

非均一相似変換を用いた形状洗練化のための グラフクラスタリングによる形状セグメンテーション

佐藤 信¹

概要：非均一相似変換を用いて平面上の形状を洗練化するために，グラフのクラスタリングを用いた形状セグメンテーション手法を提案する．提案手法では，視覚的な自然さを表現する形状特徴量をエッジの重みとするグラフをクラスタリングすることにより，構造化されていない曲線セグメントの集合から，形状セグメントを生成する．そして，その形状セグメントについて非均一相似変換をおこない，基準とする形状に類似な形状を生成する．

Shape Segmentation with Graph Clustering for Shape Refinement Using Non-uniform Similarity Transform

MAKOTO SATOH¹

Abstract: This paper presents a shape segmentation method with graph clustering for planar shape refinement by using non-uniform similarity transform. In the method, shape segments are generated from unstructured curve segments, with the clustering of the graph with weighted edges by shape feature to represent visual naturalness. Then the similar shapes with the shape segments are generated by using non-uniform similarity transform.

1. はじめに

本稿では，形状洗練化 [2] のための形状セグメンテーション手法を提案する．形状の洗練化をする領域を選択するための手法として，どのような手法が適当であるのかということは，適用分野に依存する．そのために，多くの手法が提案されている．

ここでは，平面上の Bezier 曲線の集合により表現された形状を対象として，グラフのクラスタリングを用いた形状セグメンテーション手法を提案し，形状洗練化のための領域の選択に用いる．なお，選択した領域の形状洗練化には，非均一相似変換を用いることを想定しているので，曲線セグメントの構造に関するデータが必要になる．クラスタリングにより生成した形状セグメントの集合を構造化するための手法については，今後の課題とする．

提案手法は，形状の一部分を直感的に選択して形状を洗

練化するような作業に適している．既に作成してある形状の一部分を形状洗練化する場合ばかりではなく，形状を作成する過程での形状洗練化にも有効である．形状が完成するまでの作成過程では，その作成過程の形状が何を表現するのかが不明確な可能性がある．そのために，ここで提案する，視覚的な自然さを表現する形状特徴量を用いたセグメンテーションによる形状構造化手法が有効といえる．

これ以降の構成について，簡単に説明する．2 節では，関連研究について説明をおこない，提案手法の概要と特徴について述べる．そして，3 節では，グラフクラスタリングを用いた形状セグメンテーション手法を提案する．提案手法の実装と結果の検討について 4 節で説明する．そして最後に，5 節で本稿のまとめと今後について述べる．

2. 関連研究と提案手法の概要

2.1 関連研究

形状のセグメンテーションは，多くの分野で必要とされる技術であり，そのために多くの手法が提案されている．

¹ 岩手大学
Iwate University, Ueda, Iwate 020-8551, Japan

それらがセグメンテーションの対象としているのは、ソーシャル・ネットワーク、コンピュータ・ネットワーク、画像を含む2次元形状、そして3次元形状などを対象とする非常に広い分野である。

例えば、Katz等[5]は、3次元メッシュのセグメンテーション手法について研究している。そこでは、セグメンテーションの基準として、メッシュを構成するポリゴンフェース間の形態的な距離、および、隣接するポリゴンフェースのなす角度を用いている。このように、Katz等[5]の手法では、セグメンテーションをおこなう要素どうしの隣接に関する情報を用いている。本稿では、Bezier曲線セグメント上のサンプリング点についてセグメンテーションをおこない、それらの点どうしの接続に関する情報を必要としないのが特徴である。

つぎに、形状を構造化するための関連研究について述べる。Hammond等[4]は、複数ストロークにより入力したストローク点を、図形として認識するための研究をおこなっている。そこでは、ストロークの本数と順序が自由であるが、ストロークを接続するためのストローク間の距離などを予め与えている。本稿の手法では、点集合の形状を全体的にとらえて構造化をおこなう。

形状のシルエットを表現するサンプリング点から NPR スケッチを作成するための Lewis 等 [6] の研究では、グラフクラスタリングを用いて、形状をセグメンテーションしている。サンプリング点の2点どうしの類似性を、形状の接線の傾きの類似性に基づいて計算する手法である。類似度への接線の傾きの感度を、2点間の距離に関して、パラメータにより調節することが可能であるが、その調節方法についてはふれていない。本稿では、2点間の距離、形状の接線の傾きそして曲率を用いてサンプリング点の2点どうしの類似度を計算する手法を提案する。類似度に対する距離、接線の傾きそして曲率の感度を独立して調節することが可能である。

また、グラフのクラスタリングは、広く用いられている手法であるが、本稿では、グラフ Laplace 行列を用いてクラスタリングをする。その理由は、形状の特徴を大域的にとらえるためには、グラフ Laplace 行列によりセグメンテーションをすることが有効であると考えたからである。グラフ Laplace 行列を用いるセグメンテーション手法は、Fiedler[1]の研究を重みつきグラフに適用したものであり、広く用いられている。これまでに、複数の Laplace 行列が提案されているが、それらには非正規化 Laplace 行列と正規化 Laplace 行列がある。本稿では、Laplace 行列の要素となるグラフの重みの計算手法を提案するので、その重みのクラスタリングへの影響について検討をおこなう始めの段階として、非正規化 Laplace 行列を用いる。非正規化 Laplace 行列の詳細については、Mohar [9] Mohar [10] などに記述がある。

2.2 提案手法の概要

Bezier 曲線セグメントの集合で表現した平面上の形状の一部分を洗練化するための形状セグメンテーション手法を提案する。それらの曲線セグメントどうしの接続関係などの構造に関する情報は与えられていないとする。このような条件のもとで形状を洗練化するためには、2つの課題を解決する必要がある。ひとつめの課題は、曲線セグメントの部分集合をどのようにして選択するのかということ(形状セグメンテーション)であり、もうひとつの課題は、選択された形状セグメントをどのように構造化するのかということ(形状再構成)である。

ひとつめの課題の解決手法として、形状の視覚的な自然さを表現するように設計した形状特徴量を提案する。そして、その形状特徴量をエッジの重みとするグラフをクラスタリングすることによる形状セグメンテーション手法を提案する。

形状セグメンテーションと形状再構成を用いた曲線形状洗練化の手順の概要を示す。

Step1:サンプリング Bezier 曲線セグメントの集合から、曲線上の点をサンプリングする。

Step2:クラスタリング サンプリング点集合の2点どうしの形状類似性を表現する重みを計算する。この重みを用いて、グラフ Laplace 行列を作成する。その行列の固有値と固有ベクトルに基づいてクラスタリングする。

Step3:セグメント接続 作成したクラスタ内の曲線セグメントを接続する。

Step4:形状洗練化 生成した形状セグメントを基準形状として、非均一相似変換 [7], [8] を用いて類似な形状を生成する。

なお、ここで用いる非均一相似変換 [7], [8] は、Fowler 等 [3] の提案した曲線の形状洗練化のための手法を拡張したものである。非均一相似変換を用いると、平面上の Bezier 曲線で表現した基準形状を、曲線の通過点などの変形のための制約条件を満たしながら、可能な限り基準形状の特徴を維持して形状を洗練化することが可能である。

3. グラフクラスタリングを用いた形状セグメンテーション

2.2 節で説明したように、形状セグメントを生成する手順は、曲線のサンプリングと形状のクラスタリングにより構成されるので、それぞれについて説明する。これ以降では、曲線セグメントの集合と形状セグメントを、それぞれ $\{C|C_i, i = 1 \dots n\}$ と $\{S|S_j, j = 1 \dots m\}$ とする。ここで、 $S \subseteq C$ である。

3.1 形状特徴量

形状のセグメンテーションの結果は、セグメンテーションの基準として用いる形状特徴量に依存する。そのため、

どのように形状をセグメンテーションするかに合わせて、形状特徴量を選択する必要がある。ここでは、サンプリング点の集合の2点どうしについて、つぎの形状特徴量を用いる。

- 位置座標の差
- 接線の傾きの差
- 曲率の差

これらの特徴量を用いた理由は、2つのサンプリング点どうしが同一の曲線上で近接している場合には、サンプリング点の間隔を小さくするほど、値が小さくなるからである。これらの形状特徴量は、形状の視覚的な自然さを表現する形状特徴量であるといえる。

3.2 曲線サンプリング

形状を表現する曲線からサンプリング点を選択する方法を示す。

Step1 曲線セグメントの集合 C に含まれる曲線セグメントの全長を、予め与えられた分割数に等分割する。その分割した長さを l とする。

Step2 各曲線セグメントについて、両方の端点をサンプリング点とする。

Step3 各曲線セグメントについて、一方の端点から長さ l の間隔で曲線上の点をサンプリングする。もう一方の端点に到達するか、または越えた場合に、サンプリングを終了する。

各サンプリング点について、位置座標、接線の傾き、そして曲率をサンプリングする。

3.3 形状クラスタリング

始めに、形状をグラフで表現する。そのために、サンプリング点を節点 V 、そして各接点を結ぶエッジを E とし、グラフ $G = \langle V, E \rangle$ を作成する。ここで、各エッジに、そのエッジが接続する2つの節点の類似度を表現する重み w を与える。

$$w = \exp\left(-\left(\frac{d_p^2}{\alpha_p} + \frac{d_t^2}{\alpha_t} + \frac{d_c^2}{\alpha_c}\right)\right) \quad (1)$$

ここで、距離 d_p, d_t 、そして d_c は、そのエッジが接続する2つの節点についてのものである。それぞれは、位置座標、接線の傾き、そして、曲率を基にして計算するものである。また、 α_p, α_t 、そして α_c は、それぞれ、予め与えた値である。詳細については、3.4節で述べる。この重みをすべてのサンプリング点について計算する。

次に、グラフ G から、類似度行列 A を作成する。そして、類似度行列 A を基にしてグラフの degree を基にした対角行列 D を作成する。これらの行列を基にして、以下に示すグラフ Laplace 行列 L を作成する。

$$L = D - A \quad (2)$$

グラフ Laplace 行列の Fiedler ベクトルに対応する固有ベクトルを基にして、グラフを部分グラフに分割する。

そして、それぞれの部分グラフについて、グラフ Laplace 行列を作成して、同様にしてその部分グラフを求める。この分割を、必要な回数おこなう。それぞれの部分グラフが形状セグメントに対応するので、その部分グラフに含まれる節点に対応するサンプリング点を求める。それらのサンプリング点に対応する曲線セグメントの集合を、形状セグメント S とする。

3.4 距離の計算

グラフのエッジが接続する2つの節点どうしの類似度を表現する重みの計算式を、3.3節(1)式に示した。この式での距離の計算方法について説明する。なお、3.3節で説明したように、グラフの節点は曲線上のサンプリング点に対応している。(1)式の距離 d_p, d_t 、そして d_c は、それぞれ、位置座標、接線の傾き、そして曲率の類似度を表現するものである。これらのうち、 d_p は、2つのサンプリング点の位置座標のユークリッド距離である。また、 d_t は接線の傾きの差の絶対値であり、2つの接線のなす鋭角を用いる。そして、 d_c は、符号付きの曲率の差の絶対値である。Bezier 曲線の曲率の符号は、曲線パラメータの増加する方向に依存するので、そのことを考慮して差を計算している。

距離 d_p, d_t 、そして d_c の計算に用いる位置座標、接線の傾き、そして曲率は、3.2節で説明したサンプリング点の選択で求めたものである。これらの値について、つぎの前処理をする。

- 位置座標の差、接線の傾きの差、または、曲率の差ごとに、それぞれの値を、 $[0, 1]$ の範囲に正規化をする。
- 予め設定した閾値 β_p, β_t 、そして β_c 以下の値を、0 とする。 β_p, β_t 、そして β_c は、それぞれ、位置座標の差、接線の傾きの差、そして曲率の差についての閾値である。

3.5 制限事項

3.4節で説明したように、接線の傾きの差の絶対値 d_t の計算では、2つの接線のなす鋭角を用いている。これは、直線に近い形状からサンプリングした近接している2つのサンプリング点についての距離 d_t を小さくすることにより、それらのサンプリング点を同一のクラスタに所属させてクラスタリングをするためである。しかし、2つのサンプリング点が形状の鋭角の頂点である場合にも、 d_t の値が小さくなり、他のサンプリング点の重みによっては、形状の鋭角の頂点を境界としてセグメンテーションをすることができない場合があることになる。提案の手法がサンプリング点の接続の条件を必要としないアルゴリズムであるので、直線に近い形状特徴と鋭角の頂点を明確に区別することが難しいことによる制限である。そのような場合に、鋭角の

頂点を境界としてセグメンテーションをするためには、曲線セグメントの接続をおこなってから、鋭角の頂点で値が大きくなるような重みを用いてセグメンテーションをおこなう必要がある。

4. 実装と結果の検討

4.1 実装

提案アルゴリズムを、Java 言語により実装した。形状の表現には、平面上の 3 次 Bezier 曲線を用いた。曲線のグラフィックスデータとしての表現形式には、SVG を使用した。なお、図中の形状および印は、実装プログラムで生成したものを SVG 形式でファイル出力したものを EPS 形式に変換したものである。

4.2 セグメンテーションの各段階

提案アルゴリズムでの形状セグメンテーションの各段階を、図 1 に示す。図の始めの行は、基準とする形状であり、3 次の Bezier 曲線で構成されている。次に、図の 2 番目の行では、この基準形状を表現する曲線の全長を 50 等分した値をサンプリング間隔として、3.2 節で述べた方法により、55 個のサンプリング点 (open circle) を求めている。そして、図の 3 番目の行では、サンプリング点をクラスタリングすることにより、サンプリング点を形状セグメント 1 (solid circle) と 2 (cross) に分類している。3 節で提案したグラフの重みを用いて、サンプリング点をノードとするグラフから Laplace 行列を作成し、その固有値と固有ベクトルを基にしてクラスタリングをしている。それらの固有値と固有ベクトルを、図 2 に示す。また、グラフの重みの計算に用いたパラメータを表 1 に示す。

この結果から、クラスタリングにより 2 つのクラスに分類されたサンプリング点の集合は、それぞれが、形状の曲線部分または直線部分からサンプリングしたものであることが分かる。したがって、これらのクラスタリングしたサンプリング点は、形状を曲線部分と直線部分の 2 つのセグメントに分類するために用いることが可能である。

4.3 グラフの重みの種類の効果

形状セグメンテーションで用いるグラフの重みの計算では、2 つのサンプリング点どうしの位置座標、接線の傾きそして曲率の類似度を示す距離を用いている。ここでは、4.2 節でセグメンテーションに用いた形状を用いて、それぞれの類似度のセグメンテーションへ効果を確認する。重みの計算に用いるパラメータ β を調節することにより、これらの類似度の 1 つのみを、重みの計算において有効にすることが可能である。例えば、位置座標の類似度のみを有効、そして接線の傾きと曲率の類似度を無効にして、重みを計算するためには、 $\beta_t = 1, \beta_c = 1$ とするとよい。これは、3.4 節で述べたように、サンプリング点での位置座標

の差、接線の傾きの差、または、曲率の差のそれぞれの値を、 $[0, 1]$ の範囲に正規化をしているためである。

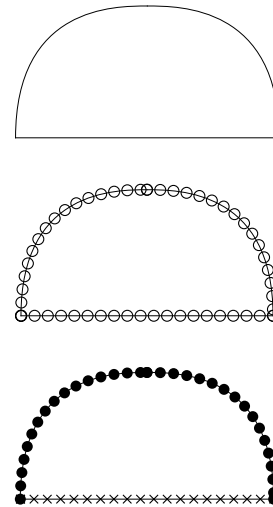


図 1 形状セグメンテーションの各段階

Fig. 1 Each step of shape segmentation. First row: a base shape is denoted by solid curves. Second row: the sampled points are denoted by open circles. Third row: the clustered sampling points are denoted by: solid circles the points included in shape segment 1; crosses the points included in shape segment 2.

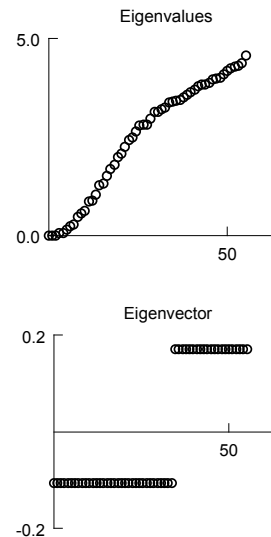


図 2 図 1 のセグメンテーションでの固有値と固有ベクトル

Fig. 2 Eigenvalues and one eigenvector of the graph Laplacian used in the segmentation presented in Fig. 1. First row: the eigenvalues. Second row: the eigenvector.

表 1 図 1 のセグメンテーションで用いたパラメータ

Table 1 The parameters used in the segmentation in Fig. 1

α_p	α_t	α_c	β_p	β_t	β_c
0.01	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

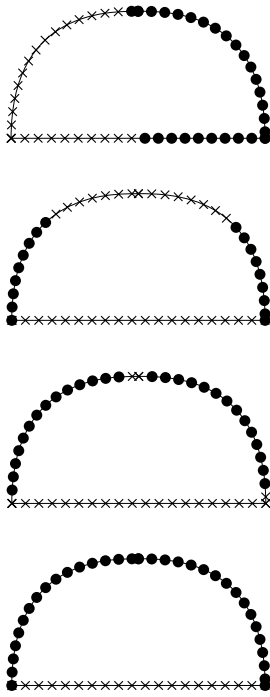


図 3 グラフの重み種類の効果

Fig. 3 Effect of the kinds of weights of the graph constructed from sampling points. First, second, third and fourth row show the segmentation results using the weights calculated from the positions, the tangents, the curvatures, and the positions, the tangents and the curvatures of sampling points, respectively. The clustered sampling points are denoted by: solid circles the points included in the shape segment 1; crosses the points included in shape segment 2.

表 2 図 3 のセグメンテーションで用いたパラメータ

Table 2 The parameters used in the segmentation in Fig. 3

Fig. 3	α_p	α_t	α_c	β_p	β_t	β_c
first row	0.01	0.1	0.1	0.1	1	1
second row	0.01	0.1	0.1	1	0.1	1
third row	0.01	0.1	0.1	1	1	0.1
fourth row	0.01	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

それぞれのグラフの重みの種類ごとのセグメンテーションへの効果を、図 3 に示す。ここでは、サンプリング点を形状セグメント 1(solid circle) と 2(cross) に分類している。図の始めの行は、位置座標の類似度のみを有効、そして接線の傾きと曲率の類似度を無効にして計算した重みを用いた形状セグメンテーションの結果である。形状に合わせてほぼ対称に、サンプリング点がクラスタリングされていることが分かる。図の 2 番目の行は、接線の傾きの類似度のみを有効、そして位置座標と曲率の類似度を無効にして計算した重みを用いた形状セグメンテーションの結果である。曲線形状の部分とほぼ直線形状の部分に、サンプリング点

がクラスタリングされていることが分かる。図の 3 番目の行は、曲率の類似度のみを有効、そして位置座標と接線の傾きの類似度を無効にして計算した重みを用いた形状セグメンテーションの結果である。曲率の大きい部分と小さい部分に、サンプリング点がクラスタリングされていることが分かる。そして、図の 4 番目の行は、曲率の類似度、位置座標そして接線の傾きの類似度を有効にして計算した重みを用いた形状セグメンテーションの結果である。形状の曲線部分と直線部分に合わせて、サンプリング点がクラスタリングされていることが分かる。なお、グラフの重みの計算に用いたパラメータは表 2 のとおりである。

これらの結果から、位置座標、接線の傾きまたは曲率の類似度のうちのどれを用いて重みを計算するかにより、どのような形状特徴を重視して形状セグメントを生成するかを選択することが可能であることが分かる。

4.4 サンプリング数と重みの優先度の効果 (位置の差)

サンプリング点の個数、および重みへの位置の差の影響の優先度を調節した場合の、セグメンテーションへの効果を図 4 に示す。ここでは、2 つのほぼ円形の形状からのサンプリング点を形状セグメント 1(solid circle) と 2(cross) に分類している。

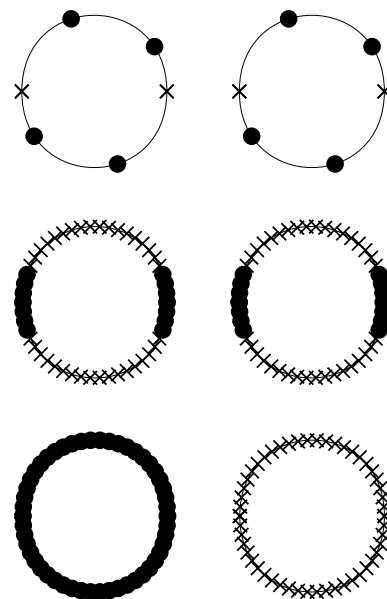


図 4 サンプリング数と重みの優先度の効果 (位置の差)

Fig. 4 Effect of the number of sampling points, and the prioritized weights for positions. First, second and third row show the segmentation results using the weights calculated from 16, 104 and 104 sampling points, respectively. First and second row: $\alpha_p = 0.1$. Third row: $\alpha_p = 0.01$. The clustered sampling points are denoted by: solid circles the points included in the shape segment 1; crosses the points included in the shape segment 2.

表 3 図 4 のセグメンテーションで用いたパラメータ

Table 3 The parameters used in the segmentation in Fig. 4

Fig. 4	α_p	α_t	α_c	β_p	β_t	β_c
first row	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
second row	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
third row	0.01	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

図の始めの行では、サンプリング数が不足しているために、2つの円に合わせてクラスタリングができていない。図の2番目の行は、サンプリング数を増加した例である。だいぶ改善しているが、まだ、2つの円に合わせてクラスタリングすることが、完全にはできていないことが分かる。そして、図の3番目の行は、さらに、重みのパラメータを、 $\alpha_p = 0.1$ から $\alpha_p = 0.01$ に変更した例である。この例では、2つの円に合わせてクラスタリングすることが、完全にできていることが分かる。なお、グラフの重みの計算に用いたパラメータは表3のとおりである。

これらの結果から、形状の特徴をとらえて形状セグメントを生成するためには、サンプリング数とパラメータの調節が重要であることが分かる。

4.5 サンプリング数と重みの優先度の効果 (曲率の差)

サンプリング点の個数、および重みへの曲率の差の影響の優先度を調節した場合の、セグメンテーションへの効果を図5に示す。ここでは、サンプリング点を形状セグメント1(solid circle)と2(cross)に分類している。図の始めの行では、サンプリング数が14、 $\alpha_c = 0.1$ である。この場合には、曲率に合わせてクラスタリングができていない。図の2番目の行は、サンプリング数を変化させずに曲率の優先度を大きくした例であり、サンプリング数が14、 $\alpha_c = 0.01$ である。この場合にも、曲率に合わせてクラスタリングができていない。そして、図の3番目の行は、サンプリング数が104、 $\alpha_c = 0.1$ である。この場合にも、曲率に合わせてクラスタリングができていない。そして、図の4番目の行は、サンプリング数が104、 $\alpha_c = 0.01$ である。この場合には、曲率に合わせてクラスタリングすることができていることが分かる。なお、グラフの重みの計算に用いたパラメータは表4のとおりである。

これらの結果から、形状の特徴をとらえて形状セグメントを生成するためには、サンプリング数とパラメータの調節が重要であることが分かる。

4.6 交差する曲線のセグメンテーションの例

交差している曲線を含む形状をセグメンテーションする例を、図6に示す。ここでは、サンプリング点を形状セグメント1(solid circle)と2(cross)に分類している。図の始めの行では、2本の直線が交差している形状を、それぞれの直線に分離して形状セグメントを生成している。図の

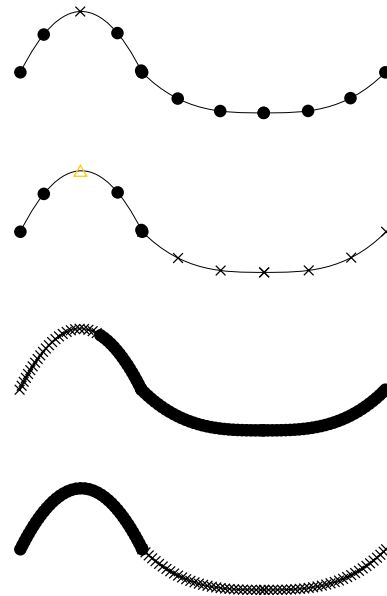


図 5 サンプリング数と重みの優先度の効果 (曲率の差)

Fig. 5 Effect of the number of sampling points, and the prioritized weights for curvatures. The prioritized weights for curvatures become effective with increasing the number of sampling points. The clustered sampling points are denoted by: solid circles the points included in the shape segment 1; crosses the points included in the shape segment 2; one triangle the corresponding value of the element of the eigenvector is zero.

表 4 図 5 のセグメンテーションで用いたパラメータ

Table 4 The parameters used in the segmentation in Fig. 5

Fig. 5	α_p	α_t	α_c	β_p	β_t	β_c
first row	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
second row	0.1	0.1	0.01	0.1	0.1	0.1
third row	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
fourth row	0.1	0.1	0.01	0.1	0.1	0.1

2番目の行は、直線と曲線が交差している形状を、直線と曲線に分離する例である。どちらの例でも、視覚的に自然な形状セグメントを生成できていることが分かる。なお、グラフの重みの計算に用いたパラメータは表5のとおりである。

自己交差している曲線を含む形状をセグメンテーションする例を、図7に示す。ここでは、サンプリング点を形状セグメント1(solid circle)と2(cross)に分類している。図の始めの行は、Bezier曲線3本で表現した形状である。この曲線からサンプリングした点をクラスタリングした結果が図の2番目の行である。形状の上部の曲率の値が大きい部分からサンプリングした少数の点で構成するクラス2と、形状のそれ以外の部分からサンプリングした点で構成するクラス1に分類できていることが分かる。図の3番

目の行は、前述のクラスタ 2 に所属するサンプリング点に対応する曲線セグメントを除いた曲線セグメントで表現される形状である。そして、図の 4 番目の行では、図の 3 番目の行の形状から形状セグメントを生成している。これにより、自己交差している部分を 2 本の曲線に分離したことになる。これらから 2 本の形状セグメントを生成する手法については、今後の検討事項である。なお、グラフの重みの計算に用いたパラメータは表 6 のとおりである。

これらの結果から、交差する曲線を分離して形状セグメントを生成することが可能であることが分かる。

5. おわりに

形状の洗練化において、洗練化をする領域を選択するための手法として、グラフのクラスタリングを用いた形状セグメンテーション手法、そして、視覚的な自然さを表現する形状特徴量を用いたグラフの重みの計算手法を提案した。

特徴は、形状を構成する Bezier 曲線のパラメータ以外の事前知識を必要とせずに、形状セグメントを生成することが可能であることである。形状の一部を直感的に選択して形状を洗練化するような作業に適している手法といえる。適用例としては、機械学習のデータ生成のために、基準とする形状の一部を洗練化する場合などがあるが、形状を作成する過程での形状洗練化にも有効である。形状が完成するまでの作成過程では、その作成過程の形状が何を表現するのかは不明確な可能性があるからである。

今後の課題には、複雑な形状からの形状セグメントの生成、形状セグメントからの形状の再構成、再構成した形状の非均一相似変換による形状洗練化、そして、提案の重みの他のグラフクラスタリング手法への適用に関する研究を挙げることができる。

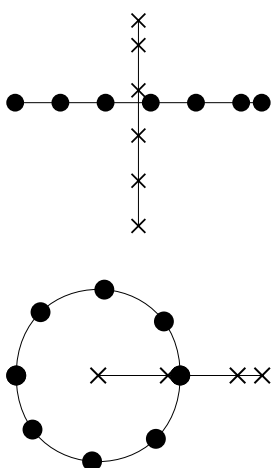


図 6 交差する曲線のセグメンテーションの例
 Fig. 6 Examples of the segmentation of intersecting curves. The clustered sampling points are denoted by: solid circles the points included in the shape segment 1; crosses the points included in the shape segment 2.

表 5 図 6 のセグメンテーションで用いたパラメータ
 Table 5 The parameters used in the segmentation in Fig. 6

Fig. 6	α_p	α_t	α_c	β_p	β_t	β_c
first row	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
second row	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1



図 7 自己交差する曲線のセグメンテーションの例
 Fig. 7 Examples of the segmentation of self-intersecting curves. The clustered sampling points are denoted by: solid circles the points included in the shape segment 1; crosses the points included in the shape segment 2.

表 6 図 7 のセグメンテーションで用いたパラメータ
 Table 6 The parameters used in the segmentation in Fig. 7

Fig. 7	α_p	α_t	α_c	β_p	β_t	β_c
second row	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
fourth row	0.01	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

参考文献

- [1] Fiedler, M.: Algebraic connectivity of graphs, *Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 23, No. 98, pp. 298–305 (1973).
- [2] Forsey, D. R. and Bartels, R. H.: Hierarchical

- B-spline refinement, *SIGGRAPH '88: Proceedings of the 15th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, New York, NY, USA, ACM, pp. 205–212 (online), DOI: <http://doi.acm.org/10.1145/54852.378512> (1988).
- [3] Fowler, B. and Bartels, R.: Constraint-based curve manipulation, *Computer Graphics and Applications, IEEE*, Vol. 13, No. 5, pp. 43–49 (online), DOI: [10.1109/38.232098](https://doi.org/10.1109/38.232098) (1993).
 - [4] Hammond, T. and Paulson, B.: Recognizing sketched multistroke primitives, *ACM Trans. Interact. Intell. Syst.*, Vol. 1, No. 1, pp. 4:1–4:34 (online), DOI: [10.1145/2030365.2030369](https://doi.org/10.1145/2030365.2030369) (2011).
 - [5] Katz, S. and Tal, A.: Hierarchical mesh decomposition using fuzzy clustering and cuts, *ACM SIGGRAPH 2003 Papers*, SIGGRAPH '03, New York, NY, USA, ACM, pp. 954–961 (online), DOI: [10.1145/1201775.882369](https://doi.org/10.1145/1201775.882369) (2003).
 - [6] Lewis, J. P., Fong, N., XueXiang, X., Soon, S. H. and Feng, T.: More optimal strokes for NPR sketching, *Proceedings of the 3rd international conference on Computer graphics and interactive techniques in Australasia and South East Asia*, GRAPHITE '05, New York, NY, USA, ACM, pp. 47–50 (online), DOI: [10.1145/1101389.1101398](https://doi.org/10.1145/1101389.1101398) (2005).
 - [7] 佐藤 信, 三輪譲二: 導関数ベクトルの非均一相似性制約に基づく曲線洗練化法, 情報処理学会研究報告-グラフィクスとCAD, Vol. 2011-CG-142, No. 12, pp. 1–6 (2011).
 - [8] 佐藤 信, 三輪譲二: 平面曲線形状洗練化のための導関数ベクトルの非均一相似性制約を用いた鏡映対称変換, 情報処理学会研究報告-グラフィクスとCAD, Vol. 2012-CG-146, No. 34, pp. 1–6 (2012).
 - [9] Mohar, B.: The Laplacian spectrum of graphs, *Graph Theory, Combinatorics, and Applications*, Wiley, pp. 871–898 (1991).
 - [10] Mohar, B.: Some applications of Laplace eigenvalues of graphs, *Graph Symmetry*, NATO ASI Series, Vol. 497, Springer Netherlands, pp. 225–275 (1997).