

折り目と切れ目を利用した三角形メッシュの 近似展開図作成について

高橋都子^{†1} 館知宏^{†2} 山口泰^{†3}

三角形メッシュとして表現された立体形状をペーパークラフトによって実現することは、娯楽としての用途のほか、建築や機械部品の製造においても有用である。従来より、伸縮しないという紙の性質を制約としたメッシュ形状の近似手法が数多く研究されている。これまでの多くの研究では、組み立てやすさの指標として、各パーツが円形に近い単純な形状であることを優先していた。本研究では、その指標を展開図のパーツ数の少なさとし、折り目と切れ目を含むメッシュ分割ならびにその近似展開図作成における手法を提案する。折り目と切れ目をを用いることで、少ない分割数ながら高い精度でメッシュの近似を実現し、その展開図作成を目指す。

An approximation method of triangular mesh models for generating development diagrams with creases and slits

KUNIKO TAKAHASHI^{†1} TOMOHIRO TACHI^{†2}
YASUSHI YAMAGUCHI^{†1,2}

Making paper crafts from three-dimensional mesh models is useful not only in entertainments but also in architecture or in other engineering applications. There have been many studies how to approximate the mesh model under a constraint of paper's property, known as developability. In those researches, the shape of each part gives are aimed to be a circular disk in order to maintain its manufacturability. In this paper, we propose a method to approximate a triangular mesh model with as little number of the parts as possible. The method achieves high accuracy with a few parts by allowing creases and slits within parts.

1. はじめに

コンピュータグラフィックス技術の発達により、様々な場面で3次元の立体物をコンピュータ上で表現・処理する機械が増えた。三次元メッシュモデル(以下、メッシュ)はその表現手法のひとつであり、滑らかな曲面を非常に多くの三角形平面の集合によって表現していることが大きな特徴である。

一方、コンピュータ上で表現された立体形状を物理的に具現化する方法のひとつとしてペーパークラフトがある。ペーパークラフトは娯楽としての用途のほか、紙を金属板などのシート材料に置き換えることで、建築や機械部品の製造にも応用可能である。しかし、メッシュで表現された様々な形状をペーパークラフトで実現するための問題として、紙によって表現できる形状は対象となる立体形状の可展性に依存することが挙げられる。これは、伸縮しないという紙の性質に由来している。この問題を解決するために、ペーパークラフトに関する多くの研究が存在する。

紙によって立体形状を再現するためには、対象となる立体形状を一平面に展開した展開図が必要である。この展開

図を得るために、様々な手法が提案されているが、一般的に多く採られる手法は、メッシュを小領域に分割し、それぞれの分割した領域(以下、チャート)を可展形状に近似する、というものである。その際、対象となる立体形状を高精度に近似し、かつ組み立てやすいチャート分割が求められる。これまで組み立てやすさとして主にチャート数が少ないことと、チャートが単純な形状であることが指標とされてきた。ここで単純な形状とは、チャートが円形に近い形や、チャートの境界部分に凹凸が少ない形などであった。

本研究では近似の精度を維持しながら、チャート数を削減することを目的として、メッシュ分割および可展形状への近似を行う。チャートから折り目や切れ目を含んだ展開図を作成することで、個々のチャートで表現できる形状の自由度をあげる。このため、従来の研究で利用されてきた可展面による制約の代わりに、頂点周りの角度による可展制約を用いることで実現する。

2. 可展性を持つ立体形状

一般に立体形状を紙で再現したいとき、その形状の可展性が重要となる。可展性とは、対象の形状を伸縮させることなく平面に展開できる性質を示す。本研究では、可展性を持つ形状を可展形状と呼び、平面、柱面、錐面、接線曲面などの一般的な可展面は可展形状の一種と考える。

立体形状の展開図の一般的な作成手法は、対象の立体形

^{†1} 東京大学大学院学際情報学府
The University of Tokyo Graduate School of Interdisciplinary Information Studies

^{†2} 東京大学大学院総合文化研究科
The University of Tokyo Graduate School of Arts and Sciences

状をいくつかのチャートに分け、それぞれを平面に展開するものである。そのため、紙で組み立てるには、対象の立体形状そのものが単一の可展形状であるか、可展性を持つ形状の集合である必要がある。多くの立体形状は複数の様々な平面や曲面の集合であるが、対象の立体形状自体が可展である場合や、可展である領域のみから構成される場合は非常に限られている。そのため、対象の立体形状を可展形状の集合となるように近似することが必要となる。

一方で、メッシュは膨大な数の三角形平面の集合であるため可展面であるといえるが、面の数が膨大なため、メッシュを元の形状のまま展開することは組み立てやすさの観点からは非現実的である。Hoppe[1]や Garland ら[2]のメッシュ簡略化手法は、メッシュ形状が持つ特徴を維持したまま、メッシュを構成する三角形面を互いに結合し、その面数を減らすものである。しかし、新たに作成されるメッシュは、一般に角張った粗い形をしており、元のメッシュの形状が持つ滑らかさは失われてしまう。そこで、柱面や錐面などの可展面を用いてメッシュの分割や近似を行なう手法が、Julius ら[3]、Shatz ら[4]、Fady ら[5]などによって提案された。

Julius らが提案した D-Charts 法は、可展面に近い擬可展面によってメッシュを分割する手法である。しかし、分割されたチャートは正確な可展形状ではないため、平面への展開は不可能である。そこで、Shatz らは対象とするメッシュを正確な可展形状の集合で表現できるように、メッシュの分割に加えてチャートを可展面で近似する手法を提案した。このとき作成されたチャートは元のメッシュ形状とは異なるため、隣接するチャート間の境界線が元のメッシュから大きく逸れてしまう可能性がある。そこで、作成したチャート同士の境界を再計算して、チャート同士の接続を保証している。また、この手法では、各チャートは可展面のいずれかひとつに対応するため、一般的にチャートは小さく分割されるとともに大きさが均一になりにくい。

Mitani ら[6]は、連続した三角形によって構成される帯状のメッシュである strip を用いることで、元のメッシュが持つ滑らかさを維持した形状近似を実現した。各 strip は内部に頂点を持たないため展開性が保証される。一方で、strip 同士は三角形の底辺を介して接続され、形状全体を近似する。さらに strip の一部に切り込みを入れることで、より柔軟に元のメッシュ形状を近似することも可能となっている。

3. 提案手法

一般にペーパークラフトは平面に展開可能な複数のチャートを組み立てることで作成される。その際に、最終的な形状の近似の質とその組み立てやすさを共存させることが重要である。この組み立てやすさは、チャートの性質に依存する。既存研究では、組み立てやすさの指標として、チャート数の少なさやチャート形状の単純さを用いている。

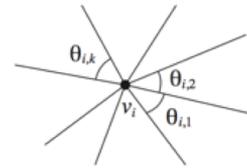


図1 頂点における可展性の評価

Figure 1 Developability around a vertex.

一方、本研究では近似の精度を保ちつつチャートの数を減らすことを最大の目標とする。チャートの数が減ることで、チャート同士の接続における辺の組み合わせも少なくなり、組み立てやすさも改善されるものと考えられる。

ここで、紙を用いた造形の一例として折り紙を考える。折り紙では、折り目を加えることで一枚の紙で表現できる形状の自由度を上げ、複雑な立体形状を表現している。そこで、本研究では折り目と切れ目を含む展開図を作成するようなチャートによる分割法を目指す。折り目により複数種類の可展面をひとつの連続したチャートにすることが可能となり、切れ目によって近似精度の向上とともに、切れ目部分の接続関係が自明になることによる組み立てやすさの向上が予想される。つまり、折り目と切れ目により、既存手法に比べチャート数の大幅な削減に加え、組み立てやすさの改善が期待できる。

しかし、既存手法のように柱面や錐面などの可展面を用いた分割手法では、チャートの形状に、折り目や切れ目を取り込むことは難しい。そこで、可展形状が持つ制約として、角度による可展制約(Tachi[7])を利用する。この制約はメッシュ上の頂点 v_i について、その周りで隣り合う 2 辺のなす角を $\theta_{i,k}$ とした場合に可展となる頂点が次式を満たすというものである (図 1)。

$$2\pi - \sum_{k=1}^{m_i} \theta_{i,k} = 0 \quad (1)$$

なお、ここで m_i は頂点 v_i 周りの角の総数を表す。この角度による可展制約は折り目を許容するため、チャートに折り目を含むことが可能となる。さらに、この角度による可展制約はチャートの可展化にも利用可能である。特に、角度による制約に基づいた可展化は、位相を維持したまま頂点の座標のみの変化のより実現できるため、Shatz らの手法で問題となっていたチャート同士の接続も容易に達成できる。

3.1 提案手法

提案手法の特徴は、以下の通りである。

- 1) 折り目を含んだチャートを作成する。
- 2) 切れ目を含んだチャートを作成する。
- 3) チャート同士の接続を保持しながら、可展化処理を行なう。
- 4) チャートの個数をユーザが指定できるものとし、チャートの大きさをなるべく均等にする。

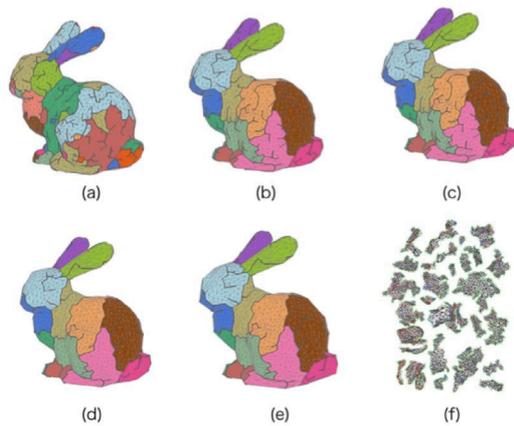


図2 提案手法の流れ

Figure 2 Overview of proposed algorithm.

1)に関しては、既述の通りである。2)については、メッシュをチャートに分割する際に、可展化しにくい頂点をチャートの境界の一部としてチャートの内部に残すことで実現される。チャートへの分割の後、可展性への影響が少ない切れ目は閉鎖する処理を適用し、切れ目が必要以上に残らないようにする。この処理には、角度による可展制約に加え、切れ目の長さ依存する評価を用いる。3)については、メッシュ全体の頂点に対して同時に可展化処理を施すことで実現する。この際、メッシュの位相は変えずに頂点位置のみを変えるため、チャートの境界を再評価する必要はなくなる。4)については拡大しにくいチャートを淘汰することによってチャートの個数を調整する。この際、チャートの大きさが均等になるようにメッシュを分割する。

1)~3)は既存手法にはない新たな試みであり、近似の制度を保ちながらチャート数の大幅な削減を試みるものである。また、4)によってユーザの希望するチャート数に抑えることも可能とする。

3.2 アルゴリズム

提案手法はメッシュ分割と可展化の大きく2つの処理から成る。メッシュ分割はメッシュの可展制約を大まかに満たすようなチャートに分割する処理で、可展化は分割されたチャートが正確に可展制約を満たすようにメッシュを変形する処理である。提案手法の流れを図2に示す。

まず、メッシュの初期分割を行なう(図2(a))。角度の可展制約に基づいて、最も可展性の高い頂点を起点として、可能な限りチャートを拡大する。残された頂点に同様の操作を繰り返し適用することで、メッシュは複数のチャートに分割される(3.2.1項)。

次に、チャートの淘汰を行なう(図2(b))。初期分割では評価関数の閾値によって、各チャートの拡大を停止する判定を行なう。作成されるチャート数は結果的に定まるため初期分割の後にユーザが指定したチャート数になるまで、チャートを減らす処理を行なう。その際に各チャートができるだけ均等な大きさになるようにする(3.2.2項)。

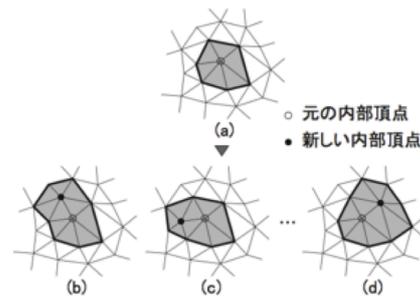


図3 結合チャート

Figure 3 Varieties of combined charts.

チャートの淘汰後、チャートの可展化を施す(図1(c))。ここでは、メッシュ全体を可展形状の集合に変形する。そのために、チャートの境界上にある頂点(以下、境界頂点)を除いたチャート内部にある頂点(以下、内部頂点)が角度による可展制約を満たすようにメッシュ全体の頂点座標を調整する。境界頂点には可展性の制約を与えず、内部頂点と一緒に移動することで、チャート間の接続を維持しつつメッシュ全体を可展化する(3.2.3項)。

可展化されたチャートに、切れ目の閉鎖処理を行なう(図2(d))。メッシュ分割時に作成された切れ目のうち、閉鎖した際の可展性への影響が小さいものを閉じる。切れ目の効果を適切に評価することで、本当に必要な切れ目が残される(3.2.4項)。さらに切れ目の閉鎖処理によって可展性を失ったメッシュを再度可展化し(図2(e)) (3.2.5項)、最後に各チャートを展開することで最終的な展開図を得る(図2(f)) (3.2.6項)。

3.2.1 初期分割

メッシュの初期分割では、各チャートの起点となる頂点(以下、シード)を選択し、そのシードから可展制約を満たす範囲でチャートを拡大していく。シードには、まだいずれのチャートには含まれていない頂点の中で、可展性の最も高いものを選択する。なお頂点の可展性は、式(1)の角度による可展制約に基づいて、次の式(2)で計算する。

$$E(v_i) = \left| 2\pi - \sum_{k=1}^{m_i} \theta_{i,k} \right| \quad (2)$$

その後、当該のシード周りの三角形面をすべて結合して、初期チャートを作成する(図3(a))。

次に、チャートの可展性を次の評価関数により定義する。

$$\text{Cost}(C) = \sum_{v_i \in V_I(C)} E(v_i) \quad (3)$$

ここで、 $V_I(C)$ はチャートCの内部頂点集合を表す。チャートの拡大は、図3(b)~(d)のようにチャートの境界頂点のひとつについて、その周囲の三角形をチャートに結合したものの(以下、結合チャート)を候補とする。この処理により当該の頂点は結合チャートの境界頂点から内部頂点になる。候補となった結合チャートすべての可展性を式(3)によ

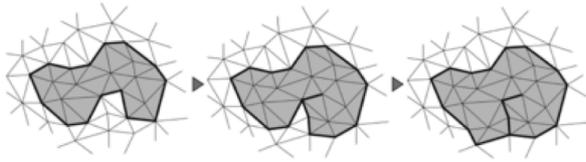


図4 切れ目の発生と成長の過程
 Figure 4 Emergence and growth of a slit.

て算出し、最も値が小さいものを新たなチャートとする。チャートの可展性が一定の閾値に達するまで拡大を繰り返すことで、初期分割によるチャートのひとつが作成される。チャート拡大の過程では、チャートの内部に取り残された境界頂点は結合チャートの対象から外すものとする。これによって、一旦、切れ目ができると、その切れ目は自然に成長することとなる。図4に切れ目の発生と成長の過程の例を示す。

初期分割では、チャートの作成をシードとなりうる頂点がなくなるまで繰り返す。このため、メッシュの持つすべての頂点は、いずれかのチャートに属することになるが、どのチャートにも属さない三角形がチャートの境界付近に発生する場合がある。これらの三角形は、隣接するチャートの中で、境界が最も滑らかになるように結合する。図2(a)は初期分割の例である。

3.2.2 チャートの淘汰

3.2.1項で得られるチャートは、平面性の高い領域を優先してチャートを拡大するため、最初に作成されるチャートは大きく、最後に作成されるチャートは小さくなりやすい。また、与えられたメッシュの形状や拡大停止の判定に用いる閾値によって、結果的にチャートの数が決まる。そこで初期分割の過程で得られたシードを利用し再度メッシュ全体を分割し直すことで指定された個数での分割を実現する。

3.2.1項で得られた n 個のチャートのシード群から n 個の初期チャート $C_i (i = 1, 2, \dots, n)$ を作成する。式(3)による評価値が最も小さいチャート、すなわち n 個のチャートの中で最も可展性の高いものを1回だけ拡大する。この操作を繰り返すことで、すべてのチャートをできるだけ均等に拡大できる。メッシュの持つ頂点すべてがいずれかのチャートに属したところで、チャートの拡大を終了する。

得られたチャートのうち、最も構成する三角形が少ないチャートのシードをシード群から取り除く。これによりチャートの数をひとつ減らすことができる。この操作を繰り返すことによって、ユーザが指定したチャート数になるまでシードを減らしていく。図2(b)は、このようにしてチャートを淘汰した結果である。図2(a)の初期分割の結果に対して、チャート数が大幅に減るとともに、均等な大きさのチャート作成を実現している。

3.2.3 チャートの可展化

ここまでに得られたチャートは、あくまでも可展性が高

くなるようにメッシュを分割した部分領域にすぎず、正確な可展形状ではない。そこで、各チャートが可展となるように、チャートの持つ頂点座標を数値計算によって求める。すなわち、すべての内部頂点が式(1)を満たすような頂点座標を求める。

まず、処理の対象となるメッシュの全頂点の座標値を

$$\mathbf{V} = [x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \dots x_n y_n z_n]^T$$

と表す。このとき n はメッシュの全頂点数を表している。チャートの内部頂点に対応して、以下の評価関数群 $\mathbf{F}(\mathbf{V})$ を作る。

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \begin{bmatrix} 2\pi - \sum_{k=1}^{m_1} \theta_{1,k} \\ 2\pi - \sum_{k=1}^{m_2} \theta_{2,k} \\ \vdots \\ 2\pi - \sum_{k=1}^{m_{n_I}} \theta_{n_I,k} \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 n_I はメッシュ全体におけるチャートの内部頂点数である。この評価関数群は、各内部頂点の頂点周りの角度和を 2π から引いた値となっている。つまり、これは各頂点における可展性を表しているので、

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0} \quad (5)$$

を満たす \mathbf{V} を求めることで、メッシュを構成するチャートをすべて可展化できる。具体的な算出法として Tachi[7]の手法を利用した。与えられるチャートが十分に可展形状に近ければ、式(5)を解くことが可能であり、メッシュ全体を可展化できる。なお、このとき境界頂点には制約が与えられておらず、内部頂点に関する制約を満たすように自由に移動する。ただし、隣り合ったチャートは境界頂点を共有しているので、チャート同士の接続は維持される。図2(c)はチャートの可展化を施した結果の例を示したものである。この操作によって、メッシュの曲率が切れ目とチャート境界部分に集中する。

3.2.4 切れ目の閉鎖

ここまでの段階では、チャート拡大の際に発生した切れ目が多く存在する。その結果、チャートの可展性は高く維持されているものの、切れ目が少ない方が組み立てやすさは向上すると言える。そこで、可展性に与える影響が少ない切れ目の先端部分からある長さまで切れ目を閉鎖する。このとき用いる評価関数には、頂点周りの角度だけではな

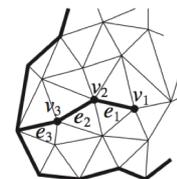


図5 切れ目における可展性の評価
 Figure 5 Evaluation of developability along a slit.

く切れ目の長さも考慮する。図5のように切れ目の先端から数えて l 番目の頂点 v_l までを閉鎖する際の切れ目の可展性を表す評価関数を次のように定義する。

$$E_S(v_l) = \sum_{i=1}^l \left(E(v_i) \sum_{j=1}^i \|e_j\| \right) \quad (6)$$

ここで、 $E(v_l)$ は式(2)で定義された頂点 v_l の可展性を表し、 $\|e_j\|$ は辺 e_j の長さを表す。すなわち式(6)は切れ目上の頂点が可展となるための残差と、閉鎖する切れ目の長さとを加味した評価関数となっている。

3.2.5 再可展化

切れ目の閉鎖処理では、切れ目の評価関数が閾値に達するまで切れ目を閉じていく。この結果、一度可展化したメッシュが、再び可展形状ではなくなる。そこで、もう一度3.2.3項に示した可展化処理を施して、メッシュを正確な可展形状の集合にする。

3.2.6 チャートの展開と分割

最後に、再可展化された各チャートを平面に展開する。チャートを展開した結果の例を図6に示す。折り目として角度が大きいもの ($\pi/8$ 以上) には、赤ないし青の色をつけている。赤線は山折り、青線は谷折りに対応している。この展開図は、図1(e)に示した Stanford Bunny の前足部分にある赤茶色のチャートに対応するものである。平面に展開した際に、チャート内で自己交差が生じる可能性がある。このように自己交差するチャートについては、自己交差を解消するように複数のチャートに分割する。図6のチャートを分割した結果を図7に示す。ここでの分割は、ユーザの手作業で行なった。

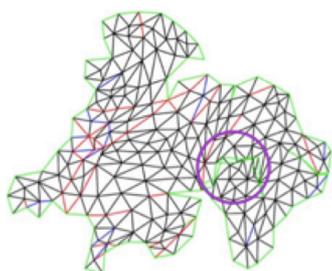


図6 チャートの展開例

Figure 6 A self-intersected development diagram.

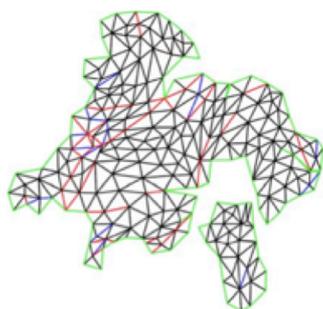


図7 チャートの分割結果

Figure 7 A divided development diagram.

4. 結果

提案手法を実際のメッシュデータ (Stanford Bunny) に適用した結果を、図2に沿ってまとめる。まず初期分割によって、57のチャートに分割された(図2(a))。この初期分割の結果にチャート淘汰を適用することで、チャート数を15に削減した(図2(b))。その後、可展化(図2(c))、切れ目の閉鎖(図2(d))、再可展化(図2(e))を施した。展開した各チャートのうち、自己交差が生じているものについて、手作業でチャートを分割し、最終的に図2(f)ならびに図8に示す27のチャートを得た。これは Shatz らの手法によるチャート数35よりも少ない個数になっている。

提案手法により作成した展開図を組み立てたペーパークラフトの例を図9に示す。提案した手法の特徴のひとつとして、ユーザがチャート数を指定できる点が挙げられる。

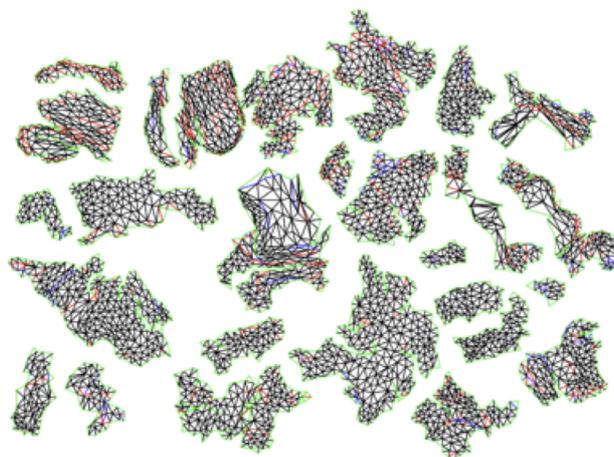


図8 提案手法により作成した Stanford Bunny の展開図の例 (図2(f)を拡大したもの)

Figure 8 An example of Stanford Bunny's Development Making by the Proposal Method.



図9 本ペーパークラフトの作成例

Figure 9 An example of resulting papercraft.

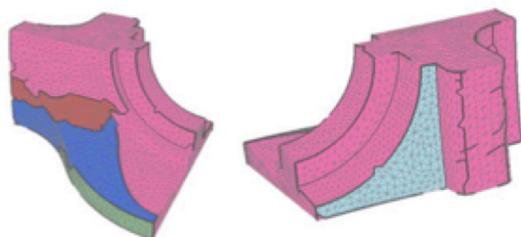


図 10 Fan Disk の結果

Figure 10 An example of charts of the Fan Disk.

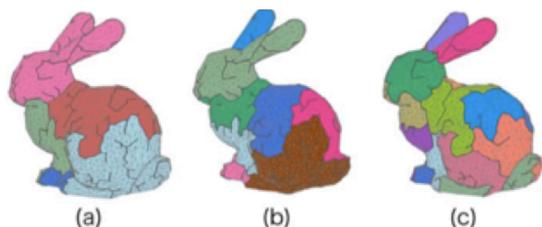


図 11 チャート数を変化させた結果

Figure 11 Effects of the number of charts.

別のメッシュデータの例として、Fan Disk に対してチャートの分割と可展化を施した結果を図 10 に示す。機械部品などの形状は、平面や円筒面などで構成されることが多く、折り目を有効に利用することで、チャート数を大幅に減らすことが可能となる。この例の場合、チャート数は 5 に抑えられている。しかし、メッシュによる近似形状ゆえの誤差のせいで、折り目や切れ目に微小な凹凸が含まれている。

Stanford Bunny のデータでチャート数を変化させた結果の例を図 11 に示す。チャート数を減らした場合、相対的に切れ目を増やすことで近似を維持しようとしている。しかし、チャート数が少ないと、可展化を施す際にメッシュ全体の整合性を維持することが難しくなるため、最終的な近似精度が少しずつ低下していることが見てとれる。また、ひとつのチャートが大きくなることで、展開したときに自己交差を生じる可能性も高くなるため、必ずしも最終的なチャート数を減らせるわけでないことに注意が必要である。

5. まとめと今後の課題

本研究は、ペーパークラフトの作りやすさという観点で最も重要と考えられるチャート数の削減を最大の目的として、メッシュの分割および可展化の手法について考察した。本研究で実現したことは、以下の通りである。

- 1) チャート内に折り目を含むことを許容する。
- 2) チャート内に自然に切れ目が入るようにする。
- 3) メッシュの位相を変えずに、チャート同士の接続を保持しながら可展化する。
- 4) チャートの個数はユーザが任意に指定することが可能であるとともに、結果のチャートの大きさが均等に

なるようにする。

これらを実現するために、角度による可展制約を利用した。折り目によって個々のチャートで表現できる形状の自由度は向上し、切れ目によって既存の研究では複数に分割されるような領域をより少数のチャートで近似できるようになった。その結果、既存手法と比べると、より少ないチャート数で可展形状化することが可能となった。可展化の処理においても、角度による可展制約を用いて、各チャートの境界頂点を共有しながらメッシュ全体の接続性を維持しつつメッシュ全体を可展化する頂点座標の算出法を提案した。

今後解決すべき点として、まずチャートの分割に関する課題がある。現段階では、自己交差を解消するために手作業で行なっているチャートの分割を自動で行なえば、ユーザに対する負荷を軽減できる。また、自己交差がより少なくなるように、メッシュ分割自体を制御する手法も考えられる。現在は自己交差の解消によって、最終的にユーザが指定した値よりもチャート数が多くなる可能性が高い。メッシュ分割の段階で自己交差を考慮できるようになれば、ユーザが指定したチャート数に近い数での分割が実現できるだろう。一方でユーザによる微妙な修正機能も有用と考えられる。機械部品形状などの場合には、メッシュデータに含まれる誤差の影響で、折り目や切れ目に微妙な凹凸が入ることが避けられない。このような凹凸の修正はユーザに任せるのが適切と考えられる。

本研究の一部は日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究(B) (2230030) の助成を受けて行なわれた。

参考文献

- 1) Hoppe, H., “Progressive Meshes”, SIGGRAPH 96 Conference Proceedings, ACM SIGGRAPH (1996), pp. 99–108.
- 2) Garland, M. and Heckbert, P. S., “Surface simplification using quadric error metrics”, SIGGRAPH 97 Conference Proceedings, ACM SIGGRAPH (1997), pp. 209–216.
- 3) Julius, D., Kraevoy, V. and Sheffer, A., “D-Charts: Quasi-Developable Mesh Segmentation”, Computer Graphics Forum, Vol. 24, No. 3 (2005), pp. 581–590.
- 4) Shatz, I., Tal, A. and Leifman, G., “Papercraft models from meshes”, Visual Computer, Vol. 22, No. 9 (2006), pp. 825–834.
- 5) Massarwi, F., Gotsman, C. and Elber, G., “Papercraft Models using Generalized Cylinders”, Proceedings of the 15th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications (2007), pp.148–157.
- 6) Mitani, J. and Suzuki, H., “Making papercraft toys from meshes using strip-based approximate unfolding”, ACM Transactions on Graphics, Vol.23, No. 3 (2004), pp. 259–263.
- 7) Tachi, T., “Freeform Variations of Origami”, Journal for Geometry and Graphics, Vol. 14, No.2 (2010), pp. 203–215.