Vol.2013-ARC-207 No.1
Vol.2013-HPC-142 No.1
2013/12/16

対称正定値行列の連立1次方程式に対するフィルタ適用の可能性の検討

村上 弘[1,a)]

概要：対称正定値行列の連立 1 次方程式を係数行列 A のレゾルベントを利用して解く方法を考察する．レゾルベントの作用はシフト付きの連立 1 次方程式を反復法で解いて与えるが，シフトの値を正の実軸から離せば行列の条件数が下がることから解き易くなる．
いま，異なるシフトのレゾルベントの線形結合の形で構成した A の近似逆作用素が大きい固有値の固有ベクトルに対しては良い近似となるようにする．その作用素を元の連立 1 次方程式の右辺に作用させて近似解を作る．その近似解の元の方程式に対する残差は，小さい固有値の固有ベクトルで張られた A の階数の小さい不変部分空間に近似的に含まれる．するとその残差を右辺とする修正方程式を CG 法を用いて零ベクトルを初期値として解けば，比較的少ない反復回数で収束すると思われる．

キーワード：連立 1 次方程式，レゾルベント，フィルタ

A Filtering Method to Solve a Linear Equation Whose Coefficient Matrix is Symmetric Positive Definite

Hiroshi Murakami[1,a)]

Abstract: We consider a method to solve a linear equation whose coefficient matrix A is SPD by using the resolvents of the matrix. Applications of resolvents are reduced by some iterative method to solve linear equations with diagonal shifts, which requires less work when their shifts goes far from the positive real axis since condition numbers of their matrices are reduced.
We construct an approximated inverse operator of A as a linear combination of resolvents which gives good approximations only for those eigenvectors with large eigenvalues. Then, the operator is applied to the r-h-s of the original linear equation to obtain an approximated solution. The residual of this approximated solution is contained in the invariant subspace of A whose rank is small which is spanned by those eigenvectors whose values are small. Therefore, when CG method is applied to the correction equation whose r-h-s is the residual started from a null vector, it would converge in a relatively small number of iterations.

Keywords: Simultaneous linear equations, Resolvent, Filter

1. はじめに

いま，実対称正定値の疎な行列 A を係数とする連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を，反復法を用いて解くことを考える．

正の値 α_k を加えて条件数を減少させたシフト方程式 $(A+\alpha_k I)\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}$ をなんらかの反復法で解いてシフト方程式の解の組 $\mathbf{x}^{(k)}$，k=1, 2, . . . , m を作る．そうしてそれらの線形結合 $\mathbf{x}' = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \mathbf{x}^{(k)}$ を結合係数 γ_k，k=1, 2, . . . , m をうまく調整して，A の固有ベクトルによる展開でみたときに $\mathbf{x}'$ の展開係数が元の連立 1 次方程式の解 $\mathbf{x}$ の展開係数を固有値の大きいところでは良く近似するように決める．

すると，大きい固有値の固有ベクトル成分については $\mathbf{x}'$ は真の解 $\mathbf{x}$ を良く近似する解であるから，$\mathbf{x}'$ に対する元の方程式の残差 $\mathbf{r} := \mathbf{b} - A\mathbf{x}'$ は，固有値が大きくない固有ベクトルの全体により張られた次元があまり大きくない

[1] 首都大学東京・数理情報科学専攻
Department of Mathematics and Information Sciences, Tokyo Metropolitan University
[a)] mrkmhrsh@tmu.ac.jp

© 2013 Information Processing Society of Japan

Vol.2013-ARC-207 No.1
Vol.2013-HPC-142 No.1
2013/12/16

不変部分空間 $\mathcal{I}$ に近似的に含まれる．すると修正方程式 $A\mathbf{y}=\mathbf{r}$ をクリロフ部分空間法（たとえば CG 法）により初期ベクトル $\mathbf{0}$ から開始して解くならば，少ない反復回数で収束するはずである．そうして元の連立 1 次方程式の解は $\mathbf{x}:=\mathbf{x}'+\mathbf{y}$ として得られるであろう．

2. 準備

連立 1 次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の解法を考える．簡単のため，係数行列 A は疎で実対称正定値とする．すると A の固有値は正の実数で固有ベクトルも実で，固有ベクトルの組を空間全体を張る正規直交基底となるようにとれる．

シフト τ の A のレゾルベントを $\mathcal{R}(\tau)\equiv(A-\tau I)^{-1}$ とする．任意のベクトル $\mathbf{p}$ に対する $\mathcal{R}(\tau)$ の作用は，連立 1 次方程式 $(A-\tau I)\mathbf{u}=\mathbf{p}$ を解いて実現する．シフト τ が正の実軸から離れればレゾルベントの作用を実現する方程式は条件数が減少するので反復法により解くことが容易となる．今回用いるシフト τ の値は負の実数 $-\alpha_k$ $(\alpha_k>0)$ に限定する．

いまレゾルベントの線型結合を $\mathcal{F}=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\mathcal{R}(\tau_k)$ とおく．すると A の固有値 λ の任意の固有ベクトル $\mathbf{v}$ に対して，$\mathcal{F}\mathbf{v}=f(\lambda)\mathbf{v}$ が成立する．ここで，有理関数 $f(\lambda)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k/(\lambda-\tau_k)$ は線形作用素 $\mathcal{F}$ の伝達関数と呼ばれる．

逆に $f(\lambda)=\sum_k\gamma_k/(\lambda-\tau_k)$ の形で表される有理関数 $f(\lambda)$ が与えられると，それを伝達関数とする線形作用素がレゾルベントの線形結合により $\mathcal{F}=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\mathcal{R}(\tau_k)$ で実現できる．

3. 近似逆作用素を用いる方法について

ある値 θ を閾値として設定する．いまレゾルベントの線形結合である線形作用素 $\mathcal{F}$ が固有値 λ が（閾値よりも）大きい固有ベクトル $\mathbf{v}$ に対して，A の良い近似逆作用素となるように構成する．言い換えれば，$\mathcal{F}\mathbf{v}=f(\lambda)\mathbf{v}$ であるが，$\lambda>\theta$ に対しては $f(\lambda)\approx\lambda^{-1}$ であるようにする．

そのとき，与えられた元の連立 1 次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ を，A のレゾルベントから作られる近似逆作用素 $\mathcal{F}$ を用いて，以下の手順で解くものとする．

(1) 方程式の右辺 $\mathbf{b}$ に $\mathcal{F}$ を作用させて $\mathbf{x}':=\mathcal{F}\mathbf{b}$ を作る．
$\mathbf{x}'$ は固有ベクトル展開で表した場合に，（閾値より）大きい固有値の成分については $\mathbf{x}$ の良い近似解になる．

(2) 次に $\mathbf{x}'$ に対する元の連立 1 次方程式の残差 $\mathbf{r}:=\mathbf{b}-A\mathbf{x}'$ を作る．
この $\mathbf{r}$ は $(I-A\mathcal{F})\mathbf{b}$ に等しいので近似逆作用素 $\mathcal{F}$ に対する仮定により，固有値が（閾値よりも）大きい固有ベクトルをほとんど含まない．いま（閾値よりも）固有値が大きくない固有ベクトルで張られる不変部分空間を $\mathcal{I}$ とするとき，$\mathbf{r}$ は $\mathcal{I}$ に近似的に含まれることがわかる．

(3) 残差 $\mathbf{r}$ に対する修正方程式 $A\mathbf{z}=\mathbf{r}$ をクリロフ部分空間法（たとえば CG 法）で初期ベクトルを $\mathbf{0}$ として解く．
もしも不変部分空間 $\mathcal{I}$ の階数が小さければ（またさらに実効的な条件数も低下しているので），この比較的少ない反復回数で収束して $\mathbf{z}$ が得られるであろう．

(4) 元の連立 1 次方程式の解を $\mathbf{x}:=\mathbf{x}'+\mathbf{z}$ として作る．

付記

上記の最後の 2 つのステップは，方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ をクリロフ部分空間法（たとえば CG 法）で初期ベクトルを $\mathbf{x}'$ として解くことに一致する．また上記の最初の 3 つのステップを拡張して，まず最初に $\mathbf{x}'=\mathbf{0}$，$\mathbf{r}=\mathbf{b}$ とおいて，そこから始めて $\mathbf{r}$ に $\mathcal{F}$ を作用させて $\mathbf{y}$ を作り，$\mathbf{x}'=\mathbf{x}'+\mathbf{y}$ とし，$\mathbf{r}=\mathbf{b}-A\mathbf{x}'$ とする過程を数回反復すれば，大きな固有値に対する $\mathbf{x}'$ の固有ベクトル展開の係数を改良できる．$\mathbf{b}$ から $\mathbf{r}$ を作る過程を作用素とみるとそれは $I-A\mathcal{F}$ であり，その伝達関数は $1-\lambda f(\lambda)$ であり，残差反復を ℓ 回行なう場合の作用の伝達関数はその ℓ 乗になる．

3.1 近似逆作用素の伝達関数の引数の尺度変換

いま，有理関数 $g(t)=\sum_{k=1}^{m}c_k/(t-t_k)$ が引数 t が閾値 t' よりも大きい領域で t^{-1} の良い近似関数であるとする．そのとき任意の正数 θ に対して $f(x)\equiv\theta^{-1}g(x/\theta)$ とすると，$f(x)$ は引数 x が $\theta t'$ よりも大きい領域で x^{-1} の良い近似関数となることが容易にわかる．すると $f(x)=\theta^{-1}g(x/\theta)=\theta^{-1}\sum_{k=1}^{m}c_k/(x/\theta-t_k)=\sum_{k=1}^{m}c_k/(x-\theta t_k)$ により，$\gamma_k=c_k$，$\tau_k=\theta t_k$ とすると，$f(x)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k/(x-\tau_k)$ であることがわかる．以上のことから，関数 $g(t)$ が $t=t'$ を閾値とする近似逆作用素の伝達関数であれば，その極だけを一斉に正数 θ 倍に尺度変換すると，$x=\theta t'$ を閾値とする近似逆作用素の伝達関数 $f(x)$ が得られることがわかる．つまり，シフト（極）分布の尺度変換だけで簡単に閾値を変更できる．

3.2 無限遠での逆巾展開による係数決定法

いま，伝達関数 $g(t)=\sum_{k=1}^{m}c_k/(t-t_k)$ の負の実数である極の分布 $t_k=-\alpha_k$，k=1, 2, …, m を先に与えたときに，各極に対する係数 c_k，k=1, 2, …, m をうまく決めることで，無限遠 $t=\infty$ の近傍での展開 $g(t)-t^{-1}=O(t^{-(\ell+1)})$ の次数 ℓ がちょうど取りうる最大の値 m となるようにしてみる．（注：この場合には，条件が無限遠付近だけで設定されているので，事前に明確な閾値 θ を設定することができない．）

いま $\mathbf{c}$ を要素が c_k，k=1, 2, …, m であるベクトルとし，V を要素が $v_{i,j}={\alpha_j}^{i-1}$, i, j=1, 2, …, m であるバンデルモンド行列とし，また $\delta_{i,j}$ をクロネッカーの記号として $\mathbf{h}$ を要素が $h_j=\delta_{j,1}$，j=1, 2, …, m であるベクトルとするとき，上で述べた条件は m 次の連立 1 次方程式 $V\mathbf{c}=\mathbf{h}$ に

© 2013 Information Processing Society of Japan

なる．この方程式はバンデルモンド行列専用の解法 [1] を用いて解くのが良い．

以下の例は $m = 8$ 個の（符号を変えた）シフトを $\alpha_k = k$ と設定した場合である．この場合にはシフトに対応するレゾルベントの係数はすべて整数となり，$c_1 = 8$，$c_2 = -28$，$c_3 = 56$，$c_4 = -70$，$c_5 = 56$，$c_6 = -28$，$c_7 = 8$，$c_8 = -1$ となる．（注：個数 m を与えたときにシフトをどのように分布させるのが良いかについてはまだ解明ができていない）．

この方法で得られたフィルタの伝達関数からそれぞれ $g(t)$，$|g(t) - t^{-1}|$，$|1 - tg(t)|$ を両対数でプロットしたグラフを**図 1**，**図 2**，**図 3** に掲げる．図 2 からは，t が大きいところで $g(t)$ が t^{-1} に極めて近くなることがわかる．また同様に図 3 からは，t が大きいところで $1 - tg(t)$ が極めて小さくなることがわかる．この $1 - tg(t)$ の値は右辺 $\mathbf{b}$ から $\mathbf{x}' := \mathcal{F}\mathbf{b}$ を作り，その $\mathbf{x}'$ に対する残差 $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}'$ を作るときに，$\mathbf{b}$ に含まれていた各固有ベクトルが $\mathbf{r}$ では何倍となって含まれるかを固有値の正規座標 t で表したものになる．その値が t が大きくなると急速に 0 に近づくことから，$\mathbf{b}$ に含まれていた固有値の大きい固有ベクトルが $\mathbf{r}$ に移ると強く除去されることがわかる．またさらに**図 4** は，この近似逆差用素 $\mathcal{F}$ 用いた残差反復を行なった場合に，元の右辺ベクトルに含まれる各固有ベクトルが反復後に何倍となって残差ベクトルに伝達されるかを反復 1 回，2 回，3 回についてそれぞれ示したグラフである．

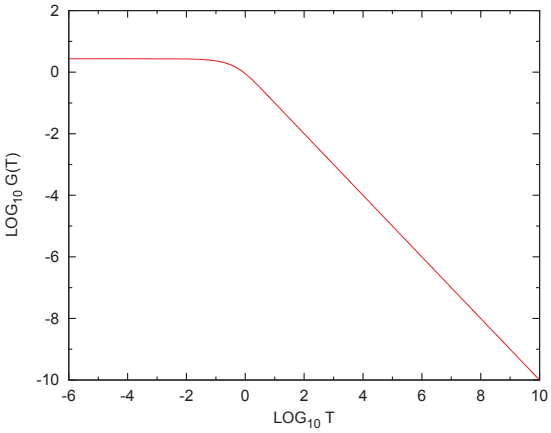

図 1 逆巾展開による近似逆作用素：伝達関数 $g(t)$ のグラフ（両対数）

3.3 最小 2 乗法による係数決定法

いま，閾値を 1 として規格化された伝達関数 $g(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k/(t - t_k)$ を考える．まず極の個数 m を決め，次に m 個の負の実数 $t_k = -\alpha_k\,(< 0)$，k=1, 2, . . . , m を極として先に与える（どのように極を分布させるのが良いのかはまだ解明していない）．そうして $g(t) \approx t^{-1}$ を半無限区間 $t \in [1, \infty)$ での重み $w(t) = 1$ による最小 2 乗近似であるとする．近似の残差のノルムの 2 乗の値 K は，

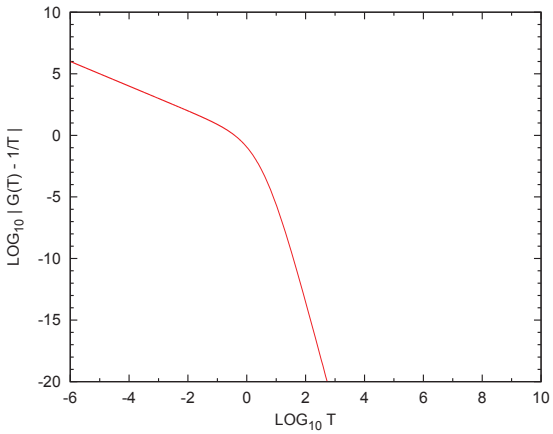

図 2 逆巾展開による近似逆作用素：$|g(t) - t^{-1}|$ のグラフ（両対数）

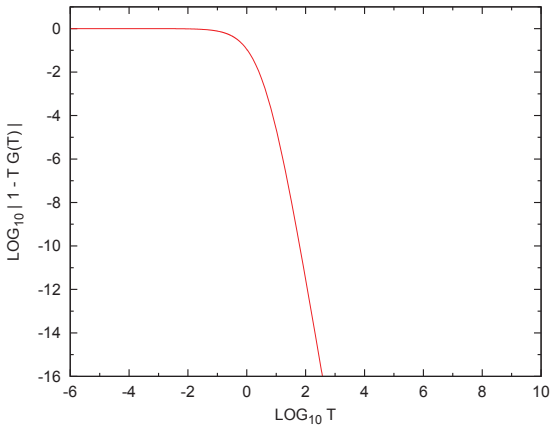

図 3 逆巾展開による近似逆作用素：右辺ベクトルから残差への伝達率の大きさ $|1 - tg(t)|$ のグラフ（両対数）

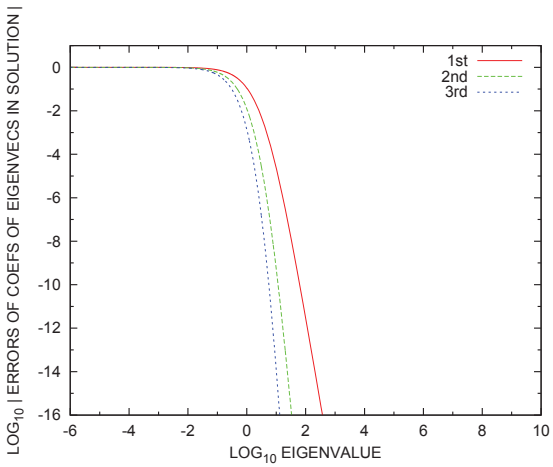

図 4 逆巾展開による近似逆作用素：残差反復の伝達率の大きさのグラフ（両対数）

$K = \int_{\theta}^{\infty} \{t^{-1} - \sum_{k=1}^{m} c_k/(t+\alpha_k)\}^2 dt$ であり，この c_i についての正値 2 次形式 K を最小にする条件は $0 = \frac{1}{2}\,\partial K/\partial c_i = S_{i,i}c_i + \sum_{j=1\,(j\neq i)}^{m} S_{i,j}c_j - \beta_i$ となる．ただし，ここで $\beta_i = {\alpha_i}^{-1}\log(1+\alpha_i)$，$S_{i,i} = (1+\alpha_i)^{-1}$，そうして $i \neq j$ のとき $S_{i,j} = S_{j,i} = (\alpha_i - \alpha_j)^{-1}\log\{(1+\alpha_i)/(1+\alpha_j)\}$ で

© 2013 Information Processing Society of Japan

ある．

いま $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$ とし，$\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)^T$ とすると，K の最小値を与える条件式は，m 次の実対称行列 S を係数とする連立 1 次方程式 $S\mathbf{c} = \beta$ になる．この方程式は S が良条件ならばコレスキ分解 $S = LL^T$，あるいは修正コレスキ分解 $S = LDL^T$ を用いて解くが，悪条件であれば S の列交換付きハウスホルダ QR 分解かあるいはヤコビ法で固有値分解を行いある微小な閾値よりも小さい固有値とそれに対応する固有ベクトルを省くいわゆる「切断正則化」を施して解くことができる．

例として，閾値を $\theta = 1$ と設定して，$m = 8$ 個のシフトを $t_k = -\alpha_k = -k^{-1}$，$k$=1, 2, ..., m と指定した場合に $g(t) \approx t^{-1}$ の最小 2 乗近似で計算には 4 倍精度演算を用いて係数を決定した（**表 1**）．得られたフィルタの伝達関数

表 1 最小 2 乗法による極とその係数（$m = 8$）

k	t_k	c_k
1	-1	$-3.3875771290082833\times10^{-3}$
2	-1/2	$8.7868309423995650\times10^{-1}$
3	-1/3	$-2.7808589549870721\times10^{1}$
4	-1/4	$2.6826926266110036\times10^{2}$
5	-1/5	$-1.0891179004145001\times10^{3}$
6	-1/6	$2.0976352310575689\times10^{3}$
7	-1/7	$-1.8989246750689153\times10^{3}$
8	-1/8	$6.5007137579685536\times10^{2}$

から，それぞれ $g(t)$，$|g(t) - t^{-1}|$，$|1 - tg(t)|$ を両対数でプロットしたグラフを**図 5**，**図 6**，**図 7** に掲げる．図 6 からは，t が閾値 $\theta = 1$ よりも大きいところで $g(t)$ が t^{-1} と極めて近くなること，同様に図 7 からは，t が閾値 $\theta = 1$ よりも大きいところで $1 - tg(t)$ が極めて小さくなることがわかる．また**図 8** は，近似逆作用素 $\mathcal{F}$ による残差反復を行なう場合の右辺ベクトルに含まれる固有ベクトルが反復後の残差ベクトルに何倍となって伝達するかを反復 1 回，2 回，3 回についてそれぞれプロットしたグラフである．

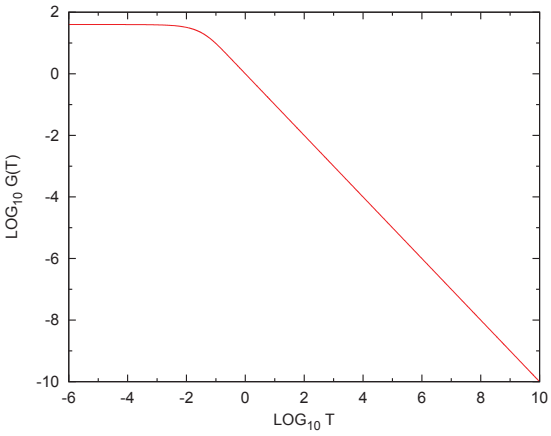

図 5 最小 2 乗法による近似逆作用素：規格化された伝達関数 $g(t)$ のグラフ（両対数）

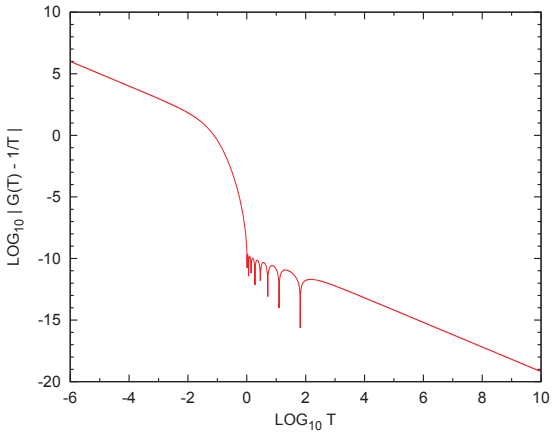

図 6 最小 2 乗法による近似逆作用素：$|g(t) - t^{-1}|$ のグラフ（両対数）

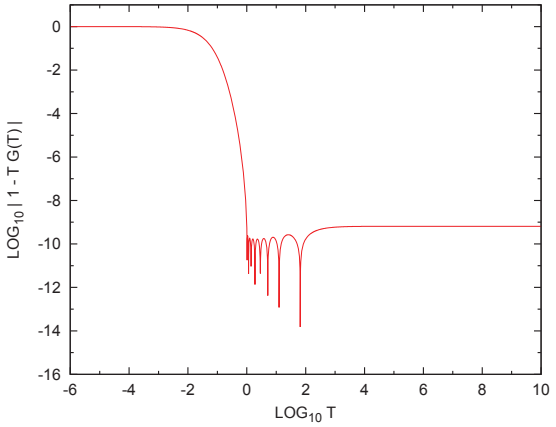

図 7 最小 2 乗法による近似逆作用素：右辺ベクトルから残差への伝達率の大きさ $|1 - tg(t)|$ のグラフ（両対数）

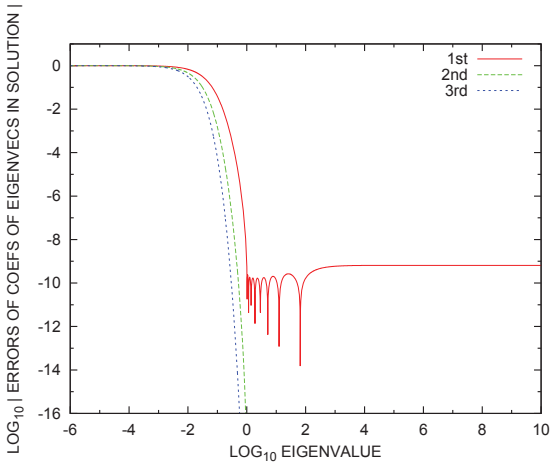

図 8 最小 2 乗法による近似逆作用素：残差反復の伝達率の大きさのグラフ（両対数）

4. 数値実験

正定値対称行列は，適切な直交行列を用いた座標変換により正値の対角行列に変換できる．またレゾルベントの線

© 2013 Information Processing Society of Japan

形結合によるフィルタの適用と CG 法は算法としてどちらも座標の直交変換に対する共変性を持っている．そこで今回の実験に於いては，正定値行列 A が対角行列である場合だけを扱い，A の対角要素である固有値の分布を設定して，一種のシミュレーションとして数値実験を行なうことで，方法の妥当性を非常に少ない計算の手間で調べることにした．但し，このようにすると A が一般的な疎行列である場合に比べて，数値丸め誤差の影響が過小に評価されるリスクがある．また，シフトが $\tau = -\alpha$ である A のレゾルベントの作用を与える連立 1 次方程式は係数行列が $A + \alpha I$ であるが，これも A が一般的な疎行列である場合には，正数 α が対角に加わることで解くことが容易になっているが，一応ある程度の労力を用いてなんらかの反復法により解かれねばならない．ところが，A が対角行列である場合には非常に簡単に解くことができる．このため行列 A が対角化された座標で行なった今回のシミュレーションは，数値丸め誤差の影響や計算時間や必要記憶量などの点からは一般的な場合の参考にはならないことに注意する必要がある．

実験例

この例題の行列次数は $N = 100,000$ で，対角行列 A の要素（固有値）は $\lambda_j = j^2$，j=1, 2, . . . , N とした．最小固有値 $\lambda_{\min}$ は 1 で，最大固有値 $\lambda_{\max}$ は 10^{10} である．いま u_j，j=1, 2, . . . , N を区間 $[0, 1)$ で一様分布する乱数列として，真の解ベクトル $\mathbf{x}$ の要素を $x_j = u_j/\sqrt{1+\lambda_j{}^2}$ で与えた．右辺ベクトル $\mathbf{b}$ は真の解ベクトル $\mathbf{x}$ に係数行列 A を乗じたものとして作成した．近似逆作用素 $\mathcal{F}$ として，「無限遠での逆巾展開による係数決定法」により，$m = 8$ 点でレゾルベントの各シフトを $\tau_k = -10k$，k=1, 2, . . . , m としたものを採用した．そのときレゾルベントの線形結合係数はすべて整数で $\gamma_1 = 8$，$\gamma_2 = -28$，$\gamma_3 = 56$，$\gamma_4 = -70$，$\gamma_5 = 56$，$\gamma_6 = -28$，$\gamma_7 = 8$，$\gamma_8 = -1$ となった．

計算は，まず右辺ベクトル $\mathbf{b}$ を最初の残差 $\mathbf{r}^{(0)}$ とし，$\mathbf{x}'^{(0)} = 0$ として，ℓ=1, 2, . . . , L について $\mathbf{y}^{(\ell)} = \mathcal{F}\mathbf{r}^{(\ell-1)}$，$\mathbf{x}'^{(\ell)} = \mathbf{x}'^{(\ell-1)} + \mathbf{y}^{(\ell)}$，$\mathbf{r}^{(\ell)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}'^{(\ell-1)}$ と反復することで，L 回目の近似解 $\mathbf{x}'^{(L)}$ とその残差 $\mathbf{r}'^{(L)}$ を作る．そうして，$\mathbf{x}'^{(L)}$ を $\mathbf{x}$ の初期値として CG 法により $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を解く．CG 法の残差の 2 ノルムが 10^{-8} 以下になったら CG 法の反復を終了して最終近似解とした．$L = 0$ つまり，近似作用素なしで CG 法だけで解いた場合の反復回数は 156, 869 回であった．$L = 1$ では 133, 123 回，$L = 2$ では 508, 27 回，$L = 3$ では 2, 539 回，$L = 4$ では 1, 632 回，$L = 5$ では 1, 268 回，$L = 6$ では 1, 066 回，$L = 7$ では 920 回，$L = 8$ では 920 回，$L = 9$ では 920 回，$L = 10$ では 921 回となった．

$L = 5$ の場合に $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b}$ の 2-ノルムは 3.16×10^{2} で，$\mathbf{r}^{(L)}$ の 2-ノルムは 7.25×10^{-2} となり，CG 法で 1, 268 回の反復終了時に得られた最終近似解の残差の 2-ノルムは 9.78×10^{-9} となった．最終近似解 $\mathbf{x}$ の真の解からの誤差の 2-ノルムは 2.59×10^{-12} であった．**図 9** のグラフは、横軸に固有値の値を対数で，縦軸には残差の固有ベクトル展開の各固有値に対する係数を対数でプロットしたものである．赤でプロットしたものは $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b}$ の係数であり，緑でプロットしたものは $\mathbf{r}^{(L)}$ の係数であり，青でプロットしたものは CG 法により得られた最終近似解に対する残差の係数である．

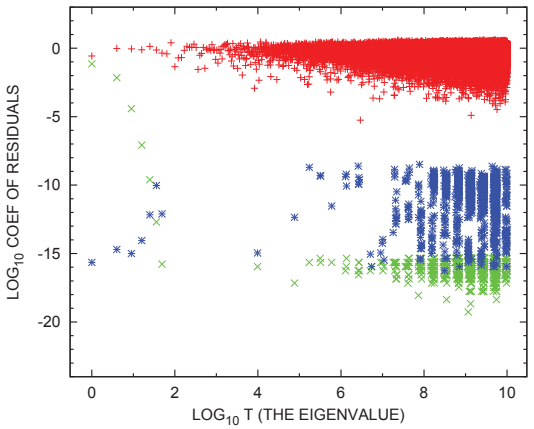

図 9 各残差の固有ベクトル展開係数

5. 終わりに

現在までのところ，近似逆作用素を構成するレゾルベントのシフトに対する最適な配置をどのようにすべきかについては，まだ解明できていない．フィルタを高次にするとレゾルベントの結合係数の大きさが増し，丸め誤差の拡大傾向が強まる．シフトに虚数の使用を許せば，高次であっても特性の良いフィルタが作れるのではないかと思われる．

近似逆演算子を用いて解いた近似解に対応する残差は大きい固有値を持つ固有ベクトルが低減されて小さい固有値を持つ固有ベクトルが残っているが，その有効階数は元の行列の固有値分布による．まずこの方法がうまく行くためには元の行列の小さい固有値が比較的少ないことが必要である．

残差から大きい固有値を持つ固有ベクトルを充分に低減した後に，その残差を右辺とする修正方程式を CG 法で解くとき，CG 法の計算過程でベクトルに大きな固有値を持つ行列を乗じる際に，丸め誤差や既に低減した大きい固有値の固有ベクトルが拡大されて，計算中の残差の中に大きい固有値のベクトルが復活してしまい，その結果 CG 法の収束が遅くなる傾向があるようである．これが現時点で今回の方法が思ったほど有効ではない理由である．これについては，CG 法の計算過程に大きい固有値を持つ固有ベクトルを積極的に除去する処理をときどき加えるなどの改良を入れることが必要かもしれない．

今後は，このアプローチをより具体的で実際的な問題に適用する実験も行い，どの程度有効であるのかないのかに

© 2013 Information Processing Society of Japan

ついて検証していく必要がある.

参考文献

[1] Åke Björck and Vistor Pereyra: "Solution of Vandermonde Systems of Equations", *Math.Comp.* Vol.24, No.112(1970), pp.893–903.
[2] Gene H. Golub, Charles F. van Loan: "Matrix Computations", 3rd Ed., *The John Hopkins Univ. Press* (1996).

© 2013 Information Processing Society of Japan