

重み付きグラフの公平連結分割

小野村 歩^{1,a)} 西関 隆夫^{1,b)}

概要：各点に非負整数重みが付いているグラフ G と正整数 p が与えられたとき、 G から何本かの辺を除去して、 G を p 個の互いに共通な点を持たない連結部分グラフに分割し、部分グラフの点重みの合計の最大と最小の差をできるだけ小さくしたい。このような分割を G の p -公平連結分割という。本文では、このような p -公平連結分割が直並列グラフや部分 k -木に対して擬多項式時間で求まり、特に点重みが全て 1 であるときには多項式時間で求まることを示す。

キーワード：公平連結分割, 直並列グラフ, 部分 k 木, 擬多項式時間

On the Fairest Connected Partition of a Weighted Graph

Abstract: Given a positive integer p and a graph G in which each vertex is assigned a non-negative integer weight, one wishes to partition G to a number p of connected subgraphs by deleting edges from G so that the difference between the maximum sum of vertex-weights in a subgraph and the minimum one is as small as possible. Such a partition is called the fairest p -partition of G . In this paper we present an algorithm to find the fairest p -partition of series-parallel graphs and partial k -trees in pseudo-polynomial time. The algorithm takes polynomial time if every vertex weight is one.

Keywords: fairest partition, series-parallel graph, partial k -tree, pseudo-polynomial time

1. はじめに

グラフ $G = (V, E)$ と正整数 $p (\geq 2)$ が与えられ、 G の各点 $v \in V$ には非負整数の重み $\omega(v)$ が割り当てられているとする。このとき、 G から何本かの辺を除去して、 G を p 個の互いに共通な点を持たない連結部分グラフ $G_1, G_2, \dots, G_p$ に分割する。このような G の分割 $\mathcal{P} = \{G_1, G_2, \dots, G_p\}$ は、 G の p -連結分割と呼ばれる。特に $\max_{1 \leq i \leq p} \omega(G_i) - \min_{1 \leq i \leq p} \omega(G_i)$ が最小であるような p -連結分割 $\mathcal{P}$ を、 G の p -公平連結分割という。ここで $\omega(G_i) = \sum_{v \in G_i} \omega(v)$ であり、 G_i の全ての点 v に渡って点重み $\omega(v)$ の総和をとるものとする。与えられたグラフ G に対して、 p -公平連結分割を見つける問題を p -公平連結分割問題と呼ぶ。図 1(a) のグラフは直並列であり、各点 v は丸で描かれ、丸の中に v の重み $\omega(v)$ が書いてある。そのグラフの 4-公平連結分割を同図 (b) に示す。4 つの連結部

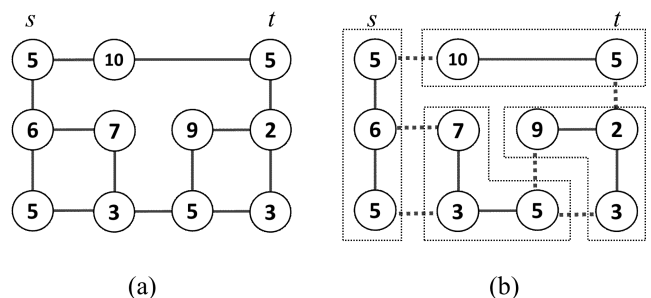


図 1 (a) 直並列グラフ, (b) 4-公平連結分割

分グラフは各々点線で囲まれており、除去された辺は太点線で描かれている。

p -公平連結分割問題は、画像処理 [3], OS のページングシステム [6], 土地分割や選挙区画割り [1,7] 等によく現れる。しかし、 p -公平連結分割問題は一般のグラフに対しては強 NP-困難であり、直並列グラフに対しては NP-困難であるので [4], 一般のグラフに対しては擬多項式時間アルゴリズムすらありそうになく、直並列グラフに対しては多項

¹ 関西学院大学
2-1 Gakuen, Sanda, 669-1337 Japan
^{a)} bie18018@kwansei.ac.jp
^{b)} nishi@kwansei.ac.jp

式時間アルゴリズムがありそうにない。

直並列グラフなど構造的グラフに対する“最適部分グラフ問題”の多くは多項式時間で解けることが知られている [2,5]。しかし、 p -公平連結問題など“最適分割問題”に関してはあまり多くのことは知られていない。グラフ G と整数 p の他に非負整数 l および u を与えられたとする。このとき $1 \leq i \leq p$ なる各 i について $l \leq \omega(G_i) \leq u$ なる p -連結分割 $\mathcal{P} = \{G_1, G_2, \dots, G_p\}$ は、 G の (p, l, u) -連結分割と呼ばれている [4]。 G の点重みの合計を $W = \sum_{v \in G} \omega(v)$ としたとき、 $l = 0$, $u = W$ なる (p, l, u) -連結分割は、むしろ p -連結分割である。直並列グラフや部分 k -木に (p, l, u) -連結分割が存在するかどうか判定する問題は、擬多項式時間で解けることが知られている [4]。そのアルゴリズムの直並列グラフに対する計算時間は $O(p^2 u^4 n)$ である。

本文では、最適分割問題の一例である p -公平連結分割問題を直並列グラフや部分 k -木に対して解くアルゴリズムを与える。直並列グラフ G の点数を n としたとき、そのアルゴリズムの計算時間は $O(p^2 W^8 n)$ であり、擬多項式である。 W が n の多項式以下ならば、本文のアルゴリズムは多項式時間で走る。特に全ての点重みが 1 ならば、計算時間は $O(pn^9)$ であり、 n の多項式である。 G の (p, l, u) -分割 $\mathcal{P} = \{G_1, G_2, \dots, G_p\}$ で、特に $\max \omega(G_i) - \min \omega(G_i)$ が最小であるものを、 G の (p, l, u) -公平連結分割という。むしろ $l=0$, $n = W$ なる (p, l, u) -公平連結分割は p -公平連結分割である。本文のアルゴリズムは、文献 [4] の (p, l, u) -連結分割が存在するかどうか判定するアルゴリズムを一般化したものである。

2. 用語と定義

直並列グラフ は次のように再帰的に定義される [5]。

- (1) 図 2(a) のように、1 本の辺 (s, t) からなるグラフ G は直並列グラフであり、その辺の端点 s および t は G の**端子**と呼ばれる。
- (2) G' は端子 s', t' を持つ直並列グラフであり、 G'' は端子 s'', t'' を持つ直並列グラフであるとき、
 - (a) 図 2(b) のように、端子 t' と s'' を同一視して G' と G'' から得られるグラフ G は直並列グラフであり、 G の端子は s' と t'' である。このような接続は**直列接続**と呼ばれる。
 - (b) 図 2(c) のように、端子 s' と s'' を同一視し、 t' と t'' を同一視して G' と G'' から得られるグラフ G は、直並列グラフであり、 G の端子は $s' = s''$ と $t' = t''$ である。このような接続は**並列接続**と呼ばれる。

グラフ G の (p, l, u) -公平連結分割を求めるとき、グラフ G は一般性を失わずに単純グラフであり、多重辺はないとしてよい。直並列グラフ G は**二分分解木**によって表すこと

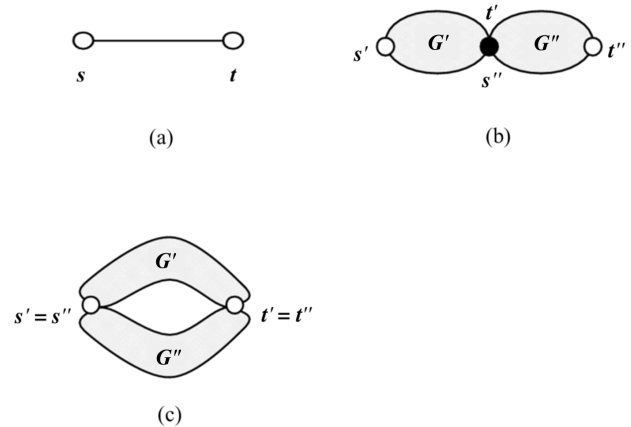


図 2 直並列グラフの定義

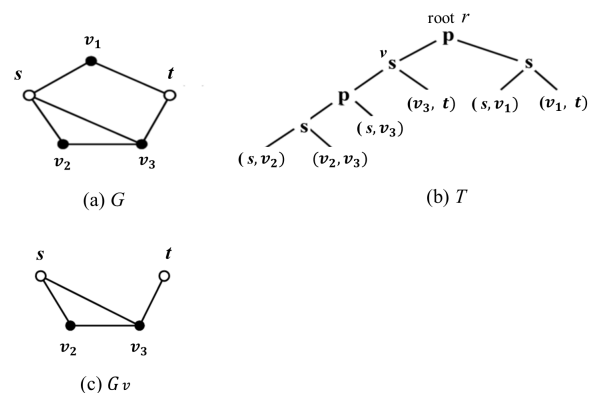


図 3 (a) 直並列グラフ G , (b) G の二分分解木 T , (c) 部分グラフ G_v

ができる。図 3(a) の直並列グラフ G の二分分解木 T を図 3(b) に示す。 T の内部節点にはラベル s あるいは p が付けられており、各々直列接続と並列接続を表している。 T の各節点 v は、 G の直並列部分グラフ G_v に対応する。特に v が T の葉ならば、 G_v は G の 1 本の辺からなる部分グラフである。 v が T の内部節点であり、 v のラベルが s (あるいは p) ならば、 v の 2 人の子供に対応するグラフを直列接続 (あるいは並列接続) して得られるグラフが G_v である。 T の根を r とすると、むしろ $G = G_r$ である。図 3(c) のグラフは、 T の根 r の左子供 v に対する G_v である。与えられた直並列グラフ G の二分分解木は、線形時間で見つけることができるので [5]、直並列グラフ G とその二分分解木は与えられているとしてよい。分解木 T に基づく動的計画法により (p, l, u) -公平連結分割を求める。

3. (p, l, u) -公平連結分割アルゴリズムの概要

G は直並列グラフであるとし、 T は G の分解木とし、 v は T の節点であるとする。このとき、 G の (p, l, u) -連結分割 $\mathcal{P} = \{G_1, G_2, \dots, G_p\}$ は、直並列部分グラフ G_v の連結分割 $\mathcal{P}_v$ を誘導する。(例えば、図 4 のように T の節点

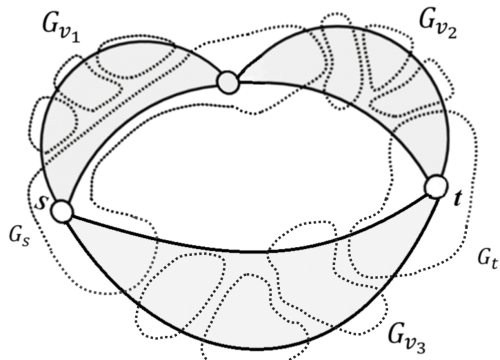


図 4 直並列グラフ G の (p, l, u) -連結分割 $\mathcal{P}$

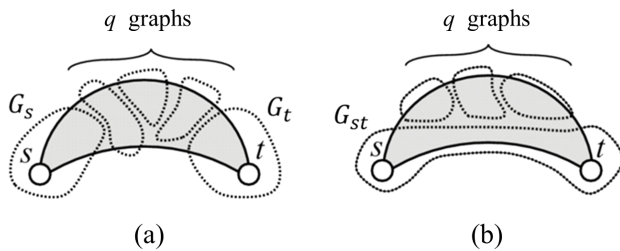


図 5 (a) 分離分割 $\mathcal{P}_v$ と (b) 非分離分割 $\mathcal{P}_{vt}$

v_1, v_2, v_3 に対して, G_{v_1} と G_{v_2} を直列接続し, 得られたグラフと G_{v_3} を並列接続して G が得られるとする. 同図で点線で示された G の (p, l, u) -連結分割 $\mathcal{P}$ は, 直並列部分グラフ G_{v_2} に対しては図 5(a) のような連結分割 $\mathcal{P}_{v_2}$ を誘導し, G_{v_1} に対しては図 5(b) のような連結分割 $\mathcal{P}_{v_1}$ を誘導する.) $|\mathcal{P}|=p$ であるが, $|\mathcal{P}_v|=p$ とは限らず, $1 \leq |\mathcal{P}_v| \leq p+1$ である. より詳しくは, $\mathcal{P}_v$ の部分グラフであって, G_v の端子を含まないものの個数を q とすると, $0 \leq q \leq p-1$ である. というのも, 図 5(a) のように G_v の端子 s と t が $\mathcal{P}_v$ の異なる部分グラフに含まれるかもしれないが, 全体のグラフ G の連結分割 $\mathcal{P}$ ではその 2 つの部分グラフが合併して 1 つになってしまうかもしれないからである. $\mathcal{P}$ の各部分グラフ G_i の重みの合計 $\omega(G_i)$ は l 以上であり, u 以下である. したがって, $\mathcal{P}_v$ の部分グラフ G_i が G_v の端子 s, t のどちらも含まないならば, G_i の重みの合計 $\omega(G_i)$ は l 以上であり, u 以下である. しかし, $\mathcal{P}_v$ の部分グラフ G_i が G_v の端子 s あるいは t を含むならば, $\omega(G_i)$ は u 以下ではあるが, l 以上とは限らない. よって, $\mathcal{P}_v$ は G_v の $(|\mathcal{P}_v|, l, u)$ -連結分割とも限らない. 図 5(a) のように G_v の端子 s と t が $\mathcal{P}_v$ の異なる部分グラフに含まれているとき, $\mathcal{P}_v$ は G_v の“分離分割”であるといい, 一方, 図 5(b) のように端子 s と t が $\mathcal{P}_v$ の同じ部分グラフに含まれるとき, $\mathcal{P}_v$ は G_v の“非分離分割”であるという.

以下に直並列グラフ $G = (V, E)$ の分離分割と非分離分割を正式に定義する. 直並列グラフ G から何本かの辺を除去して, G をいくつかの点素な連結部分グラフに分割する分割を $\mathcal{P}$ とする. G の端子 s と t の両方を含む部分グラフ

が $\mathcal{P}$ にあるならば, それを G_{st} と書く. 端子 s を含み t を含まない部分グラフがあるならば, それを G_s と書く. 同様に G_t を定義する. このとき $\mathcal{P}$ が次の 2 つの条件 (a) および (b) を満足するならば, $\mathcal{P}$ は G の**分離分割**であるという. (図 5(a) 参照.)

- (a) $G_s, G_t \in \mathcal{P}$ であり, $\omega(G_s) \leq u$ および $\omega(G_t) \leq u$ である.
- (b) G_s と G_t 以外の $\mathcal{P}$ の各部分グラフ $G_i \in \mathcal{P}/\{G_s, G_t\}$ に対して, $l \leq \omega(G_i) \leq u$ である.

必ずしも $l \leq \omega(G_s), l \leq \omega(G_t)$ であるとは限らず, $\mathcal{P}$ の部分グラフで, G の端子 s, t を含まないものの個数 q は $q = |\mathcal{P}| - 2$ であることに注意しよう. ちなみに図 1(b) の分割は分離分割である.

直並列グラフ G の分割 $\mathcal{P}$ が次の 2 つの条件 (a) および (b) を満足するならば, $\mathcal{P}$ は G の**非分離分割**であるという. (図 5(b) 参照.)

- (a) $G_{st} \in \mathcal{P}$ であり, $\omega(G_{st}) \leq u$ である.
- (b) G_{st} 以外の $\mathcal{P}$ の各部分グラフ $G_i \in \mathcal{P}/\{G_{st}\}$ に対して, $l \leq \omega(G_i) \leq u$ である.

必ずしも $l \leq \omega(G_{st})$ であるとは限らず, $q = |\mathcal{P}| - 1$ であることに注意しよう.

本文のアルゴリズムは, G の非分離分割 $\mathcal{P}$ に対しては非負整数 $x = \omega(G_{st})$ を計算し, 分離分割 $\mathcal{P}$ に対しては非負整数 $x = \omega(G_s)$ と $y = \omega(G_t)$ を計算する. 更に端子 s, t を含まない部分グラフ $G_i \in \mathcal{P}/\{G_{st}, G_s, G_t\}$ で重み $\omega(G_i)$ が最大なものの値 a , 最小なものの値 b も計算する. (本文のアイディアは x や y の他に, a および b の 2 つだけ余分に計算するところにある.) 詳しくは, それぞれ非分離分割と分離分割に対応する次の 2 つの集合 $F(G, q)$ と $H(G, q)$ を計算する.

直並列グラフ G と $0 \leq q \leq p-1$ なる各整数 q に対して, $F(G, q)$ は次のように 3 つ組 (x, a, b) の集合であると定義する. ここで, $x \in \mathbb{Z}_u, a, b \in \mathbb{Z}_u \cup \{-\infty, +\infty\}$ であり, $\mathbb{Z}_u$ は $0 \leq z \leq u$ なるすべての非負整数 z からなる集合である.

$$F(G, q) = \{(x, a, b) \mid \text{下の条件 (a) - (d) を満足する非分離分割 } \mathcal{P} \text{ が } G \text{ にある}\}$$

- (a) $|\mathcal{P}| = q + 1$;
- (b) $x = \omega(G_{st})$;
- (c)

$$a = \begin{cases} \max\{\omega(G_i) \mid G_i \in \mathcal{P}/\{G_{st}\}\} & \text{if } q \geq 1; \\ -\infty & \text{otherwise;} \end{cases}$$

即ち、 $\mathcal{P}$ に G_{st} 以外の部分グラフ G_i が存在するならば、それらの内で $\omega(G_i)$ が最大なものの値が a であり、存在しないならば $a = -\infty$ である;

(d)

$$b = \begin{cases} \min\{\omega(G_i) \mid G_i \in \mathcal{P}/\{G_{st}\}\} & \text{if } q \geq 1; \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

直並列グラフ G と $0 \leq q \leq p-1$ なる各整数 q に対して、 $H(G, q)$ は次のように 4 つ組 (x, y, a, b) の集合であると定義する。ここで、 $x, y \in \mathbb{Z}_u$, $a, b \in \mathbb{Z}_u \cup \{-\infty, +\infty\}$ である。

$H(G, q) = \{(x, y, a, b) \mid \text{下の条件 (a) - (e) を満足する分離分割 } \mathcal{P} \text{ が } G \text{ にある}\}$

(a) $|\mathcal{P}| = q + 2$;

(b) $x = \omega(G_s)$;

(c) $y = \omega(G_t)$;

(d)

$$a = \begin{cases} \max\{\omega(G_i) \mid G_i \in \mathcal{P}/\{G_s, G_t\}\} & \text{if } q \geq 1; \\ -\infty & \text{otherwise;} \end{cases}$$

(e)

$$b = \begin{cases} \min\{\omega(G_i) \mid G_i \in \mathcal{P}/\{G_s, G_t\}\} & \text{if } q \geq 1; \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

集合 $F(G, q)$ の任意の要素 (x, a, b) について、 $0 \leq x \leq u$ であり、 $0 \leq a \leq u$ または $a = -\infty$ であり、 $0 \leq b \leq u$ または、 $b = +\infty$ である。したがって $|F(G, q)| \leq (u+2)^3$ である。同様に $|H(G, q)| \leq (u+2)^4$ である。 G の二分分解木 T の葉から根 r に向かって各節点 v に対して、集合 $F(G_v, q)$ と $H(G_v, q)$ を動的計画法によって計算する。 $G = G_r$ なので、次の補題は明らかに成立する。

補題 1. 直並列グラフ G が (p, l, u) -連結分割を持つための必要十分条件は、次の (a) あるいは (b) が成り立つことである。

(a) $l \leq x \leq u$ なる要素 (x, a, b) が集合 $F(G_r, p-1)$ に存在する。

(b) $l \leq x \leq u$ および $l \leq y \leq u$ なる要素 (x, y, a, b) が集合 $H(G_r, p-2)$ に存在する。

$|F(G_r, p-1)| + |H(G_r, p-2)| \leq (u+2)^3 + (u+2)^4 = O(u^4)$ であるので、 $F(G_r, p-1)$ と $H(G_r, p-2)$ が求まっていれば、補題 1 により G に (p, l, u) -連結分割があるかどうかは $O(u^4)$ 時間でわかる。

グラフ G の (p, l, u) -連結分割 $\mathcal{P} = \{G_1, G_2, \dots, G_p\}$ の公平度 $f(\mathcal{P})$ を、

$$f(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq i \leq p} \omega(G_i) - \min_{1 \leq i \leq p} \omega(G_i)$$

と定義し、 G の (p, l, u) -最小公平度 $f(G)$ を、

$$f(G) = \min\{f(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ は } G \text{ の } (p, l, u)\text{-連結分割}\}$$

と定義する。ただし、 G に (p, l, u) -連結分割がないときは、 $f(G) = +\infty$ と定義する。本文では、簡単のため、与えられたグラフ G の (p, l, u) -最小公平度 $f(G)$ を計算するアルゴリズムを与える。そのアルゴリズムを少し修正すれば、 (p, l, u) -公平連結分割 $\mathcal{P}$ を具体的に求めることができる。

グラフ G の (p, l, u) -最小非分離公平度 $f_F(G)$ を

$$f_F(G) = \min\{\max\{x, a\} - \min\{x, b\} \mid (x, a, b) \in F(G, p-1), l \leq x \leq u\}$$

と定義する。ただし、 $l \leq x \leq u$ なる $(x, a, b) \in F(G, p-1)$ が存在しないときには、 $f_F(G) = +\infty$ と定義する。また、 G の (p, l, u) -最小分離公平度 $f_H(G)$ を

$$f_H(G) = \min\{\max\{x, y, a\} - \min\{x, y, b\} \mid (x, y, a, b) \in H(G, p-2), l \leq x, y \leq u\}$$

と定義する。ただし、 $l \leq x, y \leq u$ なる $(x, y, a, b) \in H(G, p-2)$ が存在しないときには、 $f_H(G) = +\infty$ と定義する。

このとき、明らかに $f(G) = \min\{f_F(G), f_H(G)\}$ である。 $F(G, p-1)$ と $H(G, p-2)$ が求まっていれば、 $f_F(G)$ と $f_H(G)$ が、したがって $f(G)$ が容易に $O(u^4)$ 時間で計算できる。集合 $F(G, q)$ と $H(G, q)$ を計算するアルゴリズムを次節で述べる。

4. アルゴリズムの詳細

本節では集合 $F(G, q)$ と $H(G, q)$ を計算するアルゴリズムの詳細を与える。与えられた直並列グラフ G の二分分解木 T の葉から根 r に向かって T の各節点 v に対し集合 $F(G_v, q)$ と $H(G_v, q)$ を求めていく。ここで $0 \leq q \leq p-1$ である。いま、 v が T の葉である場合と、内部節点である場合の 2 通りがある。

(i) v が T の葉であるとき

v が T の葉であるとき、 G_v は図 2(a) のように 1 本の辺 (s, t) からなるので、 G_v の非分離分割 $\mathcal{P}$ は $\mathcal{P} = \{G_{st}\}$ であり、 $G_{st} = G_v$, $\omega(G_{st}) = \omega(s) + \omega(t)$ であり、 $\mathcal{P}$ には端子 s および t を含まない部分グラフはなく、 $q = 0$ である。したがって、

$$F(G_v, q) = \begin{cases} \{(\omega(s) + \omega(t), -\infty, +\infty)\} & \text{if } q = 0; \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。同様に

$$H(G_v, q) = \begin{cases} \{(\omega(s), \omega(t), -\infty, +\infty)\} & \text{if } q = 0; \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。このように、 T の各葉 v に対して、 $0 \leq q \leq p-1$ なる全ての整数 q に対する $F(G_v, q)$ と $H(G_v, q)$ は $O(p)$ 時間で計算できる。 G は単純直並列グラフであるので、 G に点が n 個あるとき辺は多くとも $2n-3$ 本しかなく、 T に葉は多くとも $2n-3$ 個しかない。したがって、 T の全ての葉に対する $F(G_v, q)$ と $H(G_v, q)$ は $O(pn)$ 時間で計算できる。

(ii) v が T の内部節点であるとき

このとき、次のように v は並列接続あるいは直列接続に対応している。

(ii-a) v が並列接続に対応している場合

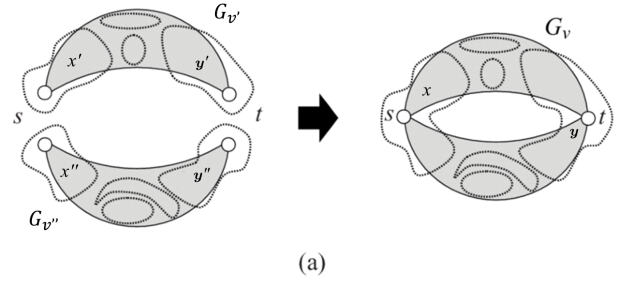
T の節点 v の子供を v', v'' とすると、 G_v は $G_{v'}$ と $G_{v''}$ を図2(c)のように並列接続して得られる。 G_v の端子を s, t とする。 $F(G_{v'}, q')$ と $H(G_{v''}, q'')$ から $F(G_v, q)$ と $H(G_v, q)$ を計算する。

最初に $H(G_v, q)$ の計算方法を説明する。図6(a)に示すように、 $G_{v'}$ の分離分割 $\mathcal{P}'$ と $G_{v''}$ の分離分割 $\mathcal{P}''$ を合併して、 G_v の分離分割 $\mathcal{P}$ が得られる。したがって、 $H(G_v, q)$ は $H(G_{v'}, q')$ と $H(G_{v''}, q'')$ から次のように計算できる。

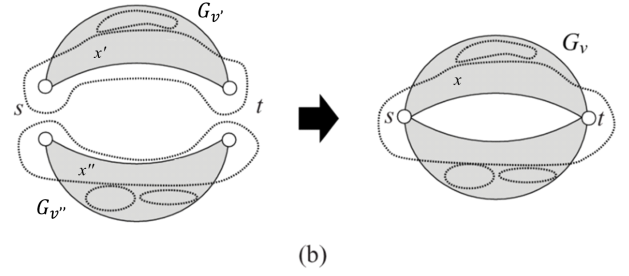
$$H(G_v, q) = \{(x, y, a, b) \mid \text{下の条件 (1) - (5) を満足する} \\ (x', y', a', b') \in H(G_{v'}, q') \text{ および } (x'', y'', a'', b'') \in H(G_{v''}, q'') \text{ が存在する} \}$$

- (1) $q = q' + q''$;
- (2) $x = x' + x'' - \omega(s)$;
- (3) $y = y' + y'' - \omega(t)$;
- (4) $a = \max\{a', a''\}$;
- (5) $b = \min\{b', b''\}$.

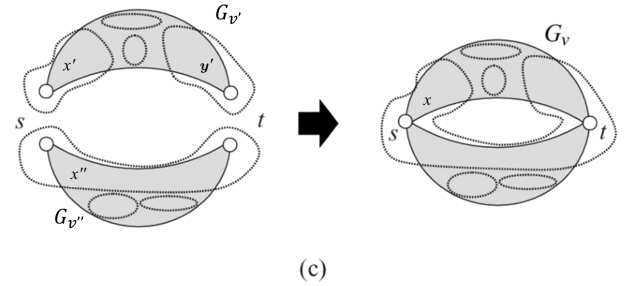
次に $F(G_v, q)$ の計算方法を説明する。図6(b)–(d)のように、 $G_{v'}$ の分割 $\mathcal{P}'$ と $G_{v''}$ の分割 $\mathcal{P}''$ を合併して G_v の非分離分割 $\mathcal{P}$ が得られる。ただし、図6(b)のように $\mathcal{P}'$ と $\mathcal{P}''$ がともに非分離分割である場合と、図6(c)のように $\mathcal{P}'$ が分離分割であり、 $\mathcal{P}''$ が分離分割である場合と、図6(d)のように $\mathcal{P}'$ が非分離分割であり、 $\mathcal{P}''$ が分離分割である場合の3通りがある。したがって $F(G_v, q)$ は次のように計算できる。



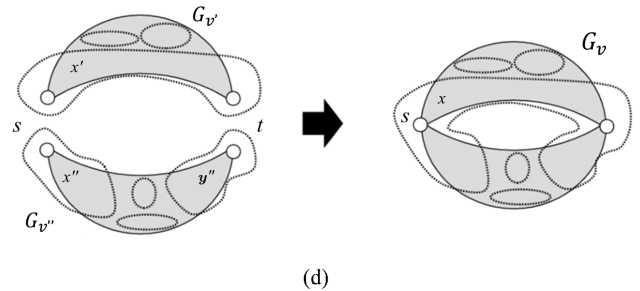
(a)



(b)



(c)



(d)

図6 $G_{v'}$ と $G_{v''}$ を並列接続して G_v が得られるときの、 $G_{v'}$ の分割 $\mathcal{P}'$ 、 $G_{v''}$ の分割 $\mathcal{P}''$ およびそれらを合併して得られる G_v の分割 $\mathcal{P}$

$F(G_v, q) = \{(x, a, b) \mid \text{下の条件 (1),(2),(5) および (6) を満足する} (x', a', b') \in F(G_{v'}, q') \text{ および } (x'', a'', b'') \in F(G_{v''}, q'') \text{ が存在するか, あるいは (1),(3),(5) および (6) を満足する} (x', y', a', b') \in H(G_{v'}, q') \text{ および } (x'', a'', b'') \in F(G_{v''}, q'') \text{ が存在するか, あるいは (1),(4),(5) および (6) を満足する} (x', a', b') \in F(G_{v'}, q') \text{ および } (x'', y'', a'', b'') \in H(G_{v''}, q'') \text{ が存在する} \}$

- (1) $q = q' + q''$;
- (2) $x = x' + x'' - \omega(s) - \omega(t)$;
- (3) $x = x' + y' + x'' - \omega(s) - \omega(t)$;
- (4) $x = x' + x'' + y'' - \omega(s) - \omega(t)$;
- (5) $a = \max\{a', a''\}$;
- (6) $b = \min\{b', b''\}$

いま $\sum_{q=0}^{p-1} (|H(G_v, q)| + |F(G_v, q)|) = O(pu^4)$ であり, $G_{v'}$ および $G_{v''}$ についても同様の式が成立する. したがって, $0 \leq q \leq p-1$ なる全ての q に対する $H(G_v, q)$ および $F(G_v, q)$ は $O(p^2u^8)$ 時間で求まる. 二分分解木 T に葉は高々 $2n-3$ 個しかないので, T に内部節点は高々 $2n-4$ 個しかない. したがって, ラベル p が付いている全ての内部節点 v に対する $F(G_v, q)$ と $H(G_v, q)$ は $O(p^2u^8n)$ 時間で計算できる.

(ii-b) v が直列接続に対応している場合

T の節点 v の子供を v', v'' とすると, $G_{v'}$ と $G_{v''}$ を図 2(b) のように直列接続して G_v が得られる. G_v の端子を s, t とし, 直列接続によって同一視された点を w とする. (図 7 参照.) w は $G_{v'}$ および $G_{v''}$ の端子ではあるが, G_v の端子ではないことに注意しよう. $F(G_{v'}, q')$, $H(G_{v'}, q')$, $F(G_{v''}, q'')$ および $H(G_{v''}, q'')$ から, $F(G_v, q)$ と $H(G_v, q)$ を計算する.

最初に, $F(G_v, q)$ を計算する方法を説明する. 図 7(a) に示すように, $G_{v'}$ の非分離分割 $\mathcal{P}'$ および $G_{v''}$ の非分離分割 $\mathcal{P}''$ を合併して, G_v の非分離分割 $\mathcal{P}$ が得られる. したがって, $F(G_{v'}, q')$ と $F(G_{v''}, q'')$ から $F(G_v, q)$ は次のように計算できる.

$$F(G_v, q) = \{(x, a, b) \mid \text{下の条件 (1) - (4) を満足する} \\ (x', a', b') \in F(G_{v'}, q') \text{ および } (x'', a'', b'') \in \\ F(G_{v''}, q'') \text{ が存在する} \}$$

- (1) $q = q' + q''$;
- (2) $x = x' + x'' - \omega(w)$;
- (3) $a = \max\{a', a''\}$;
- (4) $b = \min\{b', b''\}$.

次に $H(G_v, q)$ の計算方法を説明する. 図 7(b)–(d) のように, $G_{v'}$ の分割 $\mathcal{P}'$ と $G_{v''}$ の分割 $\mathcal{P}''$ を合併して G_v の分離分割 $\mathcal{P}$ が得られる. より詳しくは, 図 7(b) のように $\mathcal{P}'$ が非分離分割であり, $\mathcal{P}''$ が分離分割である場合と, 図 7(c) のように $\mathcal{P}'$ が分離分割であり, $\mathcal{P}''$ が非分離分割である場合と, 図 7(d) のように $\mathcal{P}'$ と $\mathcal{P}''$ がともに分離分割である場合の 3 通りがある. 最後の場合には, $\mathcal{P}$ の部分グラフで点 w を含むものは端子 s および t を含まないので,

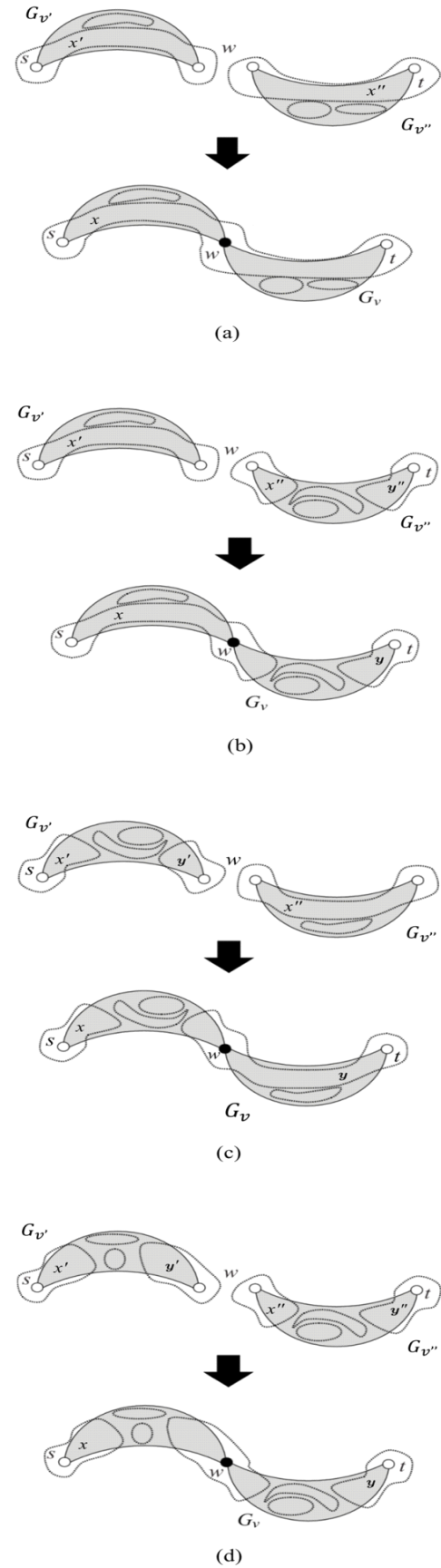


図 7 $G_{v'}$ と $G_{v''}$ を直列接続して G_v が得られるときの, $G_{v'}$ の分割 $\mathcal{P}'$, $G_{v''}$ の分割 $\mathcal{P}''$ およびそれらを合併して得られる G_v の分割 $\mathcal{P}$

$q = q' + q'' + 1$ である。したがって $H(G_v, q)$ は次式で求まる。

$H(G_v, q) = \{(x, y, a, b) \mid \text{下の条件 (1),(4),(5),(7) および (8) を満足する } (x', a', b') \in F(G_{v'}, q') \text{ および } (x'', y'', a'', b'') \in H(G_{v''}, q'') \text{ が存在するか, あるいは (1),(3),(6),(7) および (8) を満足する } (x', y', a', b') \in H(G_{v'}, q') \text{ および } (x'', a'', b'') \in F(G_{v''}, q'') \text{ が存在するか, あるいは (2), (3),(5),(9),(10) および (11) を満足する } (x', y', a', b') \in H(G_{v'}, q') \text{ および } (x'', y'', a'', b'') \in H(G_{v''}, q'') \text{ が存在する } \}$

- (1) $q = q' + q''$;
- (2) $q = q' + q'' + 1$;
- (3) $x = x'$;
- (4) $x = x' + x'' - \omega(w)$;
- (5) $y = y''$;
- (6) $y = y' + x'' - \omega(w)$;
- (7) $a = \max\{a', a''\}$;
- (8) $b = \min\{b', b''\}$;
- (9) $l \leq y' + x'' - \omega(w) \leq u$;
- (10) $a = \max\{a', a'', y' + x'' - \omega(w)\}$;
- (11) $b = \min\{b', b'', y' + x'' - \omega(w)\}$.

このようにして, $0 \leq q \leq p-1$ なる全ての q に対する $F(G_v, q)$ および $H(G_v, q)$ は $O(p^2 u^8)$ 時間で求まる。したがって T のラベル s がついている全ての節点 v に対する $F(G_v, q)$ および $H(G_v, q)$ は $O(p^2 u^8 n)$ 時間で計算できる。

以上のようにして, T の全ての節点 v に対する $F(G_v, q)$ と $H(G_v, q)$ は $O(p^2 u^8 n)$ 時間で計算できる。 T の根 r に対して $G = G_r$ であり, 節 3 で示したように $F(G_r, p-1)$ と $H(G_r, p-2)$ から $f(G)$ が $O(u^4)$ 時間で計算できる。したがって, 次の定理が得られる。

定理 1. 直並列グラフ G の (p, l, u) -最小公平度 $f(G)$ は $O(p^2 u^8 n)$ 時間で計算できる。特に全ての点重みが 1 ならば, むろん $u \leq n$ であり, 多項式時間 $O(p^2 n^9)$ で求まる。

5. 部分 k -木

部分 k -木, 即ち木幅が限定されたグラフのクラスには, 木, 外平面グラフ, 直並列グラフ等が含まれる [2]。本節では部分 k -木 G の (p, l, u) -最小公平度 $f(G)$ を計算するアルゴリズムを与える。それは節 4 の直並列グラフに対するア

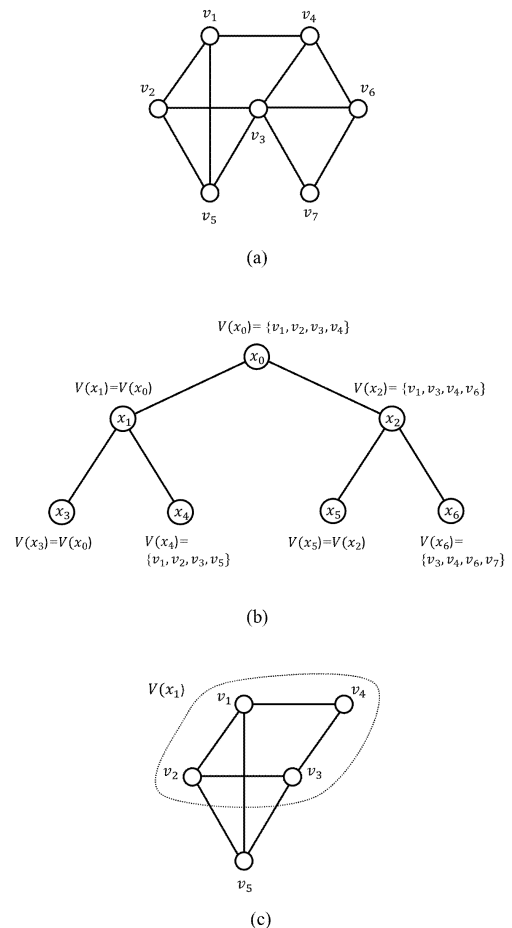


図 8 (a) 部分 3-木 G , (b) 二分分解木 T , (c) 部分グラフ G_{x_1}

ルゴリズムを一般化したものであり, 本文では概要だけを与える。

グラフ G が定整数 k に対し k -木と呼ばれるのは, G が k 個の点からなる完全グラフであるか, あるいは G のある点 v の隣接点が k 個あり, それらが誘導する G の部分グラフが完全グラフであり, $G - \{v\}$ が k -木であるかのいずれかのときである。 k -木の任意の部分グラフは, 部分 k -木と呼ばれる [2]。

直並列グラフは部分 2-木である。部分 k -木 $G = (V, E)$ は, いくつかの“固まり”に分解され, どの固まりにも高々 $k+1$ 個の点が含まれ, それらは木構造をなす。(図 8 参照。) その木構造は G の二分分解木 T と呼ばれる [2]。 T の各節点 v は V の部分集合 $V(v)$ に対応し, $|V(v)| \leq k+1$ であり, v は G の部分グラフ G_v に対応する。 むろん G_v も部分 k -木である。例えば図 8(a) のグラフ G は部分 3-木であり, 図 8(b) は G の二分分解木 T であり, 図 8(c) は T の節点 x_1 に対応する G の部分グラフ G_{x_1} である。

直並列グラフ G には端子が 2 つしかないので, 直並列部分グラフ G_v の分離分割と非分離分割の 2 種類の分割だけを考えればよかった。一方, 部分 k -木では多くの種類の分割を考えないといけない。部分 k -木の部分グラフ G_v では, $V(v)$ の点がいわば端子であり, 高々 $k+1$ 個あり得る。集合

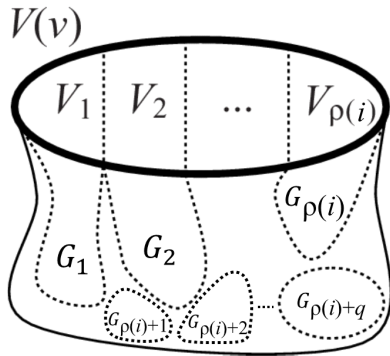


図 9 G_v の $(\rho(i) + q)$ -連結分割

$V(v)$ の互いに素であり、空でない部分集合への分割の総数を π としよう。 $|V(v)| \leq k+1$ であるので、 $\pi \leq (k+1)^{k+1}$ であり、 k は定数であるので、 π も定数である。 G_v の π 種類の連結分割を考える。 $1 \leq i \leq \pi$ なる各 i に対し、集合 $V(v)$ の i 番目の分割を $\mathcal{V}_i = \{V_1, V_2, \dots, V_{\rho(i)}\}$ とする。 むろん $V(v) = \bigcup_{j=1}^{\rho(i)} V_j$ であり、 $1 \leq \rho(i) \leq |V(v)| \leq k+1$ である。(図 9 参照。) $0 \leq q \leq p-1$ とし、 G_v の $\rho(i) + q$ 個の連結部分グラフ $G_1, G_2, \dots, G_{\rho(i)+q}$ への分割 $\mathcal{P}$ を考えよう。 ただし、 $1 \leq j \leq \rho(i)$ なる各 j について、 $V(G_j) \cap V(v) = V_j$ および $\omega(G_j) \leq u$ である。 ここで $V(G_j)$ はグラフ G_j の点集合である。 また $\rho(i) + 1 \leq j \leq \rho(i) + q$ なる各 j について、 $V(G_j) \cap V(v) = \emptyset$ および $l \leq \omega(G_j) \leq u$ である。 G_v のこの連結分割 $\mathcal{P}$ に $(\rho(i) + 2)$ -組 $(x_1, x_2, \dots, x_{\rho(i)}, a, b)$ を対応させる。 ここで、 $1 \leq j \leq \rho(i)$ なる各 i について $x_j = \omega(G_j)$ であり、

$$a = \max\{\omega(G_j) \mid \rho(i) + 1 \leq j \leq \rho(i) + q\},$$

$$b = \min\{\omega(G_j) \mid \rho(i) + 1 \leq j \leq \rho(i) + q\}$$

である。 上のような G_v の連結分割 $\mathcal{P}$ 全てに対応する $(\rho(i) + 2)$ -組 $(x_1, x_2, \dots, x_{\rho(i)}, a, b)$ からなる集合 $H_i(G_v, q)$ を、 $1 \leq i \leq \pi$ なる各 i および $0 \leq q \leq p-1$ なる各 q に対し定義する。 このとき、木 T の内部節点 v の子供を v', v'' としたとき、 $H_i(G_v, q)$ は $H_{i'}(G_{v'}, q')$ と $H_{i''}(G_{v''}, q'')$ から計算できる。 いま $|H_i(G_v, q)| \leq (u+2)^{\rho(i)+2}$ であり、 $\rho(i) \leq k+1$ であり、 $1 \leq i \leq \pi$ であるので

$$|\sum_{i=1}^{\pi} \sum_{q=1}^{p-1} H_i(G_v, q)| \leq \pi p(u+2)^{k+3}$$

である。 したがって、全ての i と全ての q に対する $H_i(G_v, q)$ は $O(p^2 u^{2k+6} n)$ 時間で求まる。 ここでオーダーによって隠された係数は $\pi^2 (\leq (k+1)^{2(k+1)})$ である。

T に内部節点 v は高々 $O(n)$ 個しかないので、この計算にかかる時間の合計は $O(p^2 u^{2k+6} n)$ である。 木 T の根 r に対し $G = G_r$ であるので、 $H_i(G_r, q)$ から G の最小公平度 $f(G)$ は容易に計算できる。 以上により、本文のアルゴリズムの部分 k -木に対する計算時間は $O(p^2 u^{2k+6} n)$ である。

6. むすび

本文では、グラフ G の (p, l, u) -最小公平度 $f(G)$ を計算するアルゴリズムを与えた。 G が直並列グラフならば $O(p^2 u^8 n)$ 時間で計算でき、 G が部分 k -木ならば $O(p^2 u^{2k+6} n)$ 時間で計算できる。 特に点重みが全て 1 のとき、本アルゴリズムは多項式時間で走る。 本文のアルゴリズムを多少修正すれば、 (p, l, u) -公平連結分割を具体的に求めることができる。 $l = 0$, $u = W$ なる (p, l, u) -公平連結分割は p -公平連結分割である。

一般にグラフ G の (p, l, u) -連結分割 $\mathcal{P} = \{G_1, G_2, \dots, G_p\}$ のコスト $f_{\text{cost}}(\mathcal{P})$ は、 $\omega(G_1), \omega(G_2), \dots, \omega(G_p)$ から多項式時間で計算できるとしよう。(節 3 の公平度 $f(\mathcal{P})$ はそのような $f_{\text{cost}}(\mathcal{P})$ の一例である。) G の最小連結分割コスト $f_{\text{cost}}(G)$ を

$$f_{\text{cost}}(G) = \min\{f_{\text{cost}}(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ は } G \text{ の } (p, l, u)\text{-連結分割}\}$$

と定義しよう。 直並列グラフ G や部分 k -木 G に対しては、本文のアルゴリズムを修正すれば、多くのコスト関数 $f_{\text{cost}}(\mathcal{P})$ に関して G の最小連結分割コスト $f_{\text{cost}}(G)$ を擬多項式時間で計算することができる。

直並列グラフや部分 k -木に対して多項式時間や線形時間で解ける問題のクラスが特徴付けられている [2,5]。 p -公平連結分割問題のように擬多項式時間で解ける問題のクラスの特徴付けは今後の課題である。

謝辞 本研究は文部科学省私立大学戦略的研究基盤形成支援事業 (平成 22~平成 26) から一部援助を受けた。

参考文献

- [1] B. Bozkaya, E. Erkut, and G. Laporte, A tabu search heuristic and adaptive memory procedure for political districting, Eur. J. Oper. Res., Vol. 144, pp. 12-26, 2003.
- [2] B. Courcelle and J. Engelfried, Graph Structure and Monadic Second-Order Logic, A Language-Theoretic Approach, Cambridge Univ. Press, 2012.
- [3] R. C. Gonzalez and P. Wintz, Digital Image Processing, Addison-Wesley, Reading, MA, 1977.
- [4] T. Ito, X. Zhou and T. Nishizeki, Partitioning a graph of bounded tree-width to connected subgraphs of almost uniform size, J. Discrete Algorithms, Vol. 4, pp. 142-154, 2006.
- [5] K. Takamizawa, T. Nishizeki and N. Saito, Linear-time computability of combinatorial problems on series-parallel graphs, J. Assoc. Comput. Mach., Vol. 29, No. 2, pp. 623-641, 1982.
- [6] D. C. Tsichritzis and P. A. Bernstein, Operating Systems, Academic Press, New York, 1974.
- [7] J. C. Williams Jr., Political redistricting: A review, Regional Science, Vol. 74, No. 1, pp. 13-40, 1995.