囲碁ヨセにおける最適手判別法

二宮勘輔
日本福祉大学社会福祉学部
E-mail: nino5678@n-fukushi.ac.jp

概要 囲碁のヨセの局面での独立な部分のゲーム木を２分木に分解して分析した結果，ある種の部分から構成されるゲームに対して，最適手を判別するためのより簡単な探索法が存在することがわかった。この手法を用いて一般的なヨセの局面でどれくらい探索空間の省略が得られるかを調べた。またわれわれの厳密な最適手判定法を専門棋士によって用いられる近似法と比較し、その良し悪しを評価した。

A Method to Decide Optimal Move in Go Endgame

Kansuke Ninomiya
Faculty of Social Welfare, Nihon Fukushi University
E-mail: nino5678@n-fukushi.ac.jp

Abstract In this paper Go endgame is analyzed by dividing local independent game trees which are components of a Go endgame into binary trees. We discovered that in case of the game composed of some type of local game, there is a simple method of search for rigid optimal move. We also showed how the method reduces the volume of the search in general Go endgame. We also evaluated methods of approximation which are used by specialist of Go player, comparing with rigid optimal move obtained by use of the discriminant.

1 はじめに

コンピュータ囲碁が困難である根本要因が探索空間の膨大さにあることはよく知られている。しかし，ヨセの局面では探索空間はかなり限られてくる。それは囲碁のヨセの局面が、比較的少数の独立な部分に分けられ、しかも各部分の対するゲーム木が単純である、すなわち分岐数も深さも比較的少数に限定されているからである。さらに，ヨセの部分に対する手順は多くの場合に定型化されており，着手が一意的に決まっている。つまり，多くの場合に部分のゲーム木の各分岐が白黒１手ずつに限られ，部分のゲーム木は２分木になっている。本論ではこのような囲碁のヨセ局面での最適手を判定する問題に対し、どこまで少ない探索（読み）で厳密に解けるかを考察する。囲碁のヨセに関する先行研究としては，組み合わせゲーム理論を用いた分析 [1)-2)]が知られているが，ここでは記法などは参考にしながら，別の側面からの分析を行う。

2 ２分木と最適手判定定理

以下ではヨセの局面を,分岐数も深さも小さい独立した少数の部分ゲーム木から構成され、しかもゲーム木が全て２分木であると仮定して分析を進める。ただし、任意のゲーム木は２分木の和に分解で

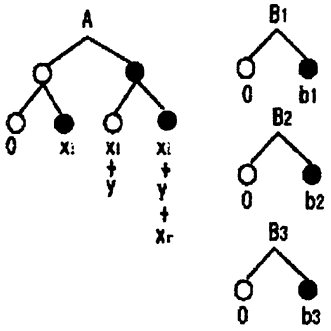

図１部分ゲーム木

きるので，２分木だけでないゲーム木から構成されるヨセの局面に対しても以下で得られる結果は応用可能である。

一般的に最適手を判定する探索は，どの順番でどの部分ゲーム木のどの枝を選択するかの順列の数だけ必要だが、２分木だけの場合にはどの順番でどの部分ゲーム木を選択するかだけに帰せられ，探索の要素はいたって単純となる。そこで部分ゲーム木を２分木だけに限れば、より少ない探索で厳密な最適手を見出す問題にたいし、なんらかの手がかりが得られるのではないかと考えた。その結果、以下のようなことが判明した。

いま，１個の深さ２以上の部分ゲーム木Ａと，出入り値の大きさの順に並べられた n 個の深さ１の部分ゲーム木（単純後手ヨセ）$B_i=\{b_i|0\}$（ただし $b_1>b_2>b_3>\cdots$）から構成されるゲーム $G(A, B_1, B_2, \cdots, B_n)$ を考える。例えばＡが深さ２の部分ゲーム木 $n=3$ の場合である。深さ２の部分ゲーム木のスコアを $\{\{x_l+y+x_r \mid x_l+y\} \mid \{x_l \mid 0\}\}$ のようにパラメーター化する。これらをグラフにすれば部分ゲーム木は図１のようになる。この場合、深さ１の部分木は最大出入り値のものしか探索しない探索法（最大出入り値探索法と呼ぶ）で求めた全体ゲーム木は図２のようになる。

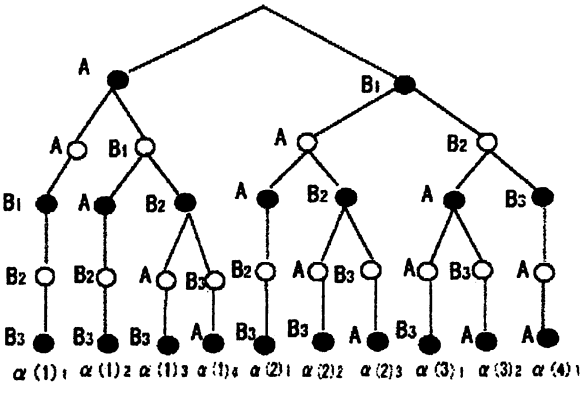

図２全体ゲーム木

このゲームに対しては,1 手目の最適手は当然ＡかＢ₁のどちらかとなる。この種の最適手選択の問題に対し，少なくともＡの深さが２と３の場合には、次のような定理が成り立つ。以下ではこれを最適手判定定理と呼ぶことにする。

最適手判定定理

ＡかＢ₁かの選択は１手目にＡを着手した場合の最適スコアと１手目にＢ₁，２手目にＡを着手した場合の最適スコアの比較によって判定できる。

定理の言わんとするところは,ＡかＢ₁かの選択のためには,全てのゲーム木を探索する必要がなく，１手目に B_1，２手目に B_2 を選択する枝は全て省略してよいと言うことである。このことは単なる $\alpha-\beta$ 法の一般論だけからは言えない性質である。それは次のように説明できる。いま，１手目にＡを着手した場合の最適スコアを $os(1)$，１手目に B_1，２手目にＡを着手した場合の最適スコアを $os(2)$，１手目に B_1，２手目に B_2 を着手した場合の最適スコアを $os(3\cdots)$ とすると，黒番の場合，全体ゲーム木は $\{\{os(3\cdots) \mid os(2)\} \mid os(1)\}$ となる。$\alpha-\beta$ 法では黒番で $os(1)>os(2)$ ならＡが最適であることはいえるが，$os(1)<os(2)$ であるからといって B_1 が最適であるとは必ずしもはいえない。なぜなら，$os(1)<os(2)$ であっても，$os(3\cdots)<os(1)$ であればＡが最適となるからである。ところが定理は黒番で $os(1)<os(2)$ であれば B_1 が最適であるというのである。言い換えれば $G(A, B_1, B_2, \cdots, B_n)$ の黒番では常に $os(3\cdots)\geqq os(1)$ であることを主張する。したがって，定理は２分木から構成されるゲーム木のなんらかの構造を反映しているものと思われる。

いまのところ定理の証明はＡが１個でその深さが２または３の場合しかできていないが，Ａが任意

の深さの場合やさらにAが複数の部分ゲーム木からなる場合にも成立することが期待される。定理の証明とより詳細な説明については補足にまわす。

3　深さ2のゲーム木に対する判別式

Aが深さ2の場合については，以下のような一つの判別式を計算すればAかB$_1$かが判定できることが，最適手判定定理から導かれる。いま1個の深さ2の部分ゲーム木A=A(2)={{x_1+y+x_r|x_1+y}|{x_1|0}}とn個の深さ1の部分ゲーム木B$_i$={b_i|0}(ただし $b_1>b_2>b_3>\cdots$)から構成されるゲームをG(A(2), B$_1$,B$_2$、…,B$_n$)とする。G(A(2) , B$_1$,B$_2$、…,B$_n$)に対して、後に定義される**判別式$D(n)_{ij}$**によって次の判定が成り立つ。

$D(n)_{ij}>0$　なら　Aが最適手

$D(n)_{ij}<0$　なら　B$_1$が最適手

$D(n)_{ij}=0$　なら　A，B$_1$どちらを選んでも同じ

黒番の場合の$D(n)_{ij}$の定義

$b_i<x_r\leqq b_{i+1}$，$b_j<x_l\leqq b_{j+1}$の場合の判別式を$D(n)_{ij}$とする。ただし，

$b_1<x_r$の場合は$i=1$，$b_1<x_l$の場合は$j=1$とし、$x_r\leqq b_n$の場合は$i=n+1$、

$x_l\leqq b_n$の場合は$j=n+1$とする。

$$D(n)_{ij}=y+\sum_{k=2}^{i}(-1)^k(x_r-b_{k-1})+\sum_{k=2}^{j-1}(-1)^k(x_l-b_k)$$

ただし$i,j=1,2,\cdots,n+1$

白番の場合の$D(n)_{ij}$の定義

黒番の場合のx_lをx_rに，x_rをx_lに読み替えて定義する。

以上のような判別式が成立する理由の詳細は補足にまわすが、そのポイントは次のようである。Aが深さ2の場合，1手目にAを選択するにせよ，1手目にB$_1$，2手目にAを選択するにせよ，1回Aを選択すると残されるのは全て深さ1の部分木（単純後手ヨセ）だけである。したがって、その後の終局にいたるまでの全ての手番の最適手すなわち最適手順は単純に出入り値の大きい順の着手である。つまりこの場合は終局までの最適手順と、その最適スコアが自動的に決まってしまうのである。さらにその最適スコアがある数式で表現できるので，その差が判別式となるのである。

ゲームG(A(2), B$_1$,B$_2$,…,B$_n$)の1手目の最適手がA(2)かB$_1$かの判定は1回の判別式の計算で決まるが、終局までの最適手順とそのときの最適スコアは1回の判別だけでは決まらず、一般的には何回かの判別式の計算を経る必要がある。1手目の判別式の計算でA(2)が最適手と判定されれば，上述のようにその後の最適手順と最適スコアは決まる。しかし、1手目の判別式でB$_1$が最適手となれば、2手目の最適手がA(2)かB$_2$の判定は2手目の判別式を計算して決定しなければならない。以下同様に，ある手番で最適手がA(2)と判定されればそこで最適手順と最適スコアは決まるが，B$_i$が最適手と判定されれば、次の手番の判別式を計算しなければならない。一般に、G(A(2), B$_1$,B$_2$,…,B$_n$)の最適手順と最適スコアを決定するためには最小で1回、最大でn回、平均して$n/2$回の判別式の計算が必要となる。

Aが深さ3以上になると，最適手判定定理を適用するにしても，1手目の最適手がAかB$_1$かを決定するためだけでも、1回の判別式の計算だけでは済まない。たとえばAが深さ3のA(3)である場合、

1手目にA(3)が選択されるにせよ，1手目にB_1，2手目にA(3)が選択されるにせよ、残るゲームは深さ2のA(2)を含む$G(A(2), B_1, B_2, \cdots, B_n)$あるいは$G(A(2), B_2, \cdots, B_n)$であるから、これらの最適スコアを決めるためにそれぞれ平均的に$n/2$回と$(n-1)/2$合わせて$(2n-1)/2$回の判別式の計算が必要となり、最後にこれらの二つの最適スコアの差の正負を判定する1回の計算が必要であるから、合計では平均的に$(2n+3)/2$回の判別のための計算が必要となる。

4　探索空間の省略の度合い

今までは深さ2以上の部分木が1個の場合を対象にしてきた。ここではより実戦のヨセに近い複数個の深さ2以上の部分木から構成されるゲームを考察し、最適手判定定理や判別式による判定がどれだけ最適手決定の探索の規模を縮小するかを考察する。実戦のヨセでは深さ4程度の部分ゲーム木、つまり4手手抜きまでを着手候補の対象とする部分ヨセを考えるとほとんどの場合をカバーできるように思われる。ただし、たとえば1線のハネ接ぎのように、必然の1連の着手をセットで1手とみなしたうえでの話しである。したがって本来なら深さ4までの部分木を対象にすべきだが、そうなるといかに縮小しても最適手を厳密に求める探索数は膨大すぎて手に負えないことになる。こうした場合、いずれ何らかの近似法を取り入れざるを得ないことになる。そこでここでは、何らかの近似法を取り入れたあとに残された部分木は、深さ3以下の部分木に制限されると仮定して探索数を考察する。

いま深さ3の部分木がn_3個、深さ2の部分木がn_2個、深さ1の部分木がn_1個あるゲーム$G(n_3 : n_2 : n_1)$を考える。各n_iは最大5程度を見込んでおけば実戦的なヨセの局面を十分カバーできると思われる。なお,単純後手ヨセに対応するn_1については「見合い」の考えかたを取り入れて，同じ出入り値の部分が偶数箇所なら0，奇数偶数箇所なら1と勘定すればよいので，実際の部分の数はn_1を大きく上回る。

さて,任意のゲーム木のMin/Max探索の探索数すなわち探索で訪れるノードの総数SNを求めたいがこれを直接求めることは一般に難しい。しかし，ゲーム木の終端ノードの総数TNは比較的計算しやすい。無論$TN < SN$であるが，TNの大きさはおおむねSNの大きさの目安になると予想される。そこで以下では各探索法でのTNの大きさの比較を行ってみる。一切の省略なしに網羅的に探索するとその終端の数TN_0は全ての部分木の深さの和をL $(L=3n_3+2n_2+n_1)$として，

$$TN_0=\frac{L!}{(3!)^{n3}(2!)^{n2}} \qquad \cdots \quad ①$$

である。一方，深さ1に対する最大出入り値探索法の終端の数を$TN_1(n_3, n_2, n_1)$とすると，TN_1は次の漸化式によってあたえられる。

$$TN_1(n_3, n_2, n_1)=n_3\ TN_1(n_3-1, n_2+1, n_1)+n_2\ TN_1(n_3, n_2-1, n_1+1)+$$
$$TN_1(n_3, n_2, n_1-1) \qquad \cdots \quad ②$$

ただし，$TN_1(0,0,0)=0$，$TN_1(0,0,n_1)=1$，$TN_1(1,0,0)=1$，$TN_1(0,1,0)=1$

他方，最適手判定定理と判別式を用いた場合の終端の数は，終端の数をどう定義するかで異なってくる。ここでは終端のスコアと最適手順を決定するに要した判別式の計算の回数を終端の数と定義し，その平均的値$TN_d(n_3, n_2, n_1)$を算出してみる。$TN_d(n_3, n_2, n_1)$はただし書きも含めた②に，次の条件を加えることで計算できる。

$$TN_d(0, 1, n_1)=\frac{n_1}{2}, \qquad TN_d(1, 0, n_1)=\frac{n_1(n_1+8)}{8} \qquad \cdots \quad ③$$

以上の３通りの探索法による終端数を，典型的な n_3, n_2, n_1 の値に対して数値計算して比較したのが表１である。

表１　終端の個数

	n_1=0	n_1=1	n_1=2	n_1=3	n_1=4
$TN_0(2,3,n_1)$	2.3×10^6	2.1×10^7	3.0×10^8	4.5×10^9	7.5×10^{10}
$TN_1(2,3,n_1)$	9.2×10^4	3.8×10^5	1.1×10^6	2.5×10^6	5.4×10^6
$TN_d(2,3,n_1)$	3.1×10^4	1.5×10^5	3.8×10^5	9.0×10^5	1.9×10^6

表で見られるように，網羅的探索にくらべ，深さ１に対する最大出入り値探索法は飛躍的に終端の個数を減らすが，さらにそれを，判別式による探索法が数分の１の終端数に減らしている。判別式による探索法が最適手探索において有効な枝刈り法であることがわかる。

5　境界面(線)グラフと近似法の評価

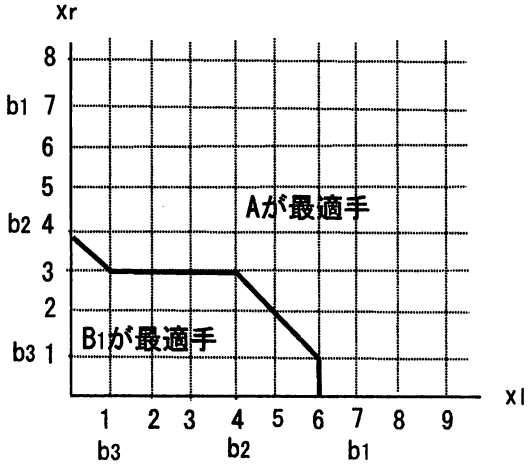

図3　境界線グラフの例
白番 y＝４，b1＝6，b2＝4，b3=1

の（x_l、x_r）平面上の境界面（線）グラフをしめす。図３は無限個の点（x_l、x_r）に対して最適手がＡかB_1かの判定を一挙に示している。また、詳しい説明は省くが、点（x_l、x_r）と境界面（線）までの距離はＡかB_1かの選択で誤った着手をした場合の損失の大きさとおおむね等しい。このように、境界面（線）グラフは着手の選択と得失の大きさについてより広い視野から分析する基盤を与えてくれる。

２，３で述べたように最適手判定定理によって最適手がＡか B_1 かの判定が可能となるが、$os(1)=os(2)$ の場合はＡでも B_1 でもどちらも最適手となる。$os(1)=os(2)$ はＡかB_1かのちょうど境界となる条件である。これはスコア間の相対差（Ａが深さ２の場合は x_l、y、x_r 、b_1、b_2、b_3・・・）のなす多次元のパラメータ空間のなかの超平面を表す。例えば、図３はＡが深さ２、n=3 の場合でｙ、b_1、b_2、b_3をある値に固定したとき

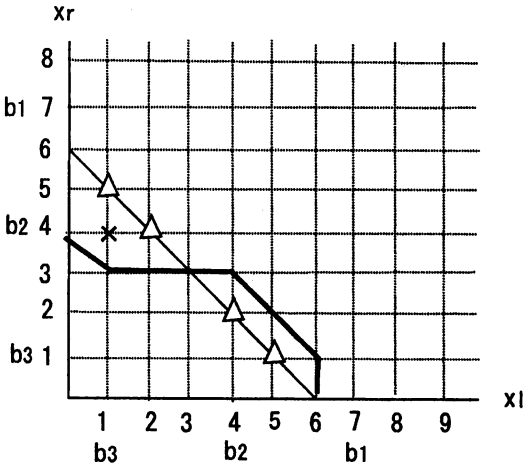

図4　境界線グラフによる平均近似の評価
太線が厳密解，細線が平均近似の境界線

以下では、境界面（線）グラフを用いて、実戦のヨセでよく知られた近似法を評価してみる。実戦のヨセではまず先手、次に逆ヨセか後手を打つこと、後者は逆ヨセは逆ヨセ２倍法で、後手は平均近似法で計算し、その大きい順に打つことがよいと

される。一般には、先手かどうかの判断は全てを読みきらないとできないので、このような手法の正確な応用は不可能であるが、いままでしばしば例にしてきた1個深さ2の部分グラフと任意個の単純後手ヨセの部分グラフの場合は、先手であるかどうかが厳密に判定できる。つまり、黒番では $x_r > b_1$ なら先手、白番では $x_1 > b_1$ なら先手となる。このケースで平均近似法および逆ヨセ2倍法を評価してみる。

平均近似法では両後手のAを出入り値 $(x_1+x_r)/2+y$ の単純後手ヨセとみなす。したがってこの値と b_1 との大小の比較がAか B_1 かの判定の基準となる。これを図3と同じパラメーター空間の境界面（線）グラフに重ねると図4となる。図で×印の点では平均近似法が誤った判定を下し、△印では誤る可能性が1/2の確率でおきる。大まかには平均近似法が厳密解近い判定を下すことは見て取れるが、いくつかの点で誤った判断をもたらし、最大2目の損失となることがあることを示す。

次に逆ヨセ2倍法の評価のケースとして黒番で $x_r=0$ の場合を考える。相手方先手つまり、$x_1 > b_1$ のとき逆ヨセ2倍法は2y と b_1 との大小の比較がAか B_1 かの判定の基準となる。図5は $b_1=6$、$b_2=3$、$b_3=2$ のときの（x_1、y）平面上の厳密解と逆ヨセ2倍法（$x_1 < b_1$ の部分は平均近似法）の境界線グラフを描いたものである。

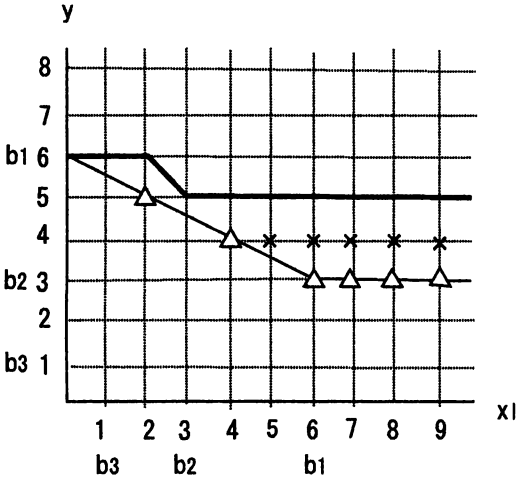

図5　逆ヨセ2倍法の評価（黒番）
太線が厳密解の，細線が逆ヨセ2倍法の境界線

さまざまなパラメーターで厳密解と近似法で境界線グラフを描いて比較してみると、大雑把にいって、逆ヨセ2倍法は平均近似法より誤るケースが多いこと、両者とも b_1、b_2、b_3・・・の分布が均等なら近似がよいが、偏ると悪くなる傾向にあることがいえる。この結論自体はいわゆる「手どまりの問題」として、よく指摘されることがらでの一種であるが、このようなことが境界線グラフによって広い視野の中で分析できることに意義を見出すことができると思う。

補足　最適手判定定理と判別式の証明

いまゲーム $G(A, B_1, B_2, \cdots, B_n)$ に対する，最大出入り値探索法で作られる全体ゲーム木において，i 手目に始めてAを選択し，そこからさらに j 手目先に2回目のAを選択した場合の最適スコアを $\alpha(i)_j$ とする。また，i 手目に始めてAを選択した以降のゲーム木の最適スコアを $os(i)$ とする。つまり，$os(i)$ は $\alpha(i)_j$ のいずれかである。また1手目にB1に2手目に B_2 を選択した以降のゲーム木の最適スコアを $os(3\cdots)$ とする。$os(3\cdots)$ は $os(3)$，$os(4)$，$os(5)$，・・・，$os(n)$ のいずれかである。

本文で述べたように，最適手判定定理は黒番で $os(1) \leqq os(3\cdots)$，白番で $os(1) \geqq os(3\cdots)$ が成立していることを意味する。ところで，この不等式は次の不等式が成り立てばその成立が保証される。

黒番で $os(1) \leqq os(3)$，白番で $os(1) \geqq os(3)$　　・・・　（1）

なぜなら、いま黒番の場合を考え，仮に $os(1) \leqq os(3)$ が成り立つとすると $os(3\cdots)$ が $os(3)$ である場合は仮定そのものによって成り立つ。$os(3\cdots)$ が $os(4\cdots)$ の場合は，$os(3)$ か $\alpha(4\cdots)$ を黒が選択する局面であるから $os(3) \leqq \alpha(4\cdots)$ となっているはずであり，$os(1) \leqq os(3) \leqq os(4\cdots)$ となって，

この場合も $os(1) \leqq os(3\cdots)$ であることが示せる。白番でも同じ論理でいえる。

不等式（1）がAの深さが2の場合に成り立っていることは以下のようにして示せる。黒番の場合，1手目に始めてAを選択した場合も，3手目に始めてAを選択した場合も，Aの残りは出入り値 x_r の深さ1の部分木となる。あとはこのAの残りと残されているBiの出入り値を比較し，大きい順に選択していくことが最適手順となる。このような原理から，$\alpha(i)_j$ のうちいずれが最適スコア $os(i)$ になるかは x_r と b_i との比較でおのずと決まる。これを $os(1)$ と $os(3)$ についてまとめたのが表の3行目までである。

表1 x_r の範囲別 $os(1)$ と $os(3)$

x_r		$b_4<x_r<b_3$	$b_3<x_r<b_2$	$b_2<x_r<b_1$	$b_1<x_r$
$os(1)$	・・・	$\alpha(1)_4$	$\alpha(1)_3$	$\alpha(1)_2$	$\alpha(1)_1$
$os(3)$	・・・	$\alpha(3)_2$	$\alpha(3)_1$	$\alpha(3)_1$	$\alpha(3)_1$
$os(1)-os(3)$	$-b_1+b_2$	$-b_1+b_2$	$-b_1+b_2$	x_r-b_1	0

各スコアの値 $\alpha(i)_j$ については，まず，$\alpha(1)_1$ と $\alpha(3)_1$ は直接計算によって，その他は、隣り合う $\alpha(i)_j$ の間にはAとその上下のBiとの順序を入れ替えた関係があることから，次のように表せる。

$$\alpha(1)_1=x_1+y+b_1+b_3+b_5+\cdots$$

$$\alpha(1)_j=\alpha(1)_{j-1}+(-1)^j(x_r-b_{j-1})=\alpha(1)_1+\sum_{k=2}^{j}(-1)^k(x_r-b_{k-1})$$

$$\alpha(3)_1=x_1+y+b_1+b_3+b_5+\cdots=\alpha(1)_1$$

$$\alpha(3)_j=\alpha(3)_{j-1}+(-1)^j(x_r-b_{j+1})=\alpha(3)_1+\sum_{k=2}^{j}(-1)^k(x_r-b_{k+1})$$

これによって $os(1)-os(3)$ が計算でき，表1の4行目の式になる。いずれも1行目の x_r の範囲のなかで0または負である。

以上でAが深さ2で黒番の場合の最適手判定定理は証明できた。白番の場合の証明も同じようにできる。以上の証明は n に依存しなかった。したがって不等式（1）はさらに次の不等式に拡張できる。

黒番で $os(1) \leqq os(3) \leqq os(5) \leqq \cdots$，白番で $os(1) \geqq os(3) \geqq os(5) \geqq \cdots$　（2）

Aが深さ3の場合の最適手判定定理も不等式（1）の成立を示すことで証明できるが，やや複雑で長大な記述を要するので省略する。

Aが深さ2の場合に判別式 $D(n)_{ij}$ が存在することは最適手判定定理を用いれば容易に示すことができる。最適手判定定理によればAか B_1 かの選択は黒番の場合，$os(1)>os(2)$ ならA，$os(1)<os(2)$ なら B_1 を選択し，白番の場合，$os(1)<os(2)$ ならA，$os(1)>os(2)$ なら B_1 を選択せよという。したがって黒番の場合，$D(n)=os(1)-os(2)$，白番の場合，$D(n)=os(2)-os(1)$ とすれば，$D(n)$ の正負でAか B_1 の選択がきまる。問題は $D(n)$ がひとつの式にまとまるかである。

すでに表1の2行目に示したように，$os(1)$ については b_i によって区分されたどの範囲に x_r があるかによって最適スコア $os(1)$ が決まっている。$os(2)$ についても同様に決まるが，今度は2手目に初めてAが選択されるので1手目が黒番ならAは白の選択となる。したがって，残されたAは深さ1で出入り値 x_1 の部分木である。そのため,その後の最適手順は今度は x_1 と b_i の比較して最大出入り値の部分を選ぶ手順となる。それをまとめると表2のようになる。

表２　x_l の範囲別 os(2)

x_l	・・・	$b_4<x_l<b_3$	$b_3<x_l<b_2$	$b_2<x_l<b_1$	$b_1<x_l$
$os(2)$	・・・	$\alpha(2)_3$	$\alpha(2)_2$	$\alpha(2)_1$	$\alpha(2)_1$

また各スコアの値 $\alpha(i)_j$ については，$\alpha(1)_1$ と $\alpha(3)_1$ は直接計算によって，その他は隣り合う $\alpha(i)_j$ の間に A とその上下の Bi の順序を入れ替えた関係にあることから，次のように表せる。

$$\alpha(2)_1 = x_l + b_1 + b_3 + b_5 + \cdots = \alpha(1)_1 - y$$

$$\alpha(2)_j = \alpha(2)_{j-1} - (-1)^j (x_l - b_j) = \alpha(2)_1 - \sum_{k=2}^{j} (-1)^k (x_l - b_k)$$

$os(1)$も $os(2)$も x_r あるいは x_l の b_i で区切られた範囲のいずれにあるかによって解が異なる。いま $b_1 < x_r$ の場合は 1，$b_i < x_r \leqq b_{i+1}$ なら i，$x_r \leqq b_n$ の場合は n+1 と x_r の範囲に番号を付け，x_l の範囲にも同様に番号を付ける。すると最適スコアは x_r の i の範囲では os(1)が $\alpha(1)_i$，x_l の j の範囲では os(2)が $\alpha(2)_{j-1}$ となっている。ただし，x_l の 1 の範囲では $os(2)$は $\alpha(1)_1$ である。ここで x_r の i，x_l が j の範囲での $D(n)$の値を $D(n)_{ij}$ とすると、$D(n)_{ij}$ は本文で与えた判別式となる。

参考文献

1）Jon H. Conway:　"On numbers and Games"，Academic Press, (1976)

2）Elwyn Berlekamp and David Wolfe:　"Mathematical Go -Chilling Gets the Last Point-"，A.K.Peters, (1994)