立方数パズルを解く

鈴木 豪　　小谷 善行
東京農工大学
go@fairy.ei.tuat.ac.jp　kotani@cc.tuat.ac.jp

概要

2002年度のGPCCの課題の一つに、立方数パズルがある．立方数パズルは「連続する自然数1, ･･･, nを並べ替えて、隣接するどの2数の和も立方数になるようにせよ．解があればそれを求め、ないなら最も大きなnまでそのことを確認する.」というものである.我々はこの問題に対しn=305のとき解があることを求め、さらに、n≦415に対しn=333,385～415のときにも解があることを求めた．例えば305個の数字の並べ方は305!= 7.8×10^{626}通りあり、単純な力技で探索することは困難である．本稿では立方数パズルをグラフの道を見つける問題に置き換えて解を求めた手法について示す．この手法を使うと立方数パズルと類似の平方数パズルと素数パズルの解も効率良く求めることができる．最後に、立方数パズルを一般化したN乗数パズルは使う数字を多くすれば解が存在すると期待できることを述べる.

Cube Numbers Puzzle is solved

Tsuyoshi SUZUKI　　Yoshiyuki KOTANI
Tokyo University of Agriculture and Technology

Abstract

Cube numbers puzzle is a problem on GPCC in 2002. That is a following problem: Arrange a number sequence using once every integer 1 to n such that the sum of any two neighboring numbers in the sequence must be a cube number. If exist, find such n and show its arrangement. Otherwise, prove the impossibility up to some large n. We find that this problem has solutions for n=305 and n=333, 385～415. For instance, a permutation of numbers of 305 is 305!= 7.8×10^{626}. So it is hard to find solutions by brute force search. First we describe the convert of the cube numbers puzzle to the problem that finds the path in graphs, and we show the algorithms that solved the problem. This algorithm finds the solutions for Square Numbers Puzzle and Prime Numbers Puzzle, which are similar to Cube Numbers Puzzle. We mention that N-power puzzle is expected that solutions exist if the increases the numbers to use.

1 はじめに

今年のGPCC[1]の課題の一つに、立方数パズルがある．立方数パズルは「連続する自然数1, ･･･, nを並べ替えて、隣接するどの2数の和も立方数になるようにせよ．解があればそれを求め、ないなら最も大きなnまでそのことを確認する.」というものである[2].我々はこの問題に対しn=305のとき解があることを求め、さらに、n≦415に対しn=333, 385～415のときにも解があることを求めた.例えば305個の数字の並べ方は305!= 7.8×10^{626}通りあり、単純な力技で探索することは困難である．本稿では立方数パズルをグラフの道を見つける問題に置き換え、解を求めた手法について示す．この手法を使うと立方数パズルと類似の平方数パズル、素数パズルの解が効率良く求まる．最後に、立方数パズルをより一般化したN乗数パズルは使う数字を多くすれば解が存在すると期待できることを述べる.

第2章では立方数パズルを一般化したN乗数パズルを定義し、その問題をグラフの道を求める問題へ変換する．第3章ではN乗数パズルの解をグラフを利用して探索するアルゴリズムについて述べる．第4章では平方数パズル、立方数パズル、4乗数パズル、

5乗数パズル、素数パズルの解について述べる．第5章では、N 乗数パズルの解の存在について議論し、第6章でまとめを行う．

2　立方数パズルの一般化と問題の変換

はじめに、立方数パズルを一般化したN乗数パズルを定義する．

[N乗数パズル]

連続する自然数1，・・・，nを並べ替えて、隣接するどの2数の和もN乗数になるようせよ．

以下、この問題をP(N, n)と表すことにする．特にN=3のときが立方数パズルであり、また、N=2のときを平方数パズルという．

例1．平方数パズルP(2, 16)の解

16 9 7 2 14 11 5 4 12 13 3 6 10 15 1 8

N乗数パズルP(N, n)において、解の両端の数の和がまたN乗数になるとき、その解を**巡回する解**と呼ぶことにする．

例2．P(2, 32)の巡回する解

32 17 19 30 6 3 13 12 24 25 11 5 31 18 7 29 20 16 9 27 22 14 2 23 26 10 15 1 8 28 21 4

N乗数パズルP(N, n)は次のようにして、グラフの道を見つける問題に変換できる．

1〜nの各数に並べることができる、すなわち二数の和がN乗数になるような、数を表にしたものをP(N, n)の接続表と呼ぶことにする．例えば、P(2, 16)の接続表は表1のようなものである．

表1　P(2, 16)の接続表

使用する数	並べることができる数		
1	15	8	3
2	14	7	
3	13	6	1
4	12	5	
5	11	4	
6	10	3	
7	9	2	
8	1		
9	16	7	
10	15	6	
11	14	5	
12	13	4	
13	12	3	
14	11	2	
15	10	1	
16	9		

接続表をもとに、1〜nの各数を頂点とし、接続可能な数を辺で結ぶとグラフができるが、このグラフをP(N, n)のグラフと呼ぶことにする．P(2, 16)のグラフの例を図1に示す．

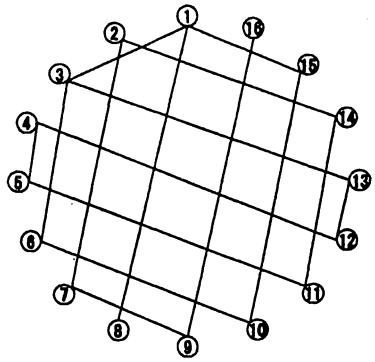

図1 P(2, 16)のグラフ．

N乗数パズルの解を求めることはP(N, n)のグラフにおいてすべての頂点を一度だけ通り、辺がすべて異なる道を見つける問題、すなわちHamilton経路を見つける問題に他ならない．P(N, n)のグラフにおいてHamilton経路が見つかったなら、その道に沿って頂点を順番に並べていけばそれがP(N, n)の解となっている．例えば、図1のP(2, 16)は図2のように辿ればよい．

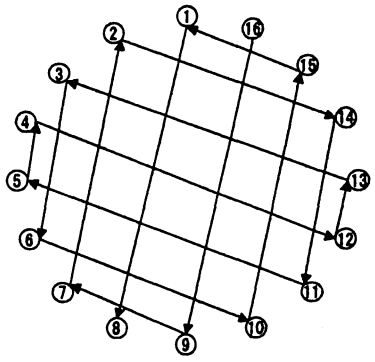

図2　P(2, 16)のHamilton経路を辿るとその解となる．

3　解の探索

N乗数パズルP(N, n)をそのグラフを利用して解くことを考える．n個の異なる数字の並べ方はn!通りあり、nが少しでも大きくなると力技での探索は困難である．立方数パズルやN乗数パズルは、解を求めるにも、解がないことを示すにもなんらかの工夫が必要になってくる．

はじめに、P(N, n)のグラフから次のことは容易に分かる.

(P1) 次数1の頂点は2個以下でなければならない. なぜなら、数を並べたときに端になることができる数は2個しかない.

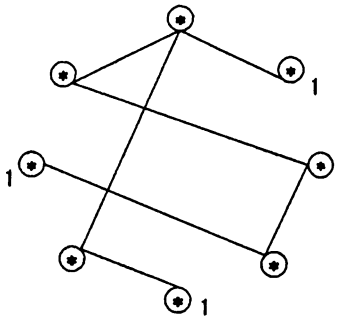

図3 次数1の頂点が3個ある場合には解はない.

(P2) 次数 0 の頂点がある場合には解はない. これは次数0の頂点に並べてN乗数になる数がないことによる.

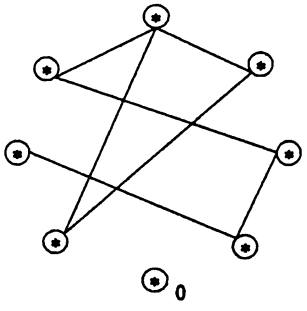

図4 次数0の頂点があるときは解がない.

(P2)はグラフの非連結性の判定の非常に簡単な場合である. より一般化された非連結性の判定が知られているが[3]、探索の各頂点においてそれらを行うとコストが大きいので、採用していない.

今、頂点の1個を道の端点（始点）に選んで、そこから出ている枝を深さ優先で辿りながらHamilton経路を探索していくものとする. このとき始点(探索のルート)から現在探索している頂点(探索の末端)に至る道を**探索パス**と呼ぶことにする. また、探索パスに含まれている全ての頂点とそこから出ている全ての辺を取り除いて得られるグラフを**残りグラフ**と呼ぶことにする.

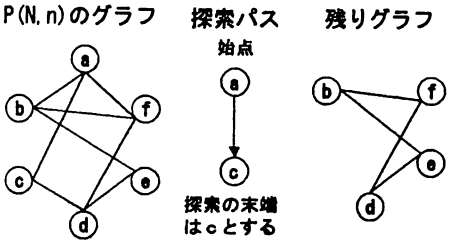

図5 探索パスと残りグラフ.

(P1)を残りグラフについて適用すると次のことが分かる.

(P1)' 残りグラフにおいて探索パスの末端に続く可能性のある頂点以外に次数1の頂点が2個以上ある場合は、その末端に続く解はない. なぜなら、探索パスは既に端点(始点)を1個持っており、もう片方の端点になれる頂点は残り1個しかない.

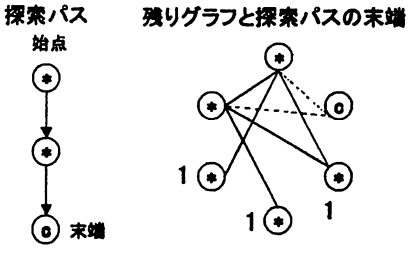

図6 残りグラフに次数1の頂点が2個以上できたらそれ以上探索不要.

(P1)' と本質的に同じだが、次の判定により探索の深さを一つ浅くできる.

(P1)" 探索パスの末端に続く可能性のある残りグラフの頂点に次数1となるものが少なくとも3個できた場合には、その末端に続く解はない. なぜなら、探索パスの末端につなげることができる頂点は1個なので、どの頂点を選んでも残りグラフに次数1の頂点が少なくとも2個以上できてしまう.

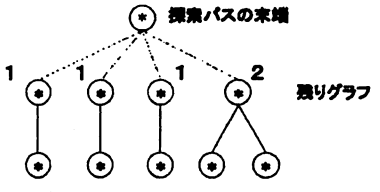

図 7 探索パスの末端に続く可能性のある残りグラフの頂点に次数1となるものが少なくとも3個ある場合には解はない.

また、(P2)も部分グラフについて同様のことが言える.

(P2)' 次数が 0 の頂点が部分グラフにできた場合にはそれ以上探索する必要がない.

解が複数あるときはその"一つだけ"見つけることができればよいものとして、次のことが分かる.

(S1) P(N, n)のグラフに次数 1 の頂点が 1 個あるときはその頂点を、2 個あるときはそのどちらか片方のみを始点として探索すればよい. これは次数 1 の頂点は端点にならなければならないことによる.

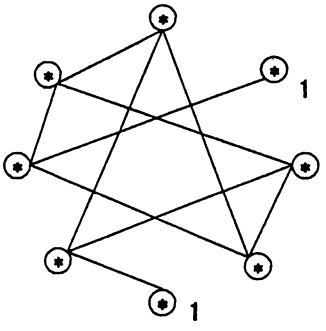

図 8 次数 1 の頂点から探索すればよい.

(S2) 探索パスの末端に続く可能性のある残りグラフの頂点に次数 1 となる頂点が 1 個かまたは 2 個あれば、そのうちの 1 個のみを探索し、他の次数の頂点は探索する必要がない (ここで(P1)" から次数 1 の頂点が 3 個ある場合は考える必要がない). なぜなら、次数 1 の頂点は探索パスの末端に続くかN乗数パズルの解となる道の終点にならなければならない. 残りグラフから作られるN乗数パズルの解の部分列を考えると、その部分列にできる両端のどちらを現在の探索パスの末端に繋げてもよいので、次数 1 の頂点の 1 個を繋げることにして、この場合のみ調べればよい.

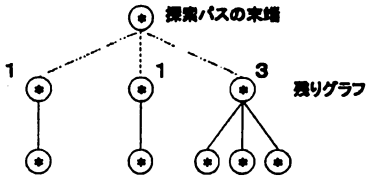

図 9 次数 1 の頂点を 1 個のみを探索すればよい.

さらに、探索する頂点の順序付けを次のようにする.

(H1) 探索は次数の少ない頂点から行う. これは次数が少ないほど、並べ替えの自由度が小さく、辺の数が少なくなってからだとうまく並べることが困難になる可能性が高いことによる[1].

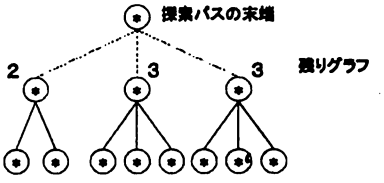

図 10 次数の小さい頂点から探索する.

(P1), (P2), (S1), (S2), (H1)からN乗数パズルの解を探索するアルゴリズムNPを次のように定義する:

アルゴリズムNP

入力 : P(N, n)

出力 : P(N, n)の解

方法 :

(1) P(N, n)のグラフGを作成する.

(2) Gに次数 0 の頂点があるか、または、次数 1 の頂点が 3 個以上ある場合には解なしで終了.

(3) G に次数 1 の頂点があれば、その頂点を探索パスの始点とする. それ以外の場合は、次数の最も少ない頂点を始点とする. 次数の同じ頂点が複数ある場合には最も"数"の大きな頂点を始点とする.

(4) 探索パスの末端に続く残りグラフの頂点を深さ優先で探索していく. 次数が同じものが複数あるときは"数"の大きな頂点から探索する. このとき :

(4-1) Hamilton 経路が見つかったら、その経路に沿って数を出力して終了. これP(N, n)の解となる.

(4-2) 残りグラフに次数 0 の頂点があるか、または、次数 1 の頂点が 3 個以上あれば次の頂点を探索する.

(2-3) 探索パスの末端に続く残りグラフに次数 1 の頂点が少なくとも 1 個あるときは、その 1 個のみを探索する. その頂点に続く解が見つからなかったら親の頂点の探索に戻る.

(2-4) その深さで探索すべき頂点が残っているときはそれを探索し、そうでないときは親の

[1] 実際、この順序と順序付けをしないものとを比較すると探索頂点数に数十倍程度差がある.

頂点の探索に戻る.

(2-5) 始点において探索すべき頂点の全ての探索が終わったら解なしで終了.

アルゴリズムNPはより実践的な改良ができる.その一つは残りグラフに次数の小さな頂点が多い場合にはそれは探索をしないというものである. これは次数の大きな頂点が多いグラフほど解を見つけやすい場合が多いことを利用している. 立方数パズルP(3, n)の場合、使用する数字の個数nの40%未満の浅い深さの探索では、残りグラフに次数3以上の頂点の数がnの40%未満となるものは探索しないようにする. ここで40%という数値は簡単な予備実験から決定している.これをNPに取り入れたアルゴリズムをNP2とよぶことにする. NP2は解が求まる保証はないが、アルゴリズムNP1と比較して探索頂点数はおおむね5～7分の1程度となる.

別な改良として、探索において使用する数が一つ少ないP(N, n-1)の解を利用してP(N, n)の解を求めることが考えられる. P(N, n-1)の解を順番に可能な限り辿っていき、それから探索を行うというものである.この手法はもとにしたP(N, n-1)の解がP(N, n)の解に近い場合には非常に高速に解を見つけることができる. 上の次数を利用する方法と一つ少ないnの解を利用する両方の手法を取り入れたアルゴリズムをNP3とよぶことにする.

4 立方数パズルと類似パズルの解

4.1 平方数パズルの解

平方数パズルP(2, n)はアルゴリズムNPを使うことにより、ほとんど無駄な頂点を探索することなく、解を求めることができる. n≦30000の場合、n=2～14, 18～22, 24を除く全てのnに対し解が存在することを確認した. このとき無駄な頂点を探索したnは1967通りあり、そのとき余計に探索した頂点数の割合[2]の平均は3.9%である. n=2～6ではP(2, n)のグラフに次数0の頂点が1個以上あり、n=7～14, 18ではP(2, n)のグラフに次数1の頂点が3個以上あるため、解は存在しない.

また、n=32～100に対し、巡回する解が存在することを確認した. 付録Aにn=100のときの巡回する解の例を示す.

[2] {(探索頂点数)/n−1}×100.

表3 平方数パズルP(2, n)の解

n	解	備　考
2 ～ 6	×	次数0の頂点が1個以上
7 ～ 14	×	次数1の頂点が3個以上
15 ～ 17	○	
18	×	次数1の頂点が3個以上
19 ～ 22	×	
23	○	
24	×	
25 ～30000	○	

4.2 立方数パズルの解

アルゴリズムNP, NP2, NP3を使って、立方数パズルP(3, n)を解いた. n≦315ではn=305, 333, 385～415のときに解がある. n=2～22, 27～92についてはP(3, n)のグラフに次数0の頂点が1個以上あり、n=23～26, 93～294, 344～384についてはP(3, n)のグラフに次数1の頂点が3個以上あるため解は存在しない. 最小のnである305の解は複数あることを確認している. また、このnに対しアルゴリズムNPで探索した頂点数は8267であり、問題の大きさから考えると極めて少ない. 付録Bにn=305の解の一つ示す.

表2 立方数パズルP(3, n)の解

n	解	備　考
2 ～ 22	×	次数0の頂点が1個以上
23 ～ 26	×	次数1の頂点が3個以上
27 ～ 92	×	次数0の頂点が1個以上
93 ～ 294	×	次数1の頂点が3個以上
295 ～ 304	×	
305	○	
306 ～ 332	×	
333	○	
334 ～ 343	×	
344 ～ 384	×	次数1の頂点が3個以上
385 ～ 415	○	

アルゴリズムNPではn≦410に対し解が求まり、アルゴリズムNP2, NP3ではn≦415に対し解が求まっている. ただし、NP2ではn=305の解が見つからず、NP3ではn<390は調べてない. 図11に解が見つかるまでに探索した頂点数を対数グラフで示す. n=410のとき探索した頂点数は、NPが1.6×10^{12}、NP2が3.2×10^{11}、NP3が4.6×10^{4}であった[3]. グラフからその計算量は指数オーダーで増える傾向にあるこ

[3] 実験に使用したプログラムは毎秒500万頂点を探索する. n=410を解くために要した時間はNPでは88時間、NP2では18時間、NP3では0.001秒である.

とがうかがえる.

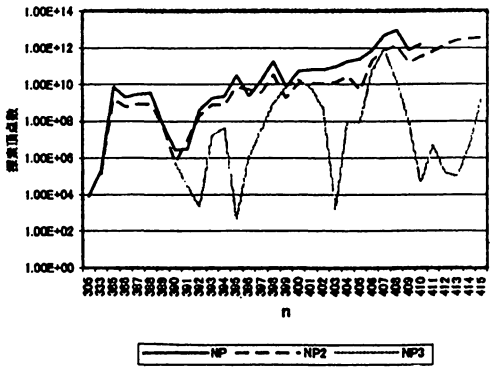

図 11 立方数パズルの探索ノード数

また、n=295～304, 306～332, 334～343 について解が存在しないことを調べるために探索した頂点数を図 12 に示す. このとき探索した頂点数は、解を見つけるために探索した頂点数とほぼ同じ程度であった.

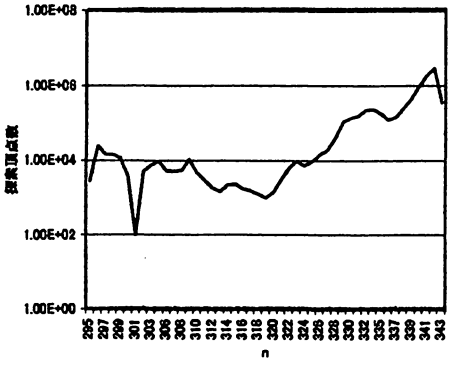

図 12 解が存在しないことを示すために探索した頂点数

4.3 4乗数パズルの解

4 乗数パズル P(4, n) において、n≦100000 で解が存在する可能性があるのは、(P1), (P2) から n=5903～6561, 8079～10001, 10735～100000 のときである. また、巡回する解が存在するためには、グラフの各頂点の次数が 2 以上でなければならないが、この条件を満たすには最小の n は 9641 である. 現在のところいずれの解も見つかってはいない.

表 4 P(4, n) の解

n	解	備　考
2 ～ 72	×	次数０の頂点が１個以上
73 ～ 80	×	次数１の頂点が３個以上
81 ～ 496	×	次数０の頂点が１個以上
497 ～ 624	×	次数１の頂点が３個以上
625 ～ 1752	×	次数０の頂点が１個以上
1753 ～ 5902	×	次数１の頂点が３個以上
5903 ～ 6561	?	
5902 ～ 8078	×	次数１の頂点が３個以上
8079 ～ 10001	?	
10002 ～ 10734	×	次数１の頂点が３個以上
10735 ～100000	?	

4.4 5乗数パズルの解

5 乗数パズル P(5, n) において、n≦200000 で解が存在する可能性があるのは、(P1), (2) から n=148831～161051 のときである. 現在のところ P(5, n) の解は見つかってはいない.

表 5 P(5, n) のグラフ

n	解	備　考
2 ～ 226	×	次数０の頂点が１個以上
227 ～ 242	×	次数１の頂点が３個以上
243 ～ 2612	×	次数０の頂点が１個以上
2613 ～ 3124	×	次数１の頂点が３個以上
3125 ～ 12918	×	次数０の頂点が１個以上
12919 ～148830	×	次数１の頂点が３個以上
148831 ～161051	?	
161052 ～200000	×	次数１の頂点が３個以上

4.5 素数パズル

N 乗数パズルと類似した素数パズルが提案されている.

[素数パズル]

連続する自然数 1, ･･･, n を並べ替えて、隣接するどの 2 数の和も素数になるようせよ.

この問題の解はアルゴリズム NP を使うことにより効率良く解を見つけることができる. n=2～10000 に対し、そのいずれにも解が存在することを確認した. これらの探索では全く無駄な頂点は訪問していない. また、n=4～1000 の偶数に対し巡回する解も存在することを確認した. 付録 C に n=100 の場合の巡回する解を示す.

素数パズルは、平方数パズルと同様にそのグラフを作ると、各頂点の次数がずっと大きく、解を見つけるのは平方数パズルよりもやさしい. これは図 14

のように接続表を見ると直感的に分かりやすい.

表5 n=16 のときの素数パズルの接続表

使用する数	並べることができる数					
1	16	12	10	6	4	2
2	15	11	9	5	3	1
3	16	14	10	8	4	2
4	15	13	9	7	3	1
5	14	12	8	6	2	
6	13	11	7	5	1	
7	16	12	10	6	4	
8	15	11	9	5	3	
9	14	10	8	4	2	
10	13	9	7	3	1	
11	12	8	6	2		
12	11	7	5	1		
13	16	10	6	4		
14	15	9	5	3		
15	16	14	8	4	2	
16	15	13	7	3	1	

5 N乗数パズルの解の存在

P(N,n)のグラフGの頂点pの次数をdeg(p)で表すことにする. 頂点pの次数は、(p+n)がN乗数にならなければならないことから、その候補は$[(p+n)^{1/n}]$から$[p^{1/n}]$を引いた値となる. ただし、pは2度訪問することはできないので、pの2倍が整数となっているときはマイナス1をする. ここで[a]はaを超えない最大の整数である.

$$\deg(p)=\begin{cases}[(p+n)^{1/n}]-[p^{1/n}] \\ \qquad ((2p)^{1/N}\text{が整数でないとき}) \\ [(p+n)^{1/n}]-[p^{1/n}]-1 \\ \qquad ((2p)^{1/N}\text{が整数のとき})\end{cases}$$

これからNが与えられたときnを十分大きく取れば頂点pの次数はいくらでも大きくでき、したがってグラフGの最小次数dはnを十分大きくすれば、いくらでも大きくできる. また、Gはdを大きく取ることにより、ランダムなr-正則グラフS(r≧3)を部分グラフとして持つことが期待できる. ここで、ランダムグラフの理論において次の定理が知られている[4].

定理(Robinson and Wormald)

固定された r≧3 に対しほとんど全ての[4] r-正則グラフはHamilton閉路をもつ.

この定理を使うと部分グラフSはほとんど全ての場合Hamilton閉路をもつことから、N乗数パズルのグラフGもほとんど全ての場合、Hamilton閉路を持つ. どこかの頂点を始点として、閉路に沿って数を並べればN乗数パズルの解を与えるばかりでなく、もっと強く、巡回する解を与える. したがって、N(≧2)が与えられたとき、nを大きく取ればN乗数パズルにはその解に加えて巡回する解も存在すると期待できる.

6 まとめ

立方数パズルとその一般化であるN乗数パズルは各数を頂点とするグラフのHamilton経路を見つける問題に置き換えることができる. そしてグラフを利用したアルゴリズムNPにより、GPCCの課題である立方数パズルにはn=305のとき解があることを求めた. さらに、n≦415に対しn=333, 385～415のときにも解があることを求めた. アルゴリズムNPは平方数パズルと素数パズルの解も効率よく見つけることができた. また、N乗数パズルはnが十分大きければ解が存在すると期待できることを議論した. 立方数パズルの巡回する解、4乗数パズルの解を求めることなどが課題としてあげられる.

参考文献

[1] 小谷, 南雲, 飯田, 竹内, 一松, プログラミングシンポジウム GPCC のゲームとパズル, 情報処理学会研究報告, 99-GI-1, pp.55-61, 1999.

[2] GPCC ホームページ, http://www.cs.inf.shizuoka.ac.jp/~iida/GPCC/gpcc02.html.

[3] A.V.エホイ, J.E.ホップクロフト, J.D. ウルマン共著 野崎, 野下共訳, アルゴリズムの設計と解析 I, II, サイエンス社, 1977.

[4] R.W. Robinson and N.C. Wormald, Almost all regular graphs are Hamiltonian, Random Structures Algorithms 5, pp.117-125, 1994.

付録A P(2,100)の巡回する解

100 96 73 71 98 46 75 94 50 31 69 52 92 29 35 86 83 61 60 84 85 59 62 82 18 63 81 88 56 65 79 90 54 67 77 44 37 27 22 14 2 23 58 42 39 25 11 38 43 78 91 53 68 76 93 7 57 87 34 66 55 89 32 49 95 26 74 47 17 64 80 41 40 9 72 97 24 12 4 5 20 16 48 33 3 13 51 70 99 1 8 28 36 45 19 30 6 10 15 21

[4] "ほとんど全ての"は$\lim_{n\to\infty} P(\text{解の個数}>0)=1$を意味する.

付録B　P(3, 305)の解

256 87 129 214 298 45 171 172 44 299 213 130 86
257 255 88 128 215 297 46 170 173 43 300 212 131
85 258 254 89 127 216 296 47 169 174 42 301 211
132 84 259 253 90 126 217 295 48 168 175 41 302
210 133 83 260 252 91 125 218 294 49 167 176 40
303 209 134 82 261 251 92 33 183 160 56 287 225
118 98 245 267 76 140 203 13 14 202 141 75 268 244
99 26 190 153 63 280 232 111 105 238 274 69 147
196 20 7 1 124 219 293 50 166 177 39 304 208 135
81 262 250 93 32 184 159 57 286 226 117 8 19 197
146 70 273 239 104 112 231 281 62 154 189 27 37
179 164 52 291 221 122 3 5 22 194 149 67 276 236
107 109 234 278 65 151 192 24 101 242 270 73 143
200 16 11 205 138 78 265 247 96 120 223 289 54 162
181 35 29 187 156 60 283 229 114 102 241 271 72
144 199 17 108 235 277 66 150 193 23 4 121 222 290
53 163 180 36 28 188 155 61 282 230 113 103 240
272 71 145 198 18 9 116 227 285 58 158 185 31 94
249 263 80 136 207 305 38 178 165 51 292 220 123
2 6 21 195 148 68 275 237 106 110 233 279 64 152
191 25 100 243 269 74 142 201 15 12 204 139 77 266
246 97 119 224 288 55 161 182 34 30 186 157 59 284
228 115 10 206 137 79 264 248 95

付録C　n=100の素数パズルの巡回する解

90 89 92 47 84 83 80 87 62 77 74 75 26 71 86 65
66 23 60 53 56 41 48 91 36 17 50 11 20 81 98 59
72 95 96 35 78 5 68 29 32 51 38 33 8 21 2 99 14
45 44 93 88 69 82 15 58 39 64 63 76 27 46 57 100
9 94 3 70 79 24 73 54 43 30 67 40 49 34 13 18 85
28 61 22 25 42 19 12 55 4 97 52 37 16 1 10 31 6
7