給率問題が多項式時間で解けることを示す．

$T = (V, E)$ を辺容量付き定常木ネットワークとする．V は木 T の点集合であり，E は T の辺集合である．すべての供給点からなる集合を V_{s} とし，すべての需要点からなる集合を V_{d} とする．無論，$V = V_{\mathrm{s}} \cup V_{\mathrm{d}}$ であり，$V_{\mathrm{s}} \cap V_{\mathrm{d}} = \emptyset$ である．$n = |V|$，$n_{\mathrm{s}} = |V_{\mathrm{s}}|$ とする．木 T の**許容分割**とは，T の点集合 V の分割 $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{n_{\mathrm{s}}}$ で，$1 \le i \le n_{\mathrm{s}}$ なる各 i について次の (a) − (c) を満足するものである．

(a) V_i は T の連結部分グラフ，即ち部分木 T_i を誘導する．

(b) V_i は丁度 1 つの供給点 u を含み，$\sum_{x \in V_i/\{u\}} d_x \le s_u$ である．

(c) 部分木 T_i の各辺 $e = (v, w)$ を流れるフローの値 ψ_e は e の容量 c_e 以下である．即ち $\psi_e \le c_e$ である．なお，

$\psi_e = \sum_{x \in \mathrm{Des}(w)} d_x$ である．ただし，部分木 T_i を供給点 u を根とする根付き木とみなしたときに辺 e の端点 v が端点 w の親であるとき，T_i で点 w の子孫すべてからなる集合が $\mathrm{Des}(w)$ である．

分割問題は，与えられた木 T の許容分割を見つける問題である．辺容量付き定常木ネットワークに対する分割問題を $O(n)$ 時間で解くアルゴリズムは既に知られている [5]．そのアルゴリズムを **Partition** と呼ぶ．このアルゴリズム **Partition** を繰り返し用いて，最大供給率問題を解くアルゴリズムを与える．

木 T の**最大供給率問題**は，すべての需要点 v の需要量 d_v を新しい需要量 $d'_v = r \cdot d_v$ に置き換えたとき，T に許容分割があるようにできる r の最大値を求める問題である．そのような r の最大値 r^* は T の**最大供給率**と呼ばれる．r^* は 1 よりも大きいかもしれない．$r^* \leq 1$ であるとき，$1 - r^*$ は T の**最小節電率**と呼ばれている．

明らかに次の補題が成り立つ．

補題 1. r は任意の非負実数とする．木 T のすべての需要量 d_v を $d'_v = r \cdot d_v$ に置き換えたとき許容分割が存在するならば，$0 \leq r' \leq r$ なる任意の実数 r' に対して，すべての需要量 d_v を $d'_v = r' \cdot d_v$ に置き換えたとき，T に許容分割が存在する．

したがって，アルゴリズム **Partition** を用い，二分探索で r^* が計算できる．しかし，すべての非負実数集合上の二分探索で，最大供給率 r^* を計算しようとすると，r^* は正確に求まらないか，あるいは多項式時間で計算が終了しない．本文のアルゴリズムのアイディアは，r^* が有理数であることに注意することである．

補題 2. $T = (V, E)$ は定常木ネットワークであるとき，$S = \prod_{v \in V_\mathrm{s}} s_v$，$D = \sum_{v \in V_\mathrm{d}} d_v$，$C = \prod_{e \in E} c_e$ とすると，T の最大供給率 r^* は

$$r^* \in \{C \cdot S/z \mid \text{z は整数であり}, C \cdot D \cdot S \geq z \geq 0\}$$

である．

証明 r^* は T の最大供給率であるとする．このとき点集合 V は部分集合 $V_1, V_2, \cdots, V_{n_\mathrm{s}}$ に分割でき，$1 \leq i \leq n_s$ なる各 i について V_i は木 G の部分木 T_i を誘導し，V_i には丁度 1 つの供給点 u があり，$\sum_{v \in V_i/\{u\}} r^* \cdot d_v \leq s_u$ であり，部分木 T_i の各辺 e に対して $\psi_e \leq c_e$ である．r^* は最大供給率なので，$1 \leq i \leq n_\mathrm{s}$ なるある i について次の条件 (i) あるいは (ii) が成立する．

(i) $\sum_{v \in V_i/\{u\}} r^* \cdot d_v = s_u$ である．
(ii) T_i のある辺 $e' = (v, w)$ について，$\psi_{e'} = c_{e'}$ である．ここで $\psi_{e'} = \sum_{x \in \mathrm{Des}(w)} r^* \cdot d_x$ である．

なぜならば，どの i についても条件 (i) も (ii) も成立しないとすると，r^* は最大供給率ではないことになってしまうからである．z^* を $z^* = C \cdot S/r^*$ とおく．条件 (i) が成立するとき

$$z^* = \prod_{e \in E} c_e \cdot \left(\sum_{v \in V_i/\{u\}} d_v \right) \cdot \left(\frac{\prod_{v \in V_\mathrm{s}} s_v}{s_u} \right)$$

であり，z^* は整数であり，$0 \leq z^* \leq C \cdot D \cdot S$ である．条件 (ii) が成立するとき

$$z^* = \left(\frac{\prod_{e \in E} c_e}{c_{e'}} \right) \cdot \left(\sum_{x \in \mathrm{Des}(w)} d_x \right) \cdot \prod_{v \in V_\mathrm{s}} s_v$$

であり，z^* は整数であり，$0 \leq z^* \leq C \cdot D \cdot S$ である．このように，どちらの場合にも，$0 \leq z \leq C \cdot D \cdot S$ なるある整数 z に対し，$r^* = C \cdot S/z$ である． □

このように, 辺容量付きの定常木ネットワーク $T = (V, E)$ の最大供給率 r^* は, 有理数の有限集合 $\{C \cdot S/z \mid C \cdot D \cdot S \geq z \geq 0\}$ 上の二分探索と線形時間判定アルゴリズム **Partition** を用いて，$O(n \log_2(C \cdot D \cdot S))$ 時間で計算することができる．ネットワーク T の対数サイズ L は,

$$L = \sum_{e \in E} \lceil \log_2(c_e + 2) \rceil + \sum_{v \in V_\mathrm{d}} \lceil \log_2(d_v + 2) \rceil + \sum_{v \in V_\mathrm{s}} \lceil \log_2(s_v + 2) \rceil$$

であるので，明らかに，$\log_2(C \cdot D \cdot S) \leq L$ であり，次の定理を得る．

定理 1 T は辺容量付きの定常木ネットワークとし，n を T の点数とし，L を T の対数サイズとすると，T に対する最大供給率問題は $O(nL)$ 時間で解くことができる．

3. パラメトリック木ネットワークの分割問題

この節では，辺容量付きのパラメトリック木ネットワーク T に対する分割問題を解くアルゴリズムを与える．

3.1 定義

一般性を失わずに，与えられた木 T は任意に選んだ点 v_root を根とする根付き木であるとしてよい．さらに，T の各点 v の供給量 $s_v(\lambda)$，需要量 $d_v(\lambda)$ および各辺 e の容量 $c_e(\lambda)$ は，非負実数の変数 $\lambda (\geq 0)$ の関数であるとする．また，T には供給点が n_s 個あるとする．

根付き木ネットワーク $T = (V, E)$ の変数値 λ に対する**許容分割** $\pi_\lambda = (V_1, V_2, \cdots, V_{n_\mathrm{s}})$ は，V の n_s 個の部分集合 $V_1, V_2, \cdots, V_{n_\mathrm{s}}$ への分割であり，次の条件 (a) − (c) を満足するものである．

(a) T の根 v_root は V_1 に含まれる．即ち $v_\mathrm{root} \in V_1$ である．
(b) $1 \leq i \leq n_\mathrm{s}$ なる各添字 i について，V_i は丁度 1 つの供給点 u を含み，V_i は T の部分木 T_i を誘導し，$\sum_{v \in V_i/\{u\}} d_v(\lambda) \leq s_u(\lambda)$ である．
(c) 各部分木 T_i の各辺 e を流れるフローの値 $\psi_e(\lambda)$ は $\psi_e(\lambda) \leq c_e(\lambda)$ である．

パラメトリック木ネットワーク T の**分割問題**とは，T が許容分割を持つ変数値 λ のすべてを見つける問題である．

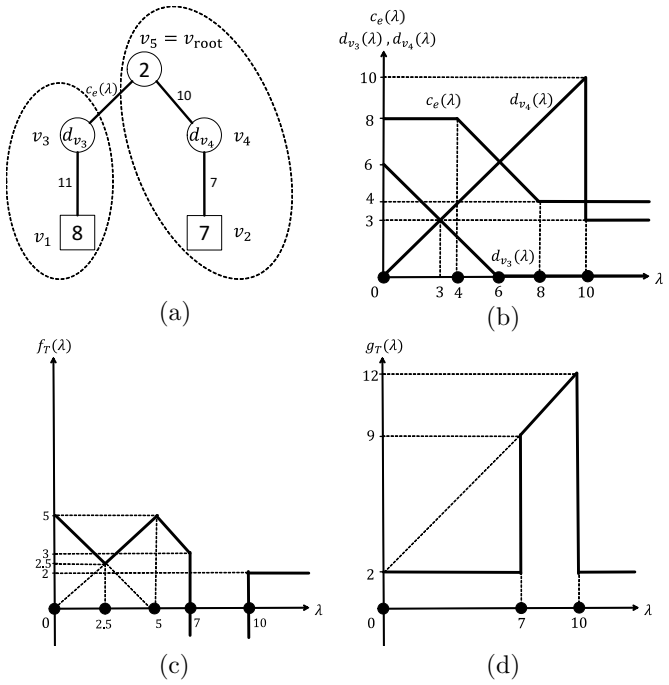

図 2 (a) v_5 を根とする辺容量付きパラメトリック木ネットワーク T, (b) 変数の需要量 $d_{v_3}(\lambda)$, $d_{v_4}(\lambda)$ および辺容量 $c_e(\lambda)$, (c) T の余裕 $f_T(\lambda)$, (d) T の不足 $g_T(\lambda)$

そのような変数値 λ の集合はいくつかの実数区間からなるので，実際にはそのようなすべての区間からなる集合を見つける．

図 2(a) のパラメトリック木ネットワーク T では，$v_5 = v_{\mathrm{root}}$ であり，$s_{v_1}(\lambda) = 8$, $s_{v_2}(\lambda) = 7$, $d_{v_5}(\lambda) = 2$ であり, 辺 (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_5) の容量は定数であり, それぞれ 11, 7, 10 である．定数ではない需要量 $d_{v_3}(\lambda)$, $d_{v_4}(\lambda)$ および辺 $e = (v_3, v_5)$ の容量 $c_e(\lambda)$ は図 2(b) に描かれている．図 2(a) で点線で示した分割 $\pi_\lambda = (\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4, v_5\})$ は, $0 \le \lambda \le 5$ なる λ に対する T の許容分割である．T に対する分割問題の解は [0,7] と $[10, \infty)$ の 2 つの区間からなる集合である．

値 λ に対する T の許容分割を $\pi_\lambda = (V_1, V_2, \cdots, V_{\mathrm{s}})$ とし，u を V_1 に含まれる供給点としたとき，**許容分割** π_λ **の余裕** $\mathrm{surp}(\pi_\lambda)$ を

$$\mathrm{surp}(\pi_\lambda) = \mathrm{s}_u(\lambda) - \sum_{v \in V_1/\{u\}} d_v(\lambda)$$

と定義する．**パラメトリック木** T **の余裕** $f_T(\lambda)$ を

$$f_T(\lambda) = \max_{\pi_\lambda} \ \mathrm{surp}(\pi_\lambda)$$

と定義する．ただし，値 λ に対する T のすべての許容分割 π_λ に渡って $\mathrm{surp}(\pi_\lambda)$ の最大値をとるものとする．値 λ に対して T が許容分割を持たない場合，$f_T(\lambda) = -\infty$ とする．直感的には，辺容量条件を満足させながら T のすべての需要点に電力を供給したとき，根 v_{root} から T の外へ出力できる電力量の最大値が，T の余裕 $f_T(\lambda)$ である．(図 2(a) の T に対する $f_T(\lambda)$ を図 2(c) に示す.) $f_T(\lambda) \ge 0$ なる λ の区間すべてからなる集合が分割問題の解である．

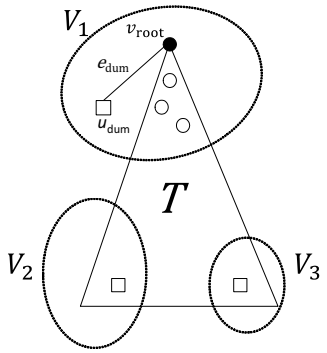

図 3 木 T にダミーの供給点と辺を付加して得られる木 T_{dum}

根付き木 T に基づく動的計画法を用いて T の許容分割を見つける．より詳しくは，許容分割とその拡張である “根許容分割” を小さい部分木から大きい部分木へと繰り返し求めていく．

図 3 のように，木 T の根 v_{root} の新しい子としてダミーの供給点 u_{dum} を付け加え，その供給量を ∞ とし，u_{dum} と v_{root} をダミーの辺 e_{dum} で結び，その辺容量を ∞ とする．こうして得られた木を T_{dum} とする．T_{dum} には供給点が $n_{\mathrm{s}} + 1$ 個ある．T_{dum} の許容分割 $\pi_\lambda = (V_1, V_2, \cdots, V_{n_{\mathrm{s}}+1})$ で, $v_{\mathrm{root}}, u_{\mathrm{dum}} \in V_1$ なる π_λ を, T の**根許容分割**と呼ぶ．したがって, T に根許容分割があるならば, v_{root} は需要点である．また，v_{root} が供給点ならば，T は根許容分割を持たない．(T が図 2(a) の木 T であるとき，$\pi_\lambda = (\{v_{\mathrm{root}}, u_{\mathrm{dum}}\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\})$ は $0 \le \lambda \le 7$ なる λ に対する根許容分割である.)

根許容分割 $\pi_\lambda = (V_1, V_2, \cdots, V_{n_s+1})$ **の不足** $\mathrm{def}(\pi_\lambda)$ を

$$\mathrm{def}(\pi_\lambda) = \sum_{v \in V_1/\{u_{\mathrm{dum}}\}} d_v(\lambda)$$

と定義する．**パラメトリック木** T **の不足** $g_T(\lambda)$ を

$$g_T(\lambda) = \min_{\pi_\lambda} \ \mathrm{def}(\pi_\lambda)$$

と定義する．ただし，値 λ に対する T のすべての根許容分割 π_λ に渡って $\mathrm{def}(\pi_\lambda)$ の最小値をとるものとする．値 λ に対して T が根許容分割を持たないならば，$g_T(\lambda) = +\infty$ とする．このようにして, v_{root} が供給点であるとき, 任意の値 λ に対して T は根許容分割を持たないので，$g_T(\lambda) = +\infty$ である．直感的には，v_{root} を含むいくつかの需要点が木 T の外から電力を供給されるとき．v_{root} を通して T に入力されなければならない電力量の最小値が，T の不足 $g_T(\lambda)$ である．(図 2(a) の T に対する不足 $g_T(\lambda)$ を図 2(d) に示す.)

T の根付き部分木 T' に対しても余裕 $f_{T'}(\lambda)$ と不足 $g_{T'}(\lambda)$

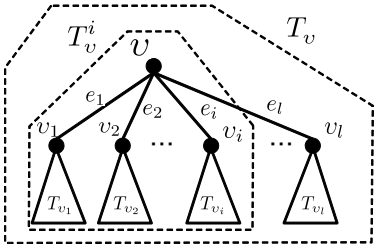

図 4 根付き部分木

を同様に定義する．

T の点 v に対して，v を根とする T の最大部分木を T_v と表す．点 v の子を $v_1, v_2, \cdots, v_l$ とし，$1 \le i \le l$ なる各 i に対し，v と v_i を結ぶ辺を e_i とし，v_i を根とする T の最大部分木を T_{v_i} とする．点 v と，辺 $e_1, e_2, \cdots, e_i$ と，部分木 $T_{v_1}, T_{v_2}, \cdots, T_{v_i}$ からなる T_v の部分木を T_v^i と書く．図 4 で T_v と T_v^i は点線で囲まれている．明らかに $T_v = T_v^l$ である．点 v だけからなる部分木を特に T_v^0 と書く．

3.2 アルゴリズム

以下の (i) − (iii) で示すように，本文のアルゴリズムは動的計画法を用いて，T の各点 v に対し，葉から根に向かって余裕 $f_{T_v}(\lambda)$ と不足 $g_{T_v}(\lambda)$ を計算する．$T = T_{v_{\mathrm{root}}}$ の余裕 $f_T(\lambda)$ から，$f_T(\lambda) \ge 0$ であるような非負実数 λ の区間すべてを容易に見つけることができる．パラメトリック木ネットワークの分割問題の解として，これらすべての区間からなる集合を出力する．例えば図 2(a) のパラメトリック木 T に対しては，集合 $\{[0,7],[10,\infty)\}$ を出力する．

(i) まず以下のように，T の各点 v に対する T_v^0 の余裕と不足を計算する．(T_v^0 は端点 v だけからなることを思い出そう.) もし v が供給点ならば，すべての λ に対して $f_{T_v^0}(\lambda) = s_v(\lambda)$ であり，$g_{T_v^0}(\lambda) = +\infty$ である．v が需要点ならば，すべての λ に対して $f_{T_v^0}(\lambda) = -\infty$ であり，$g_{T_v^0}(\lambda) = d_v(\lambda)$ である．T のすべての葉 v に対して $T_v = T_v^0$ なので，このようにして葉 v に対する f_{T_v} と g_{T_v} は計算できた．

(ii) 次に T の各内点 v に対して，木 $T_v^i (1 \le i \le l)$ の余裕と不足を，T_v^i の部分木 T_v^{i-1} と T_{v_i} の余裕と不足から計算する．ここで l は T_v の子の個数であり，$T_v = T_v^l$ である．図 5 のように，T_v^{i-1} の根 v と T_{v_i} の根 v_i を辺 $e = (v, v_i)$ で結んで T_v^i から得られることに注意しよう．

(ii-1) まず, T_v^i の余裕 $f_{T_v^i}$ の計算法を説明する．n_i を T_v^i の供給点の個数とする．$f_{T_v^i}(\lambda) \ne -\infty$ とする．すなわち値 λ に対して T_v^i は許容分割を持つとする．$f_{T_v^i}(\lambda) = \mathrm{surp}(\pi_\lambda)$ であるような T_v^i の許容分割を $\pi_\lambda = (V_1, V_2, \cdots, V_{n_i})$ とする．このとき図 5 のように，V_1 は T_v^i の根 v を含んでいる．同図で π_λ は点線で示され，供給点は正方形で表されている．次の 3 つの場合がある．

場合 (a)：$v_i \notin V_1$ であるとき．

この場合 $f_{T_{v_i}}(\lambda) \ge 0$ でなければならず，T_v^i の許容分割 π_λ は T_v^{i-1} と T_{v_i} の許容分割を誘導する．(図 5(a) を参照.) この場合に対して $f_{T_v^{i-1}}$ と $f_{T_{v_i}}$ から次の関数 $f^{\mathrm{a}}_{T_v^i}$ を計算する．

$$f^{\mathrm{a}}_{T_v^i}(\lambda) = \begin{cases} f_{T_v^{i-1}}(\lambda) & (f_{T_{v_i}}(\lambda) \ge 0 \text{ のとき}) \\ -\infty & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

辺 $e = (v, v_i)$ にはフローが流れていないことに注意しよう．

場合 (b)：$v_i \in V_1$ であり，V_1 に含まれている供給点 u が T_v^{i-1} に入っているとき．

このとき，$f_{T_v^{i-1}}(\lambda) \ge g_{T_{v_i}}(\lambda)$ でなければならず，$\psi_e(\lambda) = g_{T_{v_i}}(\lambda)$ であり，v_i は需要点であり，π_λ は T_v^{i-1} の許容分割と T_{v_i} の根許容分割を誘導する．(図 5(b) で辺 $e = (v, v_i)$ に付けられた矢印は e を流れるフローの向きを表している.) この場合に対して次の関数 $f^{\mathrm{b}}_{T_v^i}$ を計算する．

$$f^{\mathrm{b}}_{T_v^i}(\lambda) = \begin{cases} f_{T_v^{i-1}}(\lambda) - g_{T_{v_i}}(\lambda) \\ \qquad (f_{T_v^{i-1}}(\lambda) \ge g_{T_{v_i}}(\lambda) \text{ かつ} \\ \qquad g_{T_{v_i}}(\lambda) \le c_e(\lambda) \text{ のとき}) \\ -\infty \\ \qquad (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

場合 (c)：$v_i \in V_1$ であり，V_1 に含まれる供給点 u が T_{v_i} に入っているとき．

このとき，$g_{T_{v_i}}(\lambda) \le f_{T_v^{i-1}}(\lambda)$ でなければならず，$\psi_e(\lambda) = g_{T_v^{i-1}}(\lambda)$ であり，v は需要点であり，π_λ は T_v^{i-1} の根許容分割と T_{v_i} の許容分割を誘導する．(図 5(c) を参照.) この場合に対して次の関数 $f^{\mathrm{c}}_{T_v^i}$ を計算する．

$$f^{\mathrm{c}}_{T_v^i}(\lambda) = \begin{cases} -g_{T_v^{i-1}}(\lambda) + f_{T_{v_i}}(\lambda) \\ \qquad (g_{T_v^{i-1}}(\lambda) \le f_{T_{v_i}}(\lambda) \text{ かつ} \\ \qquad g_{T_v^{i-1}}(\lambda) \le c_e(\lambda) \text{ のとき}) \\ -\infty \\ \qquad (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

上の 3 つの関数 $f^{\mathrm{a}}_{T_v^i}(\lambda), f^{\mathrm{b}}_{T_v^i}(\lambda), f^{\mathrm{c}}_{T_v^i}(\lambda)$ から， $f_{T_v^i}(\lambda)$ は次のように計算できる．

$$f_{T_v^i}(\lambda) = \max\{f^{\mathrm{a}}_{T_v^i}(\lambda), f^{\mathrm{b}}_{T_v^i}(\lambda), f^{\mathrm{c}}_{T_v^i}(\lambda)\}.$$

(ii-2) 次に T_v^i の不足 $g_{T_v^i}$ の計算法を説明する．$g_{T_v^i}(\lambda) \ne +\infty$ とする．すなわち値 λ に対して T_v^i は根許容分割を持つとする．T_v^i にある供給点の個数を n_i とする．T_v^i にダミーの供給点 u_{dum} を付け加えると，供給点の総数は $n_i + 1$

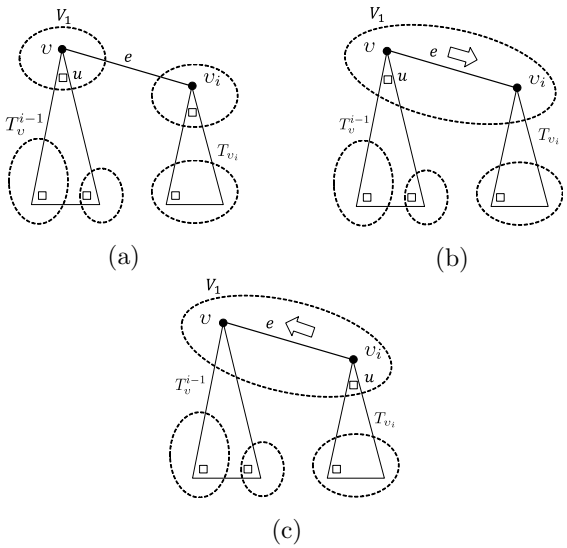

図 5 T_v^i の許容分割 π_λ.

になる．$g_{T_v^i} = \mathrm{def}(\pi_\lambda)$ であるような T_v^i の根許容分割を $\pi_\lambda = (V_1, V_2, \cdots, V_{n_{i+1}})$ とする．このとき図 6 のように V_1 は u_{dum} と T_v^i の根 v を含む．次の 2 つの場合がある．

場合 (a)：$v_i \notin V_1$ であるとき．

この場合，v は需要点であり，$f_{T_{v_i}}(\lambda) \geq 0$ でなければならず，π_λ は T_v^{i-1} の根許容分割と，T_{v_i} の許容分割を誘導する．(図 6(a) 参照.) この場合に対して次の関数 $g^{\mathrm{a}}_{T_v^i}$ を計算する．

$$g^{\mathrm{a}}_{T_v^i}(\lambda) = \begin{cases} g_{T_v^{i-1}}(\lambda) & (f_{T_{v_i}}(\lambda) \geq 0 \text{ のとき}) \\ +\infty & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

辺 $e = (v, v_i)$ にフローは流れていないことに注意しよう．

場合 (b)：$v_i \in V_1$ であるとき．

この場合，v および v_i は需要点であり，$g_{T_{v_i}}(\lambda) \neq +\infty$ でなければならず，$\psi_e(\lambda) = g_{T_{v_i}}(\lambda)$ であり，π_λ は T_v^{i-1} および T_{v_i} の根許容分割を誘導する．(図 6(b) 参照.) この場合に対して次の関数 $g^{\mathrm{b}}_{T_v^i}$ を計算する．

$$g^{\mathrm{b}}_{T_v^i}(\lambda) = \begin{cases} g_{T_v^{i-1}}(\lambda) + g_{T_{v_i}}(\lambda) & (g_{T_{v_i}}(\lambda) \leq c_e(\lambda) \text{ のとき}) \\ +\infty & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

上の 2 つの関数 $g^{\mathrm{a}}_{T_v^i}$, $g^{\mathrm{b}}_{T_v^i}$ から $g_{T_v^i}$ は次のように計算できる．

$$g_{T_v^i}(\lambda) = \min\{g^{\mathrm{a}}_{T_{v_i}}(\lambda), g^{\mathrm{b}}_{T_{v_i}}(\lambda)\}.$$

(iii) T に含まれる $n-1$ 本の辺 $e = (v, v_i)$ の各々に対して (ii) の計算を繰り返して $f_T(\lambda)$ と $g_T(\lambda)$ を計算する．

3.3 計算時間

この節ではすべての供給量，需要量および辺容量が非負実数変数 λ の区分的線形関数であるとして，アルゴリズムの計算時間を解析する．

区分的線形関数 f の**折れ点**とは，曲線 f の傾きが変わる

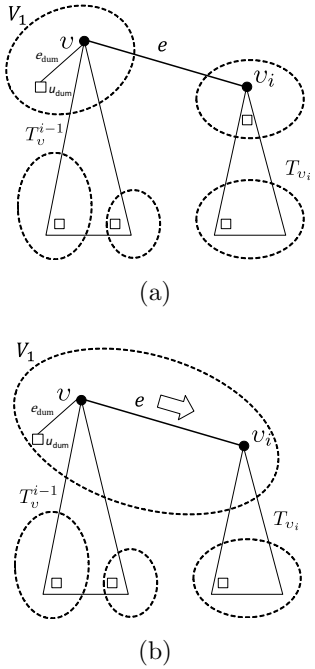

図 6 T_v^i の根許容分割 π_λ

λ の値と定義する．f の折れ点の個数を $p(f)$ と表す．便宜上 $\lambda = 0$ は f の折れ点であるとする．(例えば図 2 の $c_e(\lambda)$ と $f_T(\lambda)$ については, $p(c_e(\lambda)) = 3$ であり, $p(f_T(\lambda)) = 5$ である.) このときパラメトリック木ネットワーク $T = (V, E)$ のサイズ N は

$$N = \sum_{v \in V_{\mathrm{s}}} p(s_v(\lambda)) + \sum_{v \in V_{\mathrm{d}}} p(d_v(\lambda)) + \sum_{e \in E} p(c_e(\lambda))$$

である．P を次式で定義する．

$$P = \max\{\max_{T'} p(f_{T'}(\lambda)), \max_{T'} p(g_{T'}(\lambda))\}.$$

ただし，T のすべての部分木 T' に渡り最大値をとるものとする．$f_{T'}(\lambda)$ と $g_{T'}(\lambda)$ が区分的線形関数であることに注意しよう．T の余裕 $f_T(\lambda)$ と不足 $g_T(\lambda)$ を解として出力する必要があるならば，ある意味 P は出力サイズであるといえる．

点 v だけからなる木 T_v^0 の余裕 $f_{T_v^0}(\lambda)$ と不足 $g_{T_v^0}(\lambda)$ は節 3.2 の (i) のようにして求まる．明らかにすべての点 v に対する $f_{T_v^0}(\lambda)$ と $g_{T_v^0}(\lambda)$ は $O(N)$ 時間で求まる．

木 T_v^i の余裕 $f_{T_v^i}$ と不足 $g_{T_v^i}$ は，節 3.2 の (ii) のようにして木 T_v^{i-1} と T_{v_i} の余裕と不足および辺 $e = (v, v_i)$ の容量 $c_e(\lambda)$ から $O(p(c_e(\lambda)) + P)$ 時間で計算できる．T には $n-1$ 本の辺があるので，(ii) の計算は $n-1$ 回実行される．また $\sum_{e \in E} p(c_e(\lambda)) \leq N$ である．したがって $f_T(\lambda)$ と $g_T(\lambda)$ は $O(N + nP)$ 時間で計算できる．$f_T(\lambda) \geq 0$ なる λ の区間全ては，$f_T(\lambda)$ から $O(P)$ 時間で求まる．このように分割問題は $O(N + nP)$ 時間で解くことができる．

P は N よりも大きいかもしれない．(例えば，図 2 において $f_T(\lambda)$ の折れ点 $\lambda = 2.5, \lambda = 5$ および $\lambda = 7$ は，どの

供給量，需要量，辺容量の折れ点でもない.) しかし，P は N の多項式以下であることが多い．特に，T が定常ネットワークならば，$N = |V| + |E| = 2n - 1, P = 1$ であり，本文のアルゴリズムの計算時間は $O(n)$ である．もしすべての供給量，需要量，辺容量が階段関数ならば $P \leq N$ であり，計算時間は $O(nN)$ である．

3.4 P の上界

供給量，需要量および辺容量の折れ点の総数を B とし，これらの折れ点を $p_1, p_2, \cdots, p_B$ とする．(例えば，図 2(a) の T に対して $B = 5$ であり，折れ点は図 2(b) において黒点描かれている.) $0 = p_1 < p_2 < \cdots < p_B$ とし，$p_{B+1} = \infty$ であるとする．次の (a) − (c) を仮定する．

(a) v が供給点であり，$p_i < \lambda < p_{i+1}, 1 \leq i \leq B$ ならば，ある整数 a_{vi}, b_{vi} に対して

$$s_v(\lambda) = a_{vi}\lambda + b_{vi}$$

である．

(b) v が需要点であり，$p_i < \lambda < p_{i+1}, 1 \leq i \leq B$ ならば，ある整数 a_{vi}, b_{vi} に対して

$$d_v(\lambda) = a_{vi}\lambda + b_{vi}$$

である．

(c) e が T の辺であり，$p_i < \lambda < p_{i+1}, 1 \leq i \leq B$ ならば，ある整数 a_{ei}, b_{ei} に対して

$$c_e(\lambda) = a_{ei}(\lambda) + b_{ei}$$

である．

$1 \leq i \leq B$ なる各 i に対して W_i を

$$W_i = \sum_{x \in V \cup E} (|a_{xi}| + |b_{xi}|)$$

とし，

$$W = \sum_{i=1}^{B} W_i$$

とする．P が擬多項式で抑えられることを示すためには，P が W の多項式で抑えられることを示せばよい．より詳しくは，次の補題が成立する．

補題 3. $P = O(W^2)$

証明 P は，T のある根付き部分木 T' の余裕 $f_{T'}(\lambda)$ あるいは不足 $g_{T'}(\lambda)$ の折れ点の個数に等しい．ここでは P を $f_{T'}(\lambda)$ の折れ点の個数とする．(P が $g_{T'}(\lambda)$ の折れ点の個数である場合に対する証明も同様である.) T' の供給点の個数を n' とする．$p_1, p_2, \cdots, p_B$ のいずれでもない $f_{T'}$ の折れ点を λ とする．このとき $1 \leq i \leq B$ なる，ある i に対して $p_i < \lambda < p_{i+1}$ である．そのような折れ点 λ は，有理数であり, 次のように供給量，需要量および辺容量の整数係数で表現されることがわかる．

まず最初に関数 $f_{T'}$ が折れ点 λ で連続的である場合を考える．そのとき，$\mathrm{surp}(\pi_\lambda) = \mathrm{surp}(\pi'_\lambda)$ かつ $V_1 \neq V_1'$ であるような 2 つの異なる許容分割 $\pi_\lambda = (V_1, V_2, \cdots, V_{n'})$ と $\pi'_\lambda = (V'_1, V'_2, \cdots, V'_{n'})$ が存在する．なぜならば，もしそのような分割がないとすると，$f_{T'}$ が λ で連続的でないことになってしまうからである．(図 2(c) で $f_T(\lambda)$ が連続的である折れ点 $\lambda = 2.5$ に対し，T の許容分割 $\pi_\lambda = (\{v_5, v_4, v_2\}, \{v_3, v_1\})$ と $\pi'_\lambda = (\{v_5, v_3, v_1\}, \{v_4, v_2\})$ がある.) u は V_1 内の供給点とし，u' は V'_1 内の供給点とする．$\mathrm{surp}(\pi_\lambda) = \mathrm{surp}(\pi'_\lambda)$ であるから

$$s_u(\lambda) - \sum_{v \in V_1/\{u\}} d_v(\lambda) = s_{u'}(\lambda) - \sum_{v \in V'_1/\{u'\}} d_v(\lambda)$$

である．$p_i < \lambda < p_{i+1}$ なので

$$\begin{aligned} a_{ui}\lambda + b_{ui} - \sum_{v \in V_1/\{u\}} (a_{vi}\lambda + b_{vi}) \\ = a_{u'i}\lambda + b_{u'i} - \sum_{v \in V'_1/\{u'\}} (a_{vi}\lambda + b_{vi}) \end{aligned}$$

である．したがって

$$\lambda = \frac{-b_{ui} + b_{u'i} + \sum_{v \in V_1/\{u\}} b_{vi} - \sum_{v \in V'_1/\{u'\}} b_{vi}}{a_{ui} - a_{u'i} - \sum_{v \in V_1/\{u\}} a_{vi} + \sum_{v \in V'_1/\{u'\}} a_{vi}}$$

である．上式の分子と分母は $-W_i$ と W_i の間の整数であるので，$p_i < \lambda < p_{i+1}$ なるそのような連続的な折れ点 λ の個数は $(2W_i + 1)^2$ 以下である．

次に $f_{T'}$ が λ で不連続である場合を考える．そのとき $f_{T'}(\lambda) = \mathrm{surp}(\pi_\lambda)$ であるような許容分割 $\pi_\lambda = (V_1, V_2, \cdots, V_{n'})$ が存在し，$1 \leq j \leq n'$ なるある j に対して，次の (i) あるいは (ii) が成り立つ．

(i) V_j に含まれる供給点を u としたとき

$$s_u(\lambda) - \sum_{v \in V_j/\{u\}} d_v(\lambda) = 0$$

である．

(ii) V_j が誘導する T の部分木のある辺 $e = (v, w)$ を流れるフローの値 $\psi_e(\lambda)$ が容量 $c_e(\lambda)$ に等しい．即ち

$$c_e(\lambda) = \psi_e(\lambda) = \sum_{x \in \mathrm{Des}(w)} d_x(\lambda)$$

である．

(図 2(c) の不連続な折れ点 $\lambda = 7$ に対する許容分割 $\pi_\lambda = (\{v_5, v_3, v_1\}, \{v_4, v_2\})$ では，$j = 2$ であり，上の 2 つの等式のどちらも成り立ち，$e = (v_2, v_4)$ である.)

$p_i < \lambda < p_{i+1}$ なので，(i) のとき

$$a_{ui}\lambda + b_{ui} - \sum_{v \in V_j/\{u\}} (a_{vi}\lambda + b_{vi}) = 0$$

であり，

$$\lambda = \frac{-b_{ui} + \sum_{v \in V_j/\{u\}} b_{vi}}{a_{ui} - \sum_{v \in V_j/\{u\}} a_{vi}}$$

である．(ii) のとき

$$a_{ei}\lambda + b_{ei} = \sum_{x \in \mathrm{Des}(w)} (a_{xi}\lambda + b_{xi})$$

であり，

$$\lambda = \frac{-b_{ei} + \sum_{x \in \mathrm{Des}(w)} b_{xi}}{a_{ei} - \sum_{x \in \mathrm{Des}(w)} a_{xi}}$$

である．したがって，$p_i < \lambda < p_{i+1}$ である不連続な折れ点 λ の個数は $2(2W_i + 1)^2$ 以下である．

このようにして次式を証明することができた．

$$P \leq B + \sum_{i=1}^{B} 3(2W_i + 1)^2 = O(W^2)$$

□

上の補題から以下の定理を得る．

定理 2. すべての供給量，需要量および辺容量が整数係数を持つ区分的線形関数であるならば，パラメトリック木ネットワークに対する分割問題は $O(nW^2)$ 時間で解くことができる．ここで W は供給量，需要量，辺容量のすべての係数の絶対値の合計である．

このようにして W が N の多項式であるとき本文のアルゴリズムは多項式時間で走る．

4. むすび

本文では，まず辺容量付き定常木ネットワーク T に対する最大供給率問題が $O(nL)$ 時間で解けることを示した．ここで n は T の点数で，L は T の対数サイズである．その問題を n の多項式時間で解く強多項式時間アルゴリズムを求めることは今後の課題である．

次に辺容量付きパラメトリック木ネットワーク T に対する分割問題を解くアルゴリズムを与えた．そのアルゴリズムはすべての供給量，需要量および辺容量が整数係数を持つ区分的線形関数であるとき擬多項式時間で走る．そのアルゴリズムは余裕 $f_T(\lambda)$ と不足 $g_T(\lambda)$ を計算している．そのアルゴリズムを少し修正すれば，$f_T(\lambda) \geq 0$ なる λ に対する許容分割を具体的に見つけることもできる．便宜上，供給量，需要量および辺容量は 1 つの変数 λ の関数であるとしたが，2 つ以上の変数の関数である場合にも本文のアルゴリズムを拡張することができる．

もしパラメトリック木ネットワーク T が許容分割を持たないとき，次の (a) − (c) を満足するように T をいくつかの部分木へ分割したい．

(a) 各部分木は高々 1 つの供給点を含む．
(b) 部分木が供給点を含むならば，その部分木における供給量は部分木の需要量の合計以上であり，その供給点から部分木の各需要点に需要量だけのフローを流したとき，その部分木の各辺を流れるフローは容量以下である．
(c) 供給点を含んでいるすべての部分木の需要量の合計は，T のこのような分割の中で最大である．

このような分割を求める問題を**最大分割問題**と呼ぶ．辺容量のない定常木ネットワークや，定数の辺容量を持つ定常木ネットワークに関する最大分割問題に対しては FPTAS が存在する [4,5]．パラメトリック木ネットワークに関する最大分割問題に対して FPTAS を求めることが今後の課題である．

謝辞 本研究は文部科学省私立大学戦略的研究基盤形成支援事業（平成 22 年〜平成 26 年）から一部援助を受けた．

参考文献

[1] N. G. Boulaxis and M. P. Papadopoulos, Optimal feeder routing in distribution system planning using dynamic programming technique and GIS facilities, IEEE Trans. Power Delivery, Vol. 17, No. 1, pp. 242-247, 2002.
[2] G. Gallo, M. D. Grigoriadis and R. E. Tarjan, A fast parametric maximum flow algorithm and applications, SIAM J. Comput., Vol. 18, No. 1, pp. 30-55, 1989.
[3] T. Ito, X. Zhou and T. Nishizeki, Partitioning graphs of supply and demand, Discrete Applied Math., Vol. 157, pp. 2620-2633, 2009.
[4] T. Ito, X. Zhou and T. Nishizeki, Partitioning trees of supply and demand, Int. J. Found. of Computer Science, Vol. 16, No. 4, pp. 803-827, 2005.
[5] M. Kawabata and T. Nishizeki, Partitioning trees with supply, demand and edge-capacity, IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Science, Vol. E96-A, No.6, pp.1036-1043, 2013.
[6] E. Minieka, Parametric network flows, Operation Research, Vol. 20, No. 6, pp. 1162-1170, 1972.
[7] S. Morishita and T. Nishizeki, Parametric power supply networks, J. Comb. Optim., DOI 10.1007/s10878-013-9661-5, 2013.
[8] A. B. Morton and I. M. Y. Mareels, An efficient brute-force solution to the network reconfiguration problem, IEEE Trans. Power Delivery, Vol. 15, pp. 996-1000, 2000.
[9] J. -H. Teng and C.-N. Lu, Feeder-switch relocation for customer interruption cost minimization, IEEE Trans. Power Delivery, Vol. 17, pp. 254-259, 2002.

ⓒ 2014 Information Processing Society of Japan