

# 囲碁の攻合いの数理的解析 — 組合せゲーム理論に基づく手数の評価法

中 村 貞 吾<sup>†</sup>

組合せゲーム理論は、全体の局面が独立した部分局面の和に分解できるようなゲームの解析に大きな威力を発揮する。囲碁はそういった部分性の強いゲームであり、これまでに、組合せゲーム理論を最終盤のヨセの解析に適用して、プロ棋士でも悩まされるような複雑なヨセ問題に対して見事に正解を与えたり、眼形の解析において後手1眼や先手1眼などの概念を数学的に明確に説明したりするなどの素晴らしい成果が得られている。我々は、囲碁に対するこの理論の新たな適用分野として「攻合い」を取り上げ、その数理的解析を行う。攻合いとは、眼のない石どうしが生きるために互いに相手の石を取ろうとしている局面であるが、複雑な攻合いに勝つためには手数を削減/延長するための様々な技術と深い探索が必要とされるため、攻合いは上級者にとっても大変難しい問題である。本論文では、攻合いにおける部分局面ごとの手数を組合せゲーム理論を用いて表現した後、温度が2度の冷却操作を適用することによって、複雑な攻合いの勝敗がヨセと同様の計算によって判定できることを示す。本論文の手法を用いることにより、攻合い局面全体を探索するのに比べて探索量を大幅に削減することが可能となる。

## Mathematical Analysis of Capturing Races of Go — Counting Liberties Using Combinatorial Game Theory

TEIGO NAKAMURA<sup>†</sup>

Combinatorial game theory (CGT) has been applied to many kinds of existing games and has produced a lot of excellent results. In case of the game of Go, applications of CGT have been focused on endgames and eyespace values so far. Moreover, it can be applied to any situations that involve counting. In this paper, we will show another application of CGT to Go, that is, to count liberties in capturing races. Capturing race is a particular kind of life and death problem in which two adjacent opposing groups are fighting to capture the opponent's group each other. In order to win a complicated capturing race, various techniques in counting liberties, taking away the opponent's liberties and extending self-liberties are required in addition to wide and deep reading. Human expert players usually count liberties for each part of blocks involved in a capturing race, sum up them and decide the outcome. A position of a capturing race can also be decomposed into independent sub positions like the cases of endgames and eyespaces. This paper proposes a method of analyzing capturing races that have no shared liberty or have only simple shared liberties. We show an evaluation formula to find out the outcome of the capturing races using combinatorial game values of external liberties.

### 1. はじめに

組合せゲーム理論<sup>2),4)</sup> (Combinatorial Game Theory; CGT) (これ以降、本文中ではCGTと略記する) は、全体の局面が独立した部分局面の和に分解できるようなゲームの解析に大きな威力を発揮する。囲碁はそういった部分性の強いゲームであり、また、囲碁というゲーム自体が興味深くチャレンジングな対象であ

るため、この理論を囲碁に適用して数理的解析を行うことが、囲碁研究ならびにCGT研究の両者の発展に寄与することになる。こうした背景の下で、この理論を囲碁に適用した研究としては、これまでにヨセの解析と眼形の解析が行われてきた。特に Berlekamp らによる “Mathematical Go”<sup>3)</sup> は、1目を争う最終盤のヨセ局面を数学的に厳密に解析する手段を与え、プロ棋士でも悩まされるような複雑なヨセ問題に対して見事に正解を与えるといった素晴らしい成果を残している。そして最近では、より複雑な形のヨセ局面の解析やコウを含む局面を一般的に解析する手法に関す

<sup>†</sup> 九州工業大学  
Kyushu Institute of Technology

る研究などが行われている<sup>1),8),10)~12)</sup>。また、「眼形の解析」については、Landman が、眼の数をスコアとするゲームを用いて、「後手 1 眼 (半眼)」や「先手 1 眼」などの概念に加えて、囲碁用語が与えられていないような概念までも数学的に明確に説明している<sup>5)</sup>。

本論文は、囲碁に対するこの理論の新たな適用分野として「攻合い」を取り上げ、攻合いにおける手数計算を CGT に基づいて行うことにより、一般に深い探索を必要とするような複雑な攻合いの勝敗の判定が、ヨセと同様の計算によって行えることを示すものである。

攻合いに関する関連研究としては、Müller の研究<sup>7)</sup>がある。そこでは、攻合いの対象となっている石群の外ダメと内ダメの状態、眼形の有無とタイプを分類し、相手のダメを 1 手ずつ単調に詰め合うような単純な攻合いについて、「眼あり眼なし」や「大ナカ小ナカ」を含む形の攻合い勝ちとなる条件が示されている。また、Nakamura<sup>9)</sup>は、複数の石群がからみ合った複雑な攻合いに対する解析法を示している。しかし、これらの研究で扱われているダメ数 (手数) は、いずれも相手が 1 手ダメを詰めることによって 1 手ずつ減少していくような単純な数であるため、その適用の範囲が限られている。実際の攻合いでは、味方の石と連絡することによって手数を延ばしたり、相手を切断することによって相手の手数を一気に縮めたり、相手の弱点をつくことによって相手に余分に手数をかけさせたりするなど、攻合いにおける手数は一般的には単純な数値ではなく、各プレイヤーが着手することによって変化するゲーム局面であると見なす必要があるのである。

本論文の構成は次のようになっている。まず、2 章で CGT の基本的な概念について説明した後、3 章で攻合いに関する Müller の成果を簡単に紹介して本論文で扱う攻合いについて述べる。そして、4 章で攻合い問題を CGT を用いて表現し、冷却法を用いてその勝敗を判定する手法を提案する。5 章では囲碁の攻合い局面の解析例を示して本手法の有効性を示す。

2. 組合せゲーム理論 (CGT)

ここでは、本論文で必要となる CGT に関する基本的な概念と記法について説明する。

定義 2.1 (ゲーム)

ゲーム局面  $G$  は以下のように再帰的に定義される。

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \{G_1^L, G_2^L, \dots \mid G_1^R, G_2^R, \dots\}$$

ここで、 $G_i^L$  は  $G$  に対して Left (黒) が着手してでき

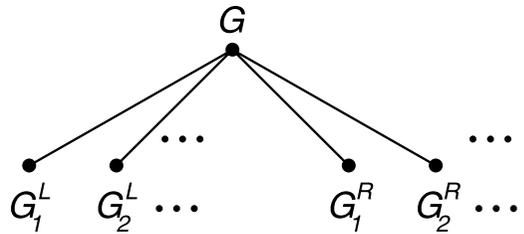


図 1 ゲーム木  
Fig.1 Game tree.

るゲーム局面 (left follower) で、 $G_i^R$  は Right (白) が着手してできる局面 (right follower) である。合法手がない場合は  $G_i^L$  および  $G_i^R$  は存在しないため空となる。Left と Right がともに合法手を持たないゲームである  $\{ \mid \}$  は零ゲーム (すなわち 0) と呼ばれ、手番を持つ側が負けとなる最も基本的なゲームである。

ゲームは left follower を左向きの枝、right follower を右向きの枝とする図 1 のようなゲーム木で表されることもある。

定義 2.2 (ゲームの和)

2 つのゲーム  $G$  と  $H$  を合わせたゲーム、すなわちゲームの和  $G + H$  は以下のように定義される。

$$G + H \stackrel{\text{def}}{=} \{G^L + H, G + H^L \mid G^R + H, G + H^R\}$$

和  $G + H$  に対してその要素である  $G$  と  $H$  はサマンド (summand) と呼ばれる。

定義 2.3 (反転)

$G$  において Left と Right を入れ換えたゲーム (囲碁では、黒石と白石を交換した局面に相当する) を  $G$  の反転と呼び  $-G$  と書く。

$$-G \stackrel{\text{def}}{=} \{-G^R \mid -G^L\}$$

定義 2.4 (数)

整数、および、2 のべき乗を分母とするような分数は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \mid \} \\ n+1 &\stackrel{\text{def}}{=} \{n \mid \} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ \frac{m}{2^k} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{m-1}{2^k} \mid \frac{m+1}{2^k} \right\} \quad (k \text{ は正整数, } m \text{ は奇数}) \end{aligned}$$

したがって、たとえば、次にあげるようなものが数である。

$$\begin{aligned} 1 &= \{0 \mid \}, \quad 2 = \{1 \mid \}, \quad 3 = \{2 \mid \}, \quad \dots \\ \frac{1}{2} &= \{0 \mid 1\}, \quad \frac{1}{4} = \left\{0 \mid \frac{1}{2}\right\}, \quad \frac{5}{8} = \left\{\frac{1}{2} \mid \frac{3}{4}\right\}, \quad \dots \end{aligned}$$

定義 2.5 (大小関係)

ゲーム  $G$  はその勝敗に応じて以下の 4 種類のいずれかのクラスに分類され、それは 0 との間の大小関係

と次のように対応している .

- (手番によらず) Left の勝ち  $\iff G > 0$
- (手番によらず) Right の勝ち  $\iff G < 0$
- 先着側の負け  $\iff G = 0$
- 先着側の勝ち  $\iff G \parallel 0$

最後の  $G \parallel 0$  は  $G$  と  $0$  が比較不能であることを表している .

また, 2つのゲーム  $G$  と  $H$  の大小関係は以下のように定義される .

- $G > H \iff G + (-H) > 0$
- $G < H \iff G + (-H) < 0$
- $G = H \iff G + (-H) = 0$
- $G \parallel H \iff G + (-H) \parallel 0$

定義 2.6 (無限小要素)

0 でないどんな数よりも微小な値を持つようなゲームが存在し, これらは, 無限小要素 (infinitesimal) と呼ばれる . 以下に代表的な無限小要素を示す .

- Star:  $*$   $\stackrel{\text{def}}{=} \{0 \mid 0\}$
- Up:  $\uparrow$   $\stackrel{\text{def}}{=} \{0 \mid *\}$
- Down:  $\downarrow$   $\stackrel{\text{def}}{=} \{*\mid 0\} = -\uparrow$
- Tiny:  $\uparrow_x$   $\stackrel{\text{def}}{=} \{0 \mid \{0 \mid -x\}\}$
- Miny:  $\downarrow_x$   $\stackrel{\text{def}}{=} \{\{x \mid 0\} \mid 0\} = -\uparrow_x$
- DoubleUp:  $\uparrow\uparrow$   $\stackrel{\text{def}}{=} \uparrow + \uparrow$
- UpStar:  $\uparrow*$   $\stackrel{\text{def}}{=} \uparrow + *$

これらの無限小要素に対して次の関係が成立する .

- $x > y > 0$  なる数に対して
- $\uparrow > \uparrow_x > \uparrow * > 0 > \downarrow_x > \downarrow$
- $* + * = 0$
- $\uparrow > * > \downarrow$
- $* \parallel 0, * \parallel \uparrow, * \parallel \downarrow, \uparrow * \parallel 0$

定義 2.7 (冷却)

先手の優位性が大きいゲームは熱い (hot) ゲームであり, これは冷却 (cooling) 操作によって数および無限小要素となる .  $G$  を  $t$  度冷却したゲーム  $Cool(G, t)$  は次のように定義される .

$$Cool(G, t) \stackrel{\text{def}}{=} \{Cool(G^L, t) - t \mid Cool(G^R, t) + t\}$$

ただし, もし  $Cool(G, \tau)$  が数  $x$  と無限小要素だけの差であるような  $\tau (< t)$  が存在する場合は  $Cool(G, t) = x$  とする .

定義 2.8 (平均値と温度)

$G$  を十分に大きな温度で冷却すると数が得られるが,

この値を  $G$  の平均値 (mean value) といい  $m(G)$  と書く . また,  $Cool(G, t)$  が平均値となるような最小の  $t$  を  $G$  の温度 (temperature) といい  $t(G)$  と書く . 温度は, そのゲームへの着手の緊急性の度合い, すなわち, 着手の価値に相当する .

定義 2.9 (stop)

$G$  に対して Left が先着して双方最適にプレイして得られる数を left stop と呼び  $LS(G)$  で表す . また,  $G$  に対して Right が先着して双方最適にプレイして得られる数を right stop と呼び  $RS(G)$  で表す .  $LS(G)$  および  $RS(G)$  は次のように定義される .

$$LS(G) = \begin{cases} G & (G \text{ が数の場合}) \\ \max\{RS(G_i^L)\} & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

$$RS(G) = \begin{cases} G & (G \text{ が数の場合}) \\ \min\{LS(G_i^R)\} & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

3. 囲碁の攻合い

3.1 攻合いに関する用語

攻合いとは「眼のない石どうしが生きるために互いに相手の石を取ろうとしている局面」である . 図 2 に攻合い局面の例を示すとともに, 以下で, 攻合いで用いられる基本的用語について説明する .

対象ブロック (essential block): 攻合いの対象となっている石群 . 図では丸印で示している . 相手方の対象ブロックを取ることが攻合いの目的である . また, 対象ブロックに隣接している空点をダメ (liberty) と呼ぶ .

安全ブロック (safe block): 活着している, あるいは,

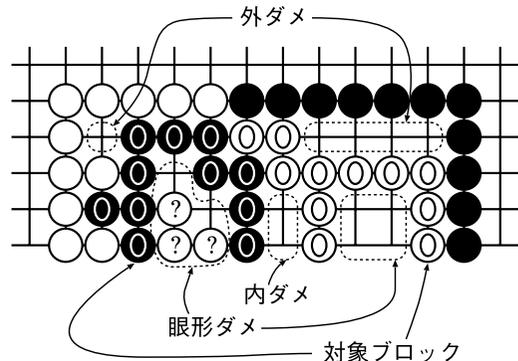


図 2 攻合い局面の例  
Fig. 2 Example of capturing race.

単独で 2 眼を作ることはできず, また, 味方の活着している石に連絡することもできない状況を指す . これは, いわゆる「大ナカ小ナカ」と呼ばれる攻合いの形 .

安全であることが仮定されている石群．攻合いでは、対象ブロックを取り囲んでいる石群は一般に安全ブロックであると見なされる．

不明ブロック (unknown block): 対象ブロックでも安全ブロックでもないブロック．図では?印で示している．不明ブロックが取られても攻合いの勝敗には無関係である．

ダメ領域 (liberty region): 少なくとも1つの対象ブロックとその他の対象ブロックまたは安全ブロックによってよって囲まれる空点および不明ブロックを含む領域．境界となるブロックに両者の対象ブロックが含まれる場合を内ダメ領域 (shared liberty region) , 含まれない場合を外ダメ領域 (external liberty region) と呼ぶ．また、境界が一方の側の対象ブロックのみで構成される領域を眼形領域 (eye region) と呼ぶ．眼形領域はそのサイズに応じて分類され、サイズが0, 1~3, 4, 5, 6, 7の6つのクラスがある．サイズが大きい眼形クラスの方に優位性がある．

外ダメ (external liberty): 外ダメ領域にある対象ブロックのダメ．

内ダメ (shared liberty): 内ダメ領域にある対象ブロックのダメ．このうち、両者の対象ブロックに隣接しているダメを特に単純内ダメ (plain shared liberty) と呼ぶ．

単純ダメ (plain liberty): 対象ブロックのダメのうち、相手方の安全なブロックにのみ隣接しているダメ．すなわち、ダメを詰めるのに余分な手入れを必要とせず1手ずつ単調に確実にダメを詰めることができ、また、相手からの手を延ばす着手も存在しないようなダメを意味する．

眼形ダメ (eye liberty): 眼形領域内のダメ．ナカ手で取る場合には、眼形内部の攻め方の石が何度も打ち上げられるため、ダメ数以上の手数を必要とする<sup>7)</sup>．その手数は、攻合いの勝敗の判定においては外ダメと同様の性質を持つ．

攻撃側 (attacker) と防御側 (defender): 外ダメ領域においては、対象ブロックの側のプレイヤーが防御側プレイヤー、その相手方のプレイヤーが攻撃側プレイヤーとなる．内ダメ領域においては、両者の対象ブロックの眼形クラスに応じて攻撃側プレイヤーと防御側プレイヤーが決まる．

3.2 関連研究

Müller は文献 7) において攻合いをその複雑さに応じて9つのクラスに分類し、その中で

- 互いに唯一の対象ブロックを持ち、ブロックには

— Müller の攻合い判定式 —

$\Delta$  : 攻撃側から見た外ダメの数の優位性  
(対象ブロックの外ダメの数の差)

$S$  : 内ダメの数

$$F = \begin{cases} S & (S = 0 \text{ または 防御側に 1 眼}) \\ S - 1 & (S > 0 \text{ かつ 防御側に 眼がない}) \end{cases}$$

$\Delta \geq F$  ならば攻撃側の攻合い勝ち .....(1)

図 3 Müller の攻合い判定式 Fig. 3 Müller's semeai formula.

眼がないか、または、ナカ手の1眼のみを持つ

- 外ダメも内ダメもすべて単純ダメ

の性質を持つ比較的単純な2つのクラスの攻合いに対して攻撃側が攻合い勝ちとなるための条件を図3に示すように与えている．ここで攻撃側になるのは、対象ブロックの眼形クラスが劣っている側であり、また、 $F$  は防御側の石をアタリにするまでに攻撃側が埋めなければならない内ダメの数を表している．攻撃側が式(1)の条件を満たさない場合、双方の眼形クラスが異なっているか、または、相手方が攻撃側として式(1)を満たすならば相手方の攻合い勝ちとなり、それ以外の場合は、双方共に手出しのできない結末であるセキと判定される．

この判定式を用いると、図2の攻合いでは、黒の眼形クラスは5、白の眼形クラスは4であるため白が攻撃側となり、 $\Delta = (5 + 4) - (5 + 1) = 3$ 、 $F = S = 2$ であるので  $\Delta > F$  となり、手番にかかわらず白の攻合い勝ちと判断される．

この判定式では、ダメがすべて単純ダメ、すなわち、ダメ数が単純な整数値である場合のみを対象としているが、これよりも上のクラスに分類される攻合いではダメ数は双方の着手によって変化するようなゲーム局面である．そこで、攻合いの手数をCGTを用いて表現し、式(1)の結果を単純ダメでないダメを持つ場合の攻合いに拡張しようというのが本論文のねらいである．

4. 組合せゲーム理論を用いた攻合いの解析

4.1 攻合いの手数

攻合いにおいて、対象ブロックのダメをすべて埋めるために必要な攻撃側の着手の回数を手数と呼ぶ．ダ

眼形クラスが同じ場合は、双方が攻撃側になれる．この場合は、相手方は攻撃側にはならない．

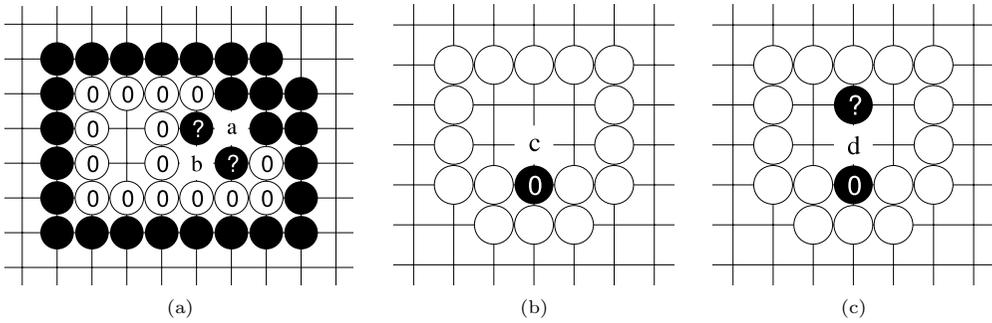


図 4 単純ダメではないダメを持つ対象ブロック  
 Fig. 4 Essential blocks with non-plain liberties.

メが単純ダメの場合はダメ数と手数は一致するが、一般にはダメを詰める前に手入れを必要とする場合があるので、ダメ数は手数の下限となる。

図 4 に単純ダメではないダメを持つ対象ブロックの例を示す(対象ブロックをⓐ, ⓑで表している)。図 4(a) では白の対象ブロックの「ダメ数」は 3 であるが、黒は a に守ってからでないと b に詰められないので「手数」は 4 手である。なお、この領域に白が着手することはない。また、図 4(b)、図 4(c) の両図ともに対象ブロックのダメ数は 1 であり、白が着手すればダメ数は 0 になる。しかし、黒が先着すれば図 4(b) ではダメ数は 3 に、図 4(c) では対象ブロックが上の不明ブロックと連結しダメ数は 4 になる。

このような状況を CGT を用いて手数をスコアとするゲームとして表現する。黒の対象ブロックの手数を正のスコア、白の対象ブロックの手数を負のスコアとする。そして、黒、白双方の着手によってスコアが変化する場合の対象ブロックの手数  $G$  を

$$G = \{G^L \mid G^R\}$$

とする。ここで、 $G^L$  は黒が着手した後の対象ブロックの手数、または、手数を表すゲーム局面、 $G^R$  は白が着手した後の対象ブロックの手数、または、手数を表すゲーム局面である。そうすると、図 4(a)~(c) の手数はそれぞれ、 $-4$ 、 $\{3 \mid 0\}$ 、 $\{4 \mid 0\}$  というゲーム局面になる。

対象ブロックの手数を局面のスコアとして与える手続は一見単純に思えるが、実際には解決すべき微妙な問題が残っている。それは、「どの時点で手数が確定するのか?」という問題である。本来、CGT においては明示的にスコアを与えることは必要ではない。なぜなら、数の概念は合法手の存在を基にした零ゲームから構成的に得られるからである。たとえば、ヨセ局面の解析では、地をスコアとするゲーム局面を考慮していることになっているが、これは、(1) パスの禁止、

(2) 盤上の着手の代わりにアゲハマを 1 つ相手方に返すことを着手として認める、の 2 点をルールに追加してやることで理論の中で自然に実現できる。一方、眼形の解析においては眼の数をスコアとするゲーム局面を考慮する必要があるが、そのためには、眼形を保有する側のプレイヤーに対して 1 目の眼を埋める着手を禁止するだけでよい(攻撃側のプレイヤーの同地点への着手は囲碁のルールによって禁止されている)。これによって、眼形のスコアは、いったん確定してしまえばそれ以降変化することがない。しかし、攻合いにおいては、対象ブロックの手数はつねに変化するスコアである。防御側にとって安全なダメは存在せず、攻撃側はつねに 1 手ずつダメを詰めていくことができる。眼形ダメであっても安全ではなく、ナカ手にして眼形の内側からのダメツメが可能なのである。

そこで、我々は局面のスコアとして確定した手数を割り当てるために悪手を明示的に枝刈りする方法を提案する。対象ブロックにダメが存在する限り合法手は存在するが、実際にはすべての着手が双方のプレイヤーにとって有効な着手というわけではない。攻撃側のプレイヤーには 1 手ずつダメを詰めるという有効手がつねに存在するが、防御側のプレイヤーには有効手が存在しない場合がある。そこで、防御側のプレイヤーの無効な着手を明示的に枝刈りしてその着手を禁止する。

図 5 にこの枝刈り操作の基本的なアイデアを示す。図 5(a) に示す空点(ダメ)が 1 つだけある局面の本来の CGT の値は  $\{0 \mid 0\} = *$  である。一方、図 5(b) では、黒の対象ブロックがダメを 1 つ持っているが、黒の着手は自身のダメを詰める悪手であるので枝刈りされ、その結果、ルートノードである元の局面のスコアとして 1 が付与される(図 5(c))。同様に、対象ブロックが白の場合の枝刈り操作は、図 5(d)、図 5(e) のようになる

また、攻合いとは「眼のない石どうしが活きるため

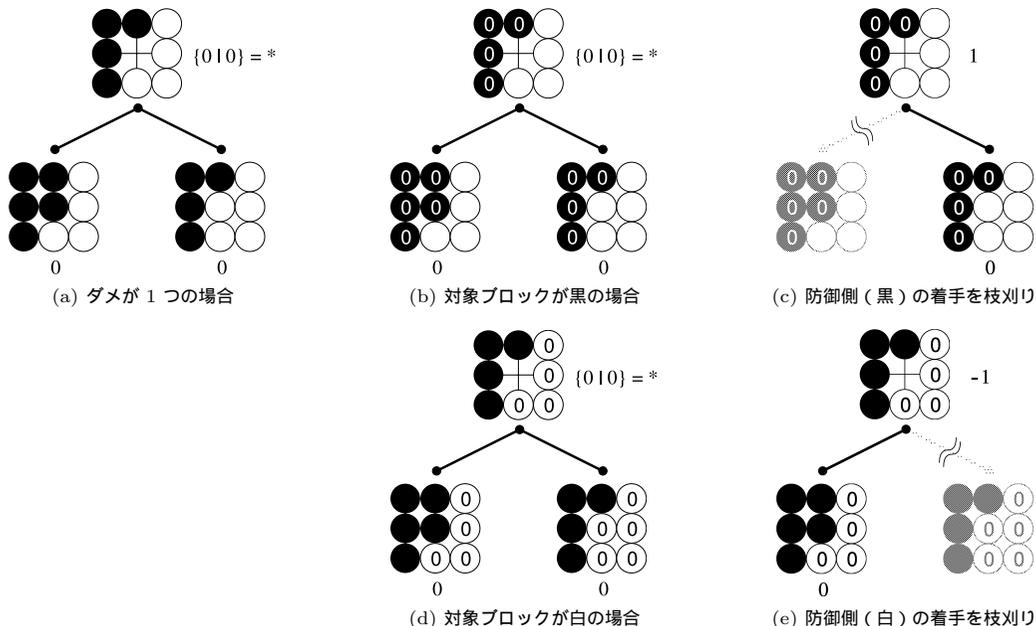


図5 枝刈りによる手数の確定

Fig. 5 Assigning liberty scores by pruning.

に互いに相手の石を取ろうとしている局面」であるので、攻合い全体を見れば必ず攻撃側プレイヤーとなる部分局面は存在する。したがって、攻合いにおいては1手の着手の価値は少なくとも1であることが保証されており、悪手かどうかの判断は着手の価値，すなわち，局面の温度が1以上であるかどうかを調べることによって行うことができる。

手数をスコアとして付与する手続きは図6のようにまとめられる。この手続きを適用して作られたゲーム局面を「手数ゲーム」と呼ぶ。手数ゲームでは、葉以外のすべてのノードの温度が1以上であるという性質が成り立っている。この手続きを用いることによって、たとえば、図7の3つの局面はすべてスコアが1なる数である局面だと見なせるようになる。

4.2 攻合いゲームの評価法

次に、手数ゲームとして表されたダメ領域を部分局面とし、それらの和として構成される以下の性質を持つ「攻合いゲーム」を考える。

- 各ダメ領域内の対象ブロックは1つのみ
- コウは存在しない
- 着手ルールは通常の囲碁と同様で、自殺手は禁止
- すべてのサマンドのダメ領域中のすべての相手方の対象ブロックのダメを先に0にした側の勝ち（最終着手時のみ自殺手も許される）

この攻合いゲームは、内ダメを持たない全体として連

— 手数スコアの付与手続き —

- (1) 対象ブロックのダメ数が0になるまで両プレイヤーの合法手を着手する。
- (2) 葉から根に向かってゲーム木中の各ノードに対して以下の変形操作を順に適用する。
  - ノードの温度が1未満であるとき、そのノードから出る防御側（対象ブロック側）のプレイヤーの着手を枝刈りする。
  - 枝刈りの結果、一方のプレイヤーの着手しか持たないノードの値を次式で置換する。
 
$$\{ |n| \} \implies n + 1$$

$$\{ -n | \} \implies -n - 1$$

図6 手数スコアの付与手続き

Fig. 6 Procedure for assigning liberty score.

結した単一の対象ブロックどうしの攻合いをモデル化したものとなっている。

CGTを用いたヨセの解析や眼形の解析では、1度の温度による冷却操作が局面を解析するうえで重要な役割をはたす<sup>3),5)</sup>。それは、ヨセや眼形においては着手の価値の最小値が0であるからである。一方、攻合いゲームでは、サマンドである手数ゲームのすべてのノードの温度は1度以上、すなわち、着手の最小の価値は1である。したがって、攻合いゲームを1度冷

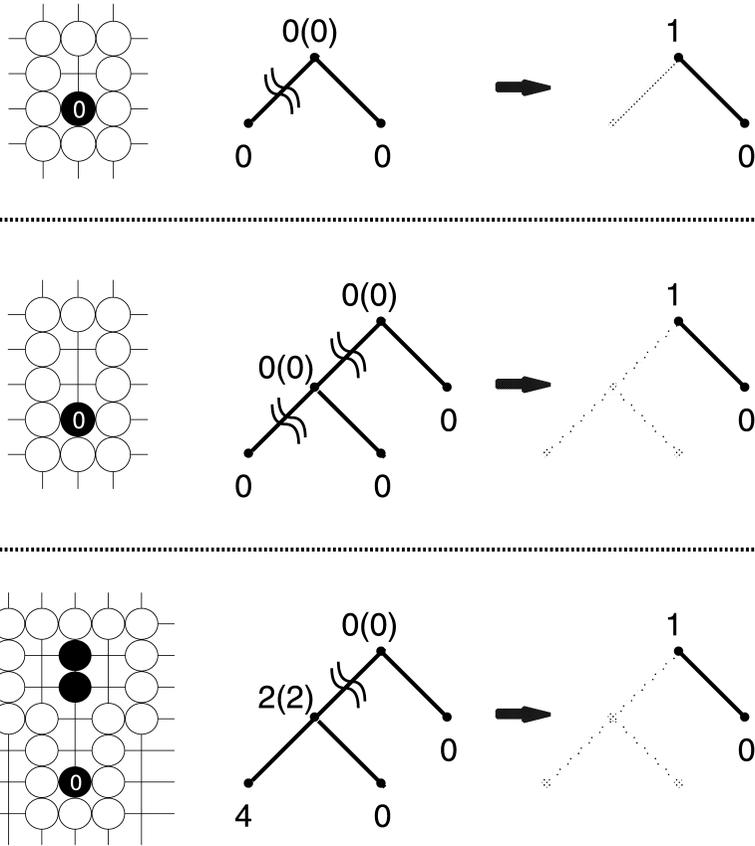


図 7 手数が 1 の対象ブロックの枝刈りの例  
 Fig.7 Example positions having only one liberty.

却することによって、最小の着手の価値が 0 であるようなゲームになり、そこからさらに 1 度冷却することによってヨセと同様の局面評価を行うことができる。すなわち、攻合いゲームの解析には「2 度の冷却」が有効な手段となる。そこで、攻合いゲームの勝敗を判定するための手法として、図 8 に示す判定法を提案する。

図 8 の (2) および (3) で得られた値のことを「 $g$  の調整値」と呼ぶ。この調整値が正しいことは次のようにして説明できる。

たとえばいま、 $n < g < n + 1$  であり、 $g$  が数  $g'$  と無限小要素  $g''$  の和、すなわち  $g = g' + g''$  であるとすると。このとき、 $g'$  は元のゲーム  $G$  の平均値  $m(G)$  と等しく、また、 $G$  の温度は  $t(G) \leq 2$  を満たす。平均値と stop との差は温度を超えることはなく、また、攻合いゲームにおける stop は整数値であるので、 $LS(G)$  の値は最終着手者がどちらのプレイヤーであるかに応じて、 $g' \leq LS(G)$  を満たす最小の整数 (Right が最終着手者の場合)、かまたは、 $LS(G) \leq g' + 2$  を満たす

最大の整数 (Left が最終着手者の場合) となる。ここで、次の 3 通りの場合が考えられる。

- (1)  $g' = n, g'' > 0$  の場合  
 $g'' > 0$  であるので、このときの最終着手者は Left である。したがって、 $LS(G) = n + 2$  となるが、同数着手にするために Right の着手による 1 手を減じた  $n + 1$  が黒の調整値となる。
- (2)  $g' = n + 1, g'' < 0$  の場合  
 $g'' < 0$  であるので、このときの最終着手者は Right である。したがって、 $LS(G) = n + 1$  となり、これが黒の調整値となる。
- (3)  $n < g' < n + 1$  の場合  
 $n + 2 < g' + 2 < n + 3$  であるので、Left が最終着手者の場合は、 $LS(G) = n + 2$  となり、同数着手にするために 1 を減じて調整値は  $n + 1$  となる。Right が最終着手者の場合は、 $n < g' \leq LS(G)$  より、 $LS(G) = n + 1$  が得られる。  
 以上より、いずれの場合でも  $n < g < n + 1$  の場合の黒の調整値は  $n + 1$  であることが示された。

— 攻合いゲームの勝敗の判定法 —

$G$  を攻合いゲームとして、 $G$  を 2 度冷却した値を  $g$  とする．すなわち、 $g = Cool(G, 2)$  とする．また、 $n$  をある整数値とする．

(1)  $g = n$  のとき

- $g > 0$  ならば 黒勝
- $g < 0$  ならば 白勝
- $g = 0$  ならば 先着した側の勝

(2)  $n < g < n + 1$  のとき

$G$  に黒が先着すると「同数着手」によって、手番を黒に保ったまま値を  $n + 1$  にできる．白が先着した場合は「同数着手」の後、値を  $n$  にできる．そして、得られた値を (1) の方法で評価する．

(3)  $g \parallel n$  のとき

$G$  に黒が先着すると「同数着手」の後、値を  $n + 1$  にできる．白が先着した場合は「同数着手」の後、値を  $n - 1$  にできる．そして、得られた値を (1) の方法で評価する．

図 8 攻合いゲームの勝敗の判定法

Fig. 8 Evaluation method of semeai game.

— 拡張された攻合い判定式 —

$G$  : 対象ブロックの内ダメを除く部分の攻合いゲーム  
 $\Delta'$  :  $Cool(G, 2)$  の攻撃側への調整値  
 $S$  : 内ダメの数  
 $F = \begin{cases} S & (S = 0 \text{ または 防御側に 1 眼}) \\ S - 1 & (S > 0 \text{ かつ 防御側に 眼がない}) \end{cases}$   
 $\Delta' \geq F$  ならば攻撃側の攻合い勝ち …… (2)

図 9 拡張された攻合い判定式

Fig. 9 Extended semeai formula.

4.3 Müller の判定式の拡張

以上の結果を 3 章で示した Müller の攻合い判定式に組み込むことで、判定式の適用範囲を拡張することができる．拡張された判定式を図 9 に示す．これは文献 7) の判定式の自然な拡張になっており、そこで示されている「攻合い勝」や「セキ」などの判定条件は本手法においてもそのまま適用することができる．

5. 攻合いの解析例

5.1 攻合い問題の解析

前章の結果を用いた攻合い問題の解析例を以下に示す．図 10 (a) ~ (d) は、いずれも 1 度よりも大きい温度を持つ部分局面を含んだ攻合い問題である．そして、図 12 はその解析結果であり、問題図中のダメ領域の手数ゲームを冷却したものを Mathematical Go<sup>3)</sup> と同様の形式で表している．小さな黒丸と白丸は、領域のスコアの整数部分のマーキングで、図 12 (a) ~ (d) のいずれも白のマークの方が 1 つ多くなっていて、合計値の整数部分が  $-1$  であることを意味している．領域中には、整数部分以外の値 (小数や無限小要素) も示している．図のキャプションにあるのはマーキングを含めた攻合いゲーム全体の冷却値である．いずれも、黒の調整値は 0 となるので黒が勝てる．勝ち手がある場合にどの領域に着手すべきかは文献 3) の付録 E の表 E.9 によって与えられ、図中の  $\blacktriangle$  が推奨される勝ち手、 $\blackstar$  は別の勝ち手である．図 10 (a) ~ (c) では左側の黒の対象ブロック部分の局面は同一で、右側の白の対象ブロックの部分のみが異なっている．その共通部分のゲーム局面のゲーム木を図 11 に示す (括弧内の値は局面の温度を表している)．図 11 (a) の局面は  $\{4 \mid 0\}$  であるので、冷却値は  $2*$  となる．図 11 (b) の局面は  $\{6 \mid \{4 \mid 0\}\}$  であるので、その冷却値は  $4\uparrow$  である．図 10 (a) の右側の白の対象ブロックのスコアは  $-7$  であるので、問題 A の全体の冷却値  $g$  は  $g = (2*) + (4\uparrow) + (-7) = -1\uparrow*$  となるが、 $-1\uparrow* \parallel -1$  であるので黒の調整値は 0 となり、黒は勝つことができる．この場合、黒は  $*$  の領域に着手するのが唯一の正解手である．もし黒が初手で  $\uparrow$  の領域に着手した場合は、黒は勝てないことに注意する．一方問題 B では、右方の部分局面は  $\{-5 \mid -9\}$  であるので冷却値は  $-7*$  となり、冷却値の合計は  $g = (2*) + (4\uparrow) + (-7*) = -1\uparrow > -1$  となる．同様に黒の調整値は 0 となるため黒は勝つことができるが、問題 A と違って問題 B での黒の正解手は  $\uparrow$  の領域への着手である．もし黒が初手で  $*$  の領域に着手した場合は黒は勝てないことに注意する．問題 C の右方の部分局面は  $\{-5 \mid -8\}$  でありその冷却値は  $-6\frac{1}{2}$  となるので、合計値  $g$  は  $-\frac{1}{2}\uparrow*$  となる． $0 > -\frac{1}{2}\uparrow* > -1$  であるので黒の調整値は 0 となり黒は勝つことができる．問題 C では黒は初手で  $*$  と  $\uparrow$  のいずれの領域に着手してもよい．問題 D では、冷却値の合計が  $g = -6\frac{1}{2} + 2\frac{7}{8} + 2\frac{3}{4} = -\frac{7}{8}$  となるので、黒の調整値は 0 となり黒が勝てる．この図に

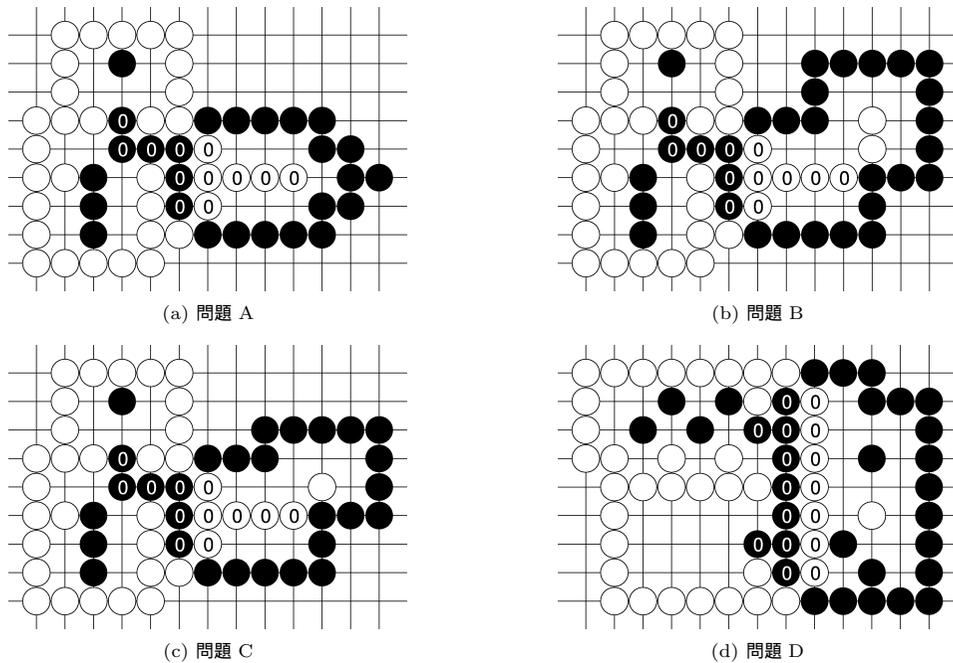


図 10 攻合い問題 (黒先)  
Fig. 10 Problems (Black plays first).

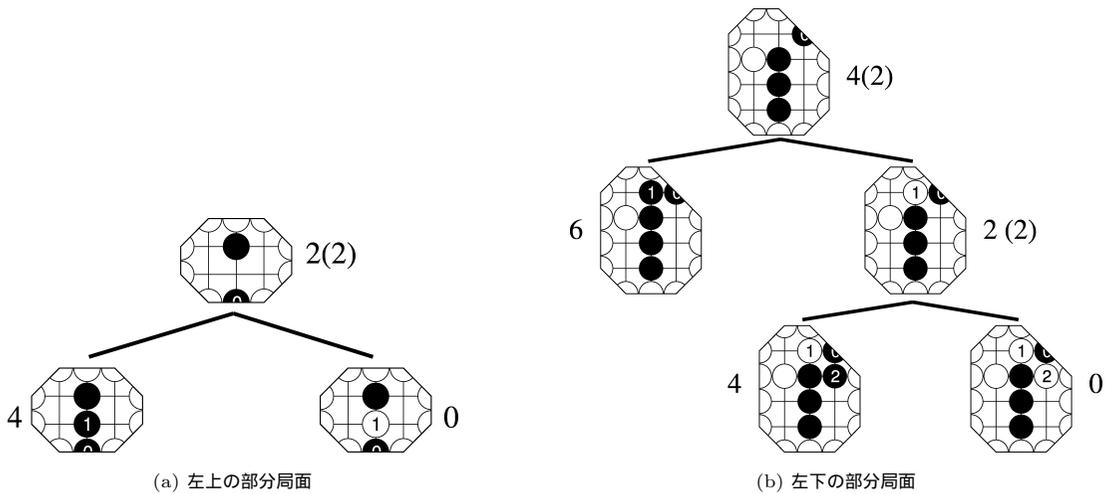


図 11 左側の共通部分のゲーム木  
Fig. 11 Game trees of the left common parts.

における黒の正解手は、最大の分母を持つ左下の領域である。

図 13 (a) の問題 E は、19 路盤における全局的な攻合いの例で、中央を縦断する黒と白の大石どうしが攻め合っている。この攻合いは図 13 (b) に示すように、左上から反時計回りに A ~ M までの 13 個の部分局面に分割することができ、各部分局面の冷却値は図 13 (c) の表に示している。その合計値は  $-1$  と無限

小要素の和になっているが、無限小要素部分が持つ性質は表の右端部分に示す原子量<sup>2)</sup>を計算することで明らかにされる。ここで、原子量の合計値もまた  $-1$  であるので無限小部分は  $*$  とは比較できない値であり、実際に  $g \parallel -1$  が成立している。したがって、黒の調整値は  $0$  となって黒は勝てる。黒の唯一の正解手は C の領域への着手であり、その正解手順の一例を図 13 (d) に示す。黒の 27 までで温度が  $1$  より大きい

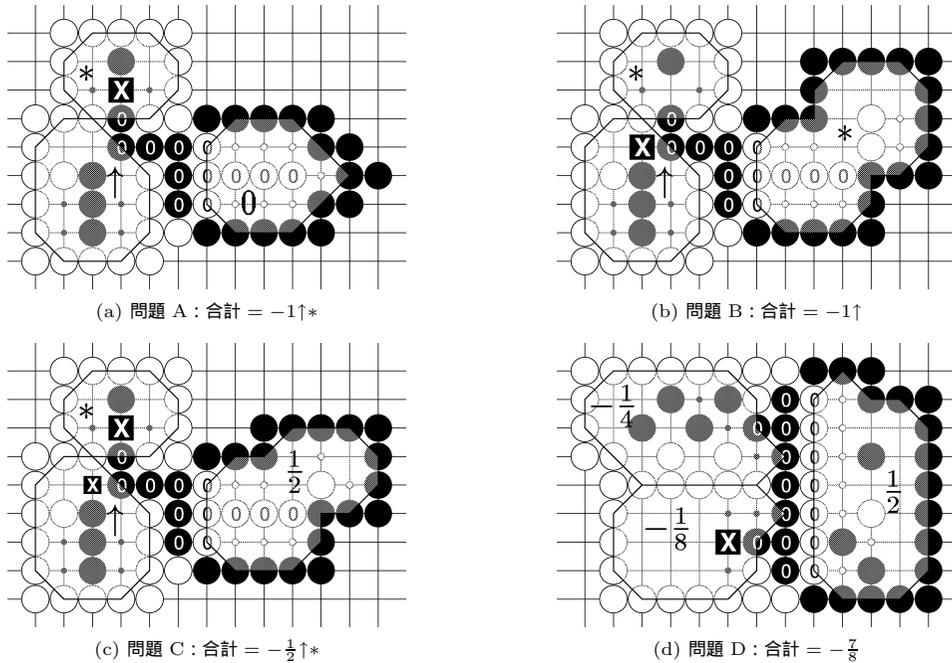


図 12 冷却値を用いた解析  
Fig.12 Analysis using CGT.

局面への着手が終了し、これ以降は 1 手ずつのダメ詰め作業となる。この時点での黒の手数は 22 手、白の手数は 21 手であるので黒の 1 手勝ちであることが確認できる。

5.2 回廊型局面の評価

ここで示した方法を用いて様々な形の攻め合いにおける手の大きさを解析することができる。たとえば図 14 (a) で黒の手番だとして、黒は  $a, b, c$  のうちいずれに着手するのが最善だろうか?  $a$  のすぐ先にはダメをたくさん持つ自分の不明ブロックが待っていて、もしこれに連絡できれば攻め合いにおいては大きな得となるので  $a$  が大きそうに見えるが、実はその読みは誤っている。これらの回廊型の領域はいずれも図 14 (b) に示す形のゲーム木を持つ。そして、各領域を冷却した結果は図 14 (c) に示す値となり、文献 3) によれば黒の着手の大きさは  $b > a > c$  であることが分かる。実際に  $a$  より  $b$  が大きいことを示す例として図 14 (d) の差分攻め合いゲームを考えることができる。(d) の右半分は、黒白を反転した対象ブロックに対して白が  $b$  に相当する位置に着手したものである。図 14 (d) から黒が  $b$  に着手してマネ碁をすれば、 $d$  の地点のダメがものをいって黒の 1 手勝ちは明らかである。しかし、もし黒が  $a$  に着手すると図 14 (e) の例に示すように黒の負けとなる。

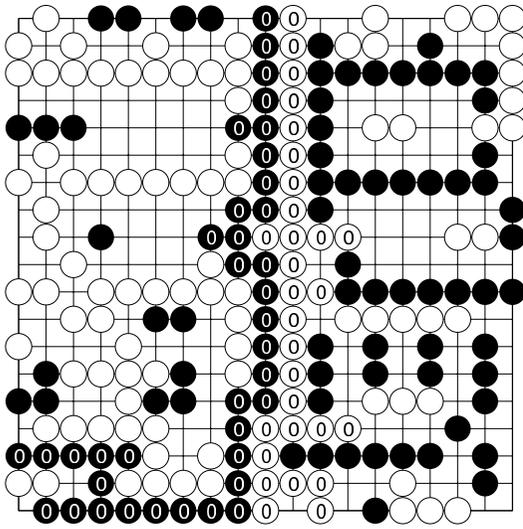
このような回廊型のダメ領域で幅が 3 のものの冷却

値は、ヨセにおける幅 1 の回廊と同様の冷却値を持っている。そのうちのいくつかを図 15 に示す。なお、幅が 2 以下の回廊については、冷却値は単に整数値となる。

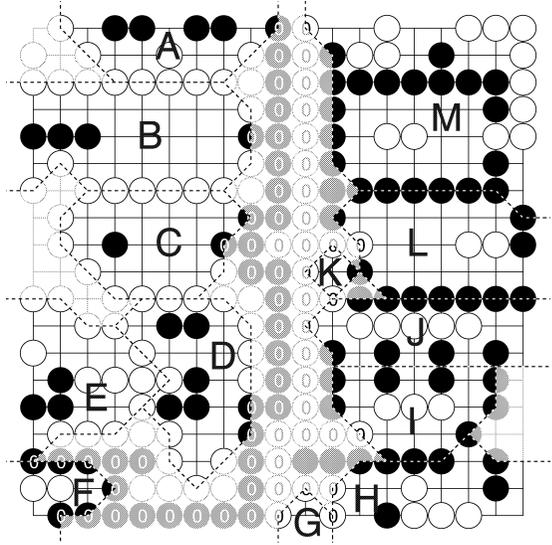
6. おわりに

本論文では、ヨセの解析、眼形の解析に続く CGT の囲碁への新たな適用分野として攻め合いの解析を取り上げ、攻め合いの手数を CGT を用いて表現することで、ヨセと同様の計算によって攻め合いの勝敗を判定する手法を提案した。CGT を用いた手数表現は、これまで整数としてのみ扱われていた手数に対する純粋な拡張となっているので、本手法を従来の攻め合い解析の手法<sup>7),9)</sup> と組み合わせることによってその適用範囲を大きく拡張することができる。論文の中では、従来の Müller の判定式の適用範囲を単純ダメではない外ダメを持つ攻め合いに拡張したものを示した。また、いくつかの攻め合い問題に対して本手法を適用した解析結果を示した。特に、問題 E に示した 19 路盤問題は、これまでにプロ棋士を含む 6~7 名の上級者に出題したが、いずれも正解には至らず難しいという感想をいただいた。本手法は、その問題に対して厳密な解を与えていることから本手法の有効性が分かる。

文献 6) には、ヨセ局面を組合せゲーム理論に基づいて部分局面に分割して探索することにより探索量が



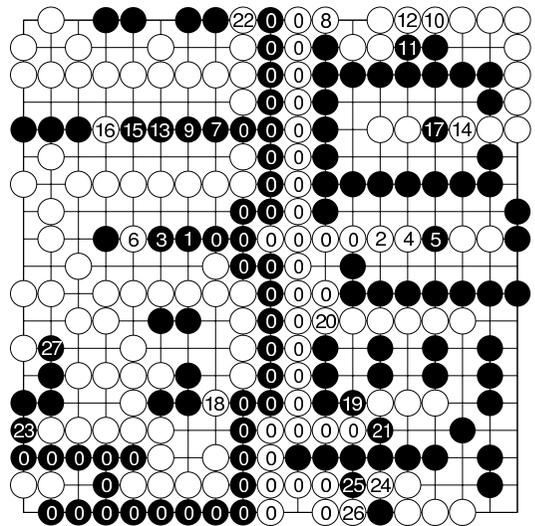
(a) 問題 E



(b) 部分局面

局面	冷却値	原子量
A	$1\frac{3}{4}$	0
B	$2\{-3 \mid 0^3\}$	-3
C	$3\{-1 \mid 0\}$	-1
D	$3\uparrow^*$	1
E	$1\frac{3}{4}$	0
F	3	0
G	-1	0
H	$-2\frac{1}{2}$	0
I	$-4\downarrow$	-1
J	$-2^*$	0
K	-1	0
L	$-3\{0 \mid \uparrow_2\}$	1
M	$-2\{0^2 \mid \uparrow_3\}$	2
合計	-1 ish	-1

(c) 部分局面の値



(d) 正解手順

図 13 19 路盤の攻合い問題 (黒先)

Fig. 13 Whole board problem (Black plays first).

劇的に減少したという実験結果が示されている。本手法を用いれば、複雑な攻合いであっても部分局面に分割して、部分局面ごとの解析結果の和として全体の攻合いの勝敗が判定できるので、攻合い局面全体を探索するのに比べて、同様に探索量を大幅に削減することが期待できる。

今後の課題としては、複数の対象ブロックが絡み合った攻合いへの本手法の適用、内ダメが単純ダメではない場合も含めた一般的な攻合いの判定、および、コウを含む攻合いの判定などがあげられる。

参考文献

- 1) Berlekamp, E.: The Economist's View of Combinatorial Games, *Games of No Chance*, pp.365-405, Cambridge University Press (1996).
- 2) Berlekamp, E., Conway, J.H. and Guy, R.K.: *Winning Ways — for your Mathematical Plays*, Academic Press (1982).
- 3) Berlekamp, E. and Wolfe, D.: *Mathematical Go — Chilling Gets the Last Point*, A.K.Peters (1994). 吉川, 小林, 石原 (訳): 囲碁の算法—ヨ

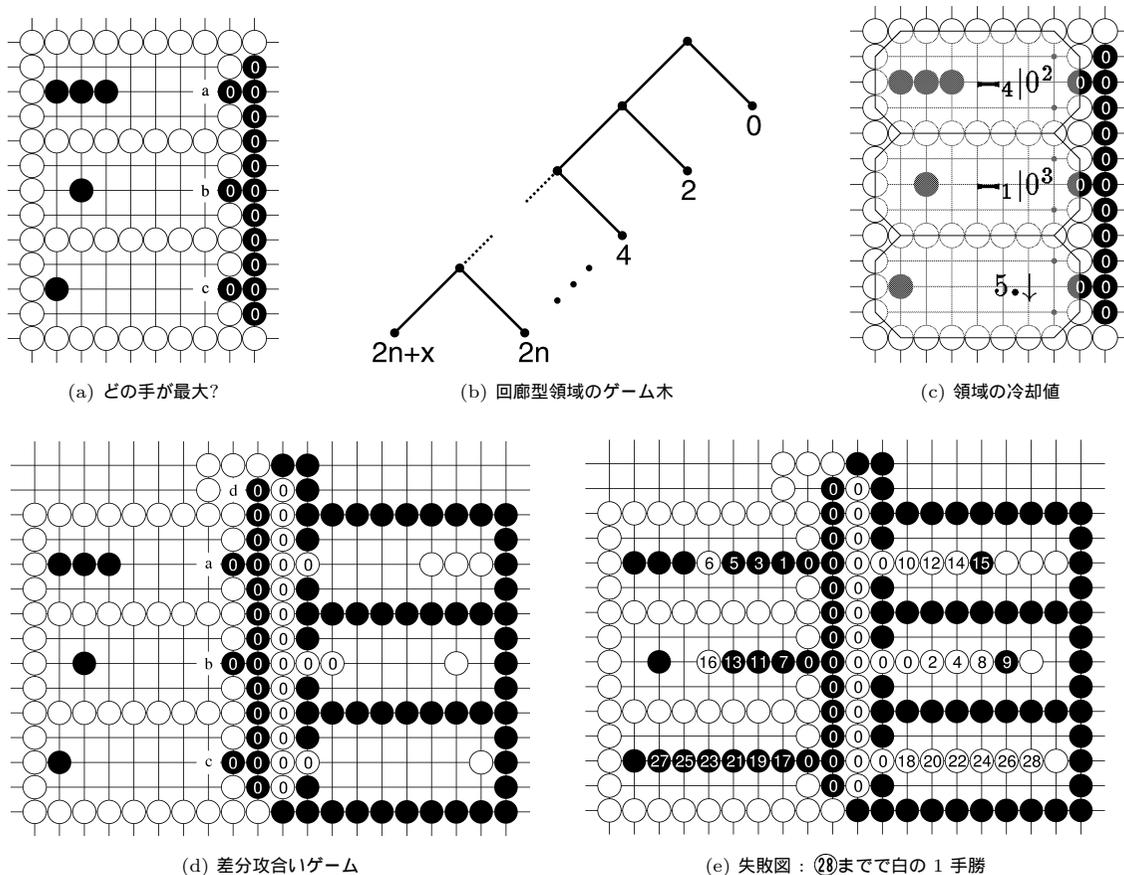


図 14 回廊型のダマ領域の手の大きさの比較  
Fig. 14 Comparing corridors.

セの研究, トッパン (1994).

4) Conway, J.H.: *On Numbers and Games*, Academic Press (1976).  
 5) Landman, H.A.: Eyespace Values in Go, *Games of No Chance*, pp.227–257, Cambridge University Press (1996).  
 6) Müller, M.: Decomposition search: A Combinatorial Games Approach to Game Tree Search, with Applications to Solving Go Endgames, *IJCAI-99*, Vol.1, pp.578–583 (1999).  
 7) Müller, M.: Race to capture: Analyzing semeai in Go, *Game Programming Workshop '99 (GPW'99)*, pp.61–68 (1999).  
 8) Müller, M., Berlekamp, E. and Spight, W.: Generalized Thermography: Algorithms, Implementation, and Application to Go Endgames, *International Computer Science Institute*, Vol.TR-96-030 (1996).  
 9) Nakamura, K.: Static analysis based on formal models and incremental computation in Go programming, *Theoretical Computer Science*, Vol.349, pp.184–201 (2005).

10) Nakamura, T. and Berlekamp, E.: Analysis of Composite Corridors, *Computers and Games*, Lecture Notes in Computer Science, No.2883, pp.213–229, Springer (2002).  
 11) Spight, W.L.: Evaluating Kos in a Neutral Threat Environment: Preliminary Results, *Computers and Games*, Lecture Notes in Computer Science, No.2883, pp.413–428, Springer (2002).  
 12) 滝沢武信: 数理ゲーム理論の囲碁への応用, 情報処理学会ゲーム情報学研究会報告, Vol.99-GI-1-6, pp.39–46 (1999).

(平成 19 年 1 月 29 日受付)  
(平成 19 年 9 月 3 日採録)

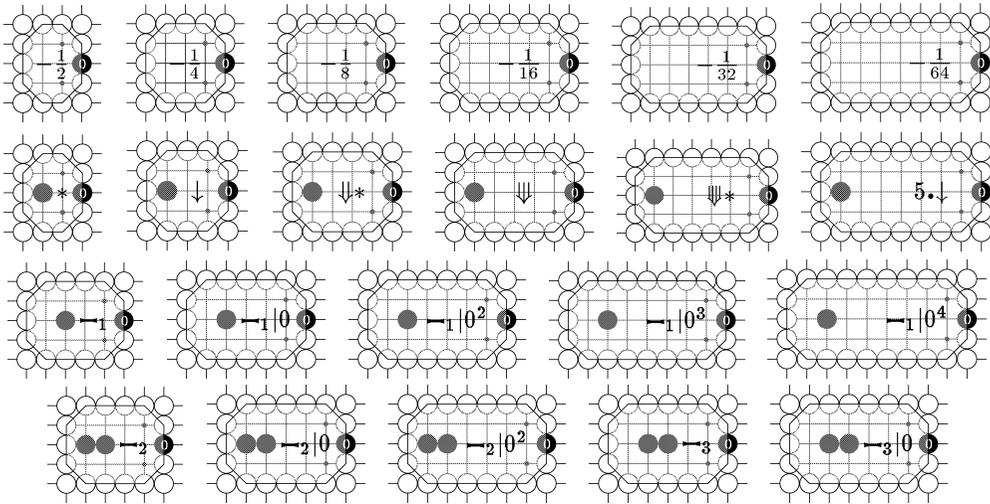


図 15 回廊型のダメ領域の冷却値  
Fig. 15 Catalog of corridors.



中村 貞吾 (正会員)

昭和 34 年生。昭和 59 年九州大学  
大学院工学研究科電子工学専攻修士  
課程修了。昭和 62 年九州大学大学  
院工学研究科電子工学専攻博士後期  
課程満期退学。同年九州大学工学部

助手。自然言語処理の研究に従事。平成 4 年より九  
州工業大学情報工学部講師。自然言語処理，ゲームプ  
ログラミングに関する研究に従事。工学博士。人工知  
能学会，電子情報通信学会，Computer Go Forum 各  
会員。