

# 日本株式ポートフォリオのリスク管理における 拡散成分とジャンプ成分の影響

竹俣 潤<sup>1</sup> 宮崎 浩一<sup>1,a)</sup>

受付日 2012年11月5日, 再受付日 2012年12月25日,  
採録日 2013年1月23日

**概要:** 本研究では, 日本株式市場を対象に個別銘柄リターンや複数の個別銘柄から構成される株式ポートフォリオリターンをジャンプ拡散過程でモデル化したうえでパラメータ推定を行い, 株式ポートフォリオリターンが銘柄数の増加に従って中心極限定理的な作用からどの程度正規分布に近づくかについて VaR 計測をふまえて検証する. 株式ポートフォリオリターンの分散は, 拡散成分の分散とジャンプ成分の分散から構成されるが, どちらも銘柄数が増加するに従っておおむね減少することが推定されたパラメータから確認できる. ただし, ジャンプ成分の分散を構成するパラメータを見ると, 対数ジャンプ幅率の分散は銘柄数が増加してもジャンプの頻度を表すインテンシティほど減少しないため, 特に混乱期においてジャンプ発生の際には, 株式ポートフォリオに含まれる銘柄数が多い場合でもリターンは VaR を大きく下回る可能性があることが示唆される.

キーワード: ジャンプ拡散モデル, VaR, リスク管理, ジャンプ検出, テイルリスク

## Influences of Diffusion and Jump Components on the Japanese Equity Portfolio Risk Management

JUN TAKEMATA<sup>1</sup> KOICHI MIYAZAKI<sup>1,a)</sup>

Received: November 5, 2012, Revised: December 25, 2012,  
Accepted: January 23, 2013

**Abstract:** This research focuses on the estimated parameters of jump-diffusion process for equity returns of both each individual equity and portfolios that consist of the individual equities. From the view point of estimating VaR, we examine to what extent distribution of the equity portfolio return becomes closer to normal distribution with increase in the number of individual equities, shortly the effect of central limit theorem. Variance of the equity portfolio return is composed of variances of diffusion and jump and the estimated parameters suggest that both of them decrease in general with increase in the number of individual equities. More closely looking at the parameters in the variance of the jump component, variance of the logarithm of the jump size rate does not decrease as fast as intensity representing frequency of the jump with increase in the number of individual equities. Thus, especially in the period of turbulent market condition, it suggests that the 99 percentile return of the equity portfolio even consisting of a lot of individual equities may substantially go below the 99 percentile VaR estimated under the assumption of the normal distribution for equity returns.

**Keywords:** jump diffusion model, VaR, risk management, jump detection, tail risk

### 1. はじめに

多くの金融機関が採用する主要なリスク指標にバリュエーション・リスク (VaR) がある. VaR とは, 「所与の信頼水

準 (分位点) と期間 (日次や週次など) において, 過去の市場リターンから想定される保有資産 (以下では株式ポートフォリオを想定する) の損失額を測定する」ものである. よって, 株式ポートフォリオの VaR を導出するためには, 株式ポートフォリオリターンに関する確率分布が必要となる. 金融機関の株式ポートフォリオの中身は日々の取引に応じて異なるものであるから, リスク管理を効率的に行う

<sup>1</sup> 電気通信大学  
The University of Electro-Communications, Chofu, Tokyo  
182-8585, Japan

a) miyazaki@se.uec.ac.jp

ためには個別銘柄の株式リターン（以下、個別銘柄リターンと呼ぶ）に関する確率分布と各銘柄の保有割合が与えられたら容易に株式ポートフォリオリターンに関する確率分布が得られることが望ましい。このような観点から広く採用されている分布が正規分布である。個別銘柄リターンに関して正規分布を採用すれば、銘柄間の相関構造も考慮したうえで各銘柄の保有銘柄に応じた株式ポートフォリオリターンの従う確率分布が正規分布の再生性から正規分布として容易に導かれる。また、株式ポートフォリオリターンが正規分布に従うなら、所与の信頼水準（分位点）における損失額も標準偏差の定数倍として容易に求められる。

個別銘柄リターンに正規分布を採用する場合には、株式ポートフォリオのリスク管理を効率的に行うことができ、また、個別銘柄株式を原資産とするオプション評価も Black ら [4] から容易である。しかしながら、現実の個別銘柄リターンは、古くから高い尖度やファットテイルが確認されているように (Fama [8], Mandelbrot [12]), 必ずしも正規分布に従うとはいえない。実際、個別銘柄株式は当該企業に関連するニュースの発生時やマクロ経済指標の公表時などにおいて大きく変動することが知られている (佐々木ら [15])。よって、個別銘柄リターンをより現実的な表現とするため、Merton [13] ではジャンプ拡散過程が採用された。それ以降、個別銘柄リターンのモデル化にジャンプ過程を利用するアプローチは Cont [5] にとりまとめられているように様々な確率過程が提案されて急速に進展した。

個別銘柄リターンに関してはジャンプを含むモデル化が大きく進展したのに対して、株式ポートフォリオのリターンに関するジャンプを含むモデル化が本格的に進展しはじめたのは 21 世紀に入ってからと考えられる。個別銘柄リターンをジャンプを含む形でモデル化したうえで、株式ポートフォリオのリスク管理 (VaR の導出) にアプローチしたものに、Duffie ら [7], Guan ら [10], Gibson [9] などがあげられる。特に、個別銘柄リターンを直接的にジャンプ拡散過程で記述しているのは、Duffie らと Guan らであるが、前者はジャンプのタイミングが個別銘柄間で共通する形でモデル化しているのに対して、後者では個別銘柄の各々が独自のジャンプ拡散過程にも従うようにモデル化されている。Guan らでは、各々の個別銘柄リターンが従うジャンプ拡散過程をシステムティックリスクに関するものとイデオシンクラティックリスクに関するものを結合する形で記述したうえで、多数の銘柄からなる株式ポートフォリオのリターンではシステムティックリスクに関する単一の拡散項と単一のジャンプ項からなるジャンプ拡散過程のみで近似可能であるとして簡便に VaR を求める手法を提案している。しかしながら、そこではシミュレーション実験がなされているだけで、(1) 現実の株式市場において個別銘柄が従うジャンプ拡散過程のパラメータ水準と株式ポートフォリオが従うジャンプ拡散過程のパラメータ水

準にどのような関係性があるかについては述べられていない、(2) 現実の株式市場において (1) のようなパラメータ水準に関する対応関係が生じる背景に関して、各々の個別銘柄に関するジャンプ項 (株式ポートフォリオの構成銘柄数だけ存在する) のジャンプのタイミングやジャンプの方向性と株式ポートフォリオに関するジャンプ項 (1 つだけ存在する) のジャンプのタイミングやジャンプの方向性と対応関係が議論されていない。

金融機関ではバリュー・アット・リスク (VaR) が数多くの銘柄から構成される株式ポートフォリオを対象に計測することが想定される。この場合、個別銘柄リターンがジャンプ成分の含まれるようなファットテイルなものであったとしても、数多くの銘柄から構成される株式ポートフォリオでは中心極限定理的な作用がある程度まで働いて株式ポートフォリオリターンが正規分布に近づくと考えられる。よって、正規分布を採用したバリュー・アット・リスク (VaR) が極端に過小評価となる懸念はそれほど高くはないと想定されるが、株式ポートフォリオに含まれる銘柄数に応じてどの程度の計測誤差が生じるかについて把握しておく必要がある。本研究では、この問題意識の下で、個別銘柄リターンや株式ポートフォリオリターンをジャンプ拡散過程でモデル化したうえで、Guan らでは取り扱われていなかった上記の (1), (2) に関して日本株式市場を対象としてアプローチすることを試みる。

本論文の構成は以下のとおり。次章では、本研究の目的を具体的に提示したうえで、その分析手法を示す。3 章では、データと分析結果およびその考察を与える。最終章では、まとめと結語を付す。

## 2. 研究目的と分析手法

### 2.1 研究目的

本研究の目的は、日本株式市場を対象に個別銘柄リターンをジャンプ拡散過程でモデル化し、複数の銘柄から株式ポートフォリオを構成した場合に、銘柄数の増加にともなって中心極限定理的な作用から株式ポートフォリオリターンがどの程度正規分布に近づくかについて VaR の計測への影響の確認を最終目標として検証を試みることである。そこで本研究では、主に次の 3 点に焦点を当てた分析を行う。

(分析対象 1)

株式ポートフォリオに含まれる銘柄数が増加するに従って中心極限定理的な作用がどの程度まで働くかについて、ジャンプ拡散過程のパラメータ、特にドリフト項、拡散成分のボラティリティ、ジャンプ成分のボラティリティ、インテンシティ、対数ジャンプ幅率の期待値および標準偏差が銘柄数の増加に従ってどのように変化するかに基づいて明らかにする。その際には、市場環境を安定期と混乱期に大きく分けたいうで検証を行う。個別銘柄リターンが当該企業に関連する重要なニュースが発生する際に大きく変動す



図 1 TOPIX の日次データ  
Fig. 1 Daily TOPIX data.

るといふ指摘 (佐々木ら [15]) や個別銘柄リターンは古くから高い尖度やファットテイルが確認されている (Fama [8], Mandelbrot [12]) ことから, 個別銘柄リターンには相応にジャンプ成分が含まれ, ジャンプ成分に関連するパラメータは 0 とは異なる値となることが考えられる. 株式ポートフォリオに含まれる銘柄数が増加するに従って中心極限定理的な作用が働くなら, これらのパラメータは銘柄数の増加にともない小さくなるのが想定される. (分析対象 1) では, 日本株式市場においてジャンプに関連するパラメータが銘柄数の増加にともないどの程度まで実際に縮小するかについて検証する.

(分析対象 2)

(分析対象 1) から得られた分析結果が, 市場環境が安定期か混乱期かによって大きく異なるため, その理由を探ることを目標に, (分析対象 2) では, 個別銘柄間の相関構造が中心極限定理的な作用の強さに与える影響を検証する. (分析対象 1) では, 個別銘柄リターンには相応にジャンプ成分が含まれていても, 株式ポートフォリオに含まれる銘柄数が増加するに従い, 個別銘柄で観測されたジャンプがジャンプサイズに関する相関によりネットオフされて株式ポートフォリオではジャンプが観測されないという形で中心極限定理的な作用が働きジャンプ成分が縮小することを想定しているが, 2008 年のように多くの個別銘柄の株価が同時に大きく下がる市場環境では, 多数の個別銘柄から構成される TOPIX においても下方ジャンプが確認される (図 1 参照). こうした市場環境では個別銘柄リターン間の相関が高まっていることが想定される. 分析対象として興味深いのは, 個別銘柄リターン間の相関が高まる場合に, 個別銘柄リターン間における拡散成分の相関とジャンプ成分の相関がそれぞれどのようなようになるかという点である. ジャンプ成分の相関が高まっているなら, 中心極限定理的な作用の働きは弱く, 株式ポートフォリオリターンにおいてもジャンプ成分が縮小せず相応に残ると考えられる.

(分析対象 3)

株式ポートフォリオの構成銘柄数の増加にともなって中心極限定理的な作用から株式ポートフォリオリターンがある程度正規分布に近づくのであれば, 便宜的に大規模な株式ポートフォリオでは VaR の計測を多変量正規分布に基づいて行っても大きな問題は生じないと考えられる. こ

では, 銘柄数の増加にともなう中心極限定理的な作用の強さが, VaR の計測を多変量正規分布に基づいて行った際の計測誤差にどのような影響を及ぼすかについて検証する. 株式ポートフォリオを構成する銘柄数に応じて上記の計測誤差を導出しておけば, VaR に基づくリスク管理をその計測誤差をもふまえて保守的に運用することも可能となる. 検証に際しては, 所与の信頼水準や市場環境に応じて計測誤差がどのように異なるかについても確認する.

## 2.2 株価モデル

本研究では, 株価リターンを一般化ウィナー過程にジャンプ過程を加えて拡張した Merton [13] によるジャンプ拡散モデル (式 (1)) を用いて表現する.

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu_{MJD} - \lambda\beta) dt + \sigma_{MJD} dW_t + (Y - 1) dN_t \quad (1)$$

ここで  $\mu_{MJD}$  は期待リターン,  $\beta$  はジャンプ幅率 ( $Y - 1$ ) の期待値,  $\sigma_{MJD}$  は拡散項のボラティリティ,  $W_t$  はウィナー過程,  $Y$  は対数をとると平均  $\mu_J$ , 分散  $\delta^2$  の正規分布に従うジャンプ幅率の確率変数  $Y \equiv \exp(\mu_J + \delta\varepsilon)$  であり ( $\varepsilon$  は標準正規分布に従う確率変数),  $N_t$  はインテンシティ (ジャンプ強度) が  $\lambda$  のポアソン過程である. ジャンプの発生を想定しない ( $\lambda = 0$ ) 場合には, ジャンプ拡散モデルと拡散モデルは同一のモデルになる. 式 (1) を離散化することによって, 時刻  $t + 1$  の株価  $S_{t+1}$  の確率密度関数 ( $\theta = \{\mu_{MJD}, \sigma_{MJD}, \lambda, \beta, \delta\}$ ) は式 (2) で与えられる\*1.

$$g_{MJD}(S_{t+1}|\theta) = \frac{\exp(-\lambda)}{S_{t+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \exp\left(-\frac{(\ln S_{t+1} - \ln S_t - \psi - k\mu_J)^2}{2(\sigma_{MJD}^2 + k\delta^2)}\right)}{k! \sqrt{2\pi(\sigma_{MJD}^2 + k\delta^2)}} \quad (2)$$

$$\psi \equiv \mu_{MJD} - 0.5\sigma_{MJD}^2 - \lambda\beta \quad (3)$$

$$\mu_J = \ln(1 + \beta) - \frac{1}{2}\delta^2 \quad (4)$$

ここで  $k$  はジャンプ回数を示す.

また, 単位時間の株価リターンが従う分布の標準偏差  $\sigma_{Total}$  は式 (5) で与えられる (佐々木ら [17] を参照).

$$\sigma_{Total}^2 = \sigma_{MJD}^2 + \lambda(\mu_J^2 + \delta^2) \quad (5)$$

本研究の実証分析では, 個別銘柄リターンと株式ポートフォリオリターンの両方を式 (1) のジャンプ拡散モデルで表現し, 推定されたパラメータを比較する. その際に株式ポートフォリオを構成する銘柄数の増加にともない想定される中心極限定理的な作用について議論する.

本研究では Merton [13] のジャンプ拡散モデルに基づき, 各々の個別銘柄リターンが従う確率過程を式 (6) とした.

\*1 田中ら [18] では株価の確率密度関数, Craine ら [6] では株価リターンの確率密度関数を示している. 導出の詳細は付録 A.1 を参照されたい.

株式ポートフォリオにおける個別銘柄の保有枚数が  $g_i$  のとき、株式ポートフォリオの価値は式 (7) となり各個別銘柄へのウェイト  $\omega_i$  が式 (8) で表されることから、株式ポートフォリオの従う確率過程は式 (9) に従うものとしている。なお、各銘柄間で  $dW_t^i dW_t^j = \rho_{i,j}^B dt$ ,  $dN_t^i dN_t^j = 0$ ,  $\rho(\varepsilon_i, \varepsilon_j | N_{t+1}^i - N_t^i \geq 1, N_{t+1}^j - N_t^j \geq 1) = \rho_{i,j}^{J*2}$  であり、同一銘柄で  $W_t, N_t, \varepsilon$  は各々独立であるとする。ここで、株式ポートフォリオリターンのジャンプ成分 (式 (10)) に着目すると、その期待値は構成銘柄のジャンプ幅率の期待値  $\mu_{J,i}$  のウェイト重み付け総和であるが、ジャンプ幅率の確率変数  $Y_i$  が正と負の両方のジャンプを表現する変数であることを考慮すると各構成銘柄のジャンプ幅率の期待値  $\mu_{J,i}$  は 0 を中心に分布し、そのウェイト重み付け総和も押しなべて 0 に近づくことが想定される。また、分散も株式ポートフォリオに含まれる銘柄数が増えると、いくつかの銘柄がジャンプしたとしてもジャンプ幅率の相関  $\rho_{i,j}^J$  が小さければ株式ポートフォリオとしてのジャンプサイズはネットオフされることが想定される。そのため、きわめて多くの銘柄からなる大規模な株式ポートフォリオのリターンにおいては、ジャンプが発生しにくく (インテンシティ  $\lambda$  が 0 に近づく)、リターンの従う分布が正規分布に近づく (式 (11) の右辺第 3 項以降が縮小し、単純な拡散モデルに近づく) と考えている。本研究では、上記のように複数銘柄で株式ポートフォリオを構成した場合に想定されるジャンプ成分の縮小を中心極限定理的な作用と考えている。

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = (\mu_{MJD,i} - \lambda_i \beta_i) dt + \sigma_{MJD,i} dW_t^i + (Y_i - 1) dN_t^i \quad (6)$$

$$S_t^{port} = \sum_{i=1}^n g_i S_t^i \quad (7)$$

$$\omega_i = \frac{g_i S_t^i}{S_t^{port}} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_t^{port}}{S_t^{port}} &= \sum_{i=1}^n (\mu_{MJD,i} - \lambda_i \beta_i) \omega_i dt \\ &+ \sum_{i=1}^n \sigma_{MJD,i} \omega_i dW_t^i \\ &+ \sum_{i=1}^n (Y_i - 1) \omega_i dN_t^i \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n (Y_i - 1) \omega_i dN_t^i \\ &= \sum_{i=1}^n \{ \exp(\mu_{J,i} + \delta_i \varepsilon_i) - 1 \} \omega_i dN_t^i \end{aligned} \quad (10)$$

\*2 ジャンプ幅率の相関係数  $\rho_{i,j}^J$  は個別銘柄  $i$  と  $j$  のリターンが単位期間内に少なくとも 1 回以上ジャンプした場合の相関係数を示しているが、実際の検証においては単位期間内に 2 回以上ジャンプしたかどうかを判断することはできない。そのため、実証分析では、単位期間内に個別銘柄  $i$  と  $j$  のリターンがともにジャンプした場合の相関係数として取り扱っている。

$$\frac{d\bar{S}_t^{port}}{S_t^{port}} = \sum_{i=1}^n \mu_{MJD,i} \omega_i dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{MJD,i} \omega_i dW_t^i + \dots \quad (11)$$

本研究と関連したモデル化をしている Guan ら [10] では、各々の個別銘柄リターンが従う確率過程における拡散成分とジャンプ成分をシステムティックリスクに関するものとイデオシンクラティックリスクに関するもので結合する形でモデル化したうえで、それらの重み付け総和として株式ポートフォリオの従う確率過程を示している。また、株式ポートフォリオがきわめて多くの銘柄からなる場合にはジャンプ成分の縮小が生じることを想定し、システムティックリスクに関する単一の拡散項と単一のジャンプ項からなるジャンプ拡散過程で近似した確率過程を採用している。つまり、Guan らのモデルは銘柄数の増加にともないジャンプ成分が縮小することを想定しているという観点において本研究と同一であるが、構成銘柄数が大規模な株式ポートフォリオであってもシステムティックなジャンプ成分\*3が残ることを前提としている。本研究の実証分析では、株式ポートフォリオに含まれる銘柄数をきわめて多くした場合に、株式ポートフォリオリターンにおいて、(1) Guan らのモデルのようにシステムティックなジャンプ成分が残るのか、(2) ジャンプ成分 (式 (11) の右辺第 3 項以降) が完全にネットオフされて 0 となり、拡散成分のみが残るのか、についても確認する。

## 2.3 分析手法

### 2.3.1 (分析対象 1) に関する分析手法

(分析対象 1) では、株式ポートフォリオに含まれる銘柄数の増加にともなう中心極限定理的な作用をジャンプ拡散過程のパラメータの観点から検証する。株式ポートフォリオに含まれる銘柄数としては、1 銘柄、2 または 3 銘柄、5 または 6 銘柄、10 または 11 銘柄、21 または 22 銘柄、43 または 44 銘柄、1,083 銘柄の 7 通りのケースを取り上げる。実証分析では、分析期間において継続して株価データが得られる東証 1 部上場企業 1,083 社を対象とするため、上記の銘柄数に対応する株式ポートフォリオ数  $N$  は 1083, 400, 200, 100, 50, 25, 1 となる。市場環境としては、市場安定期と市場混乱期の 2 期間に関して分析を試みる。

株価リターンの確率過程としてジャンプ拡散過程を採用する場合、株式リターンの分散  $\sigma_{Total}^2$  は式 (5) のように拡散成分による分散  $\sigma_{MJD}^2$  とジャンプ成分による分散  $\sigma_J^2$  の 2 つに分解される。株式ポートフォリオに含まれる銘柄数が増加すると、拡散成分による分散  $\sigma_{MJD}^2$  は通常の分散投資効果が働くことによって減少することが想定され、ジャンプ成分による分散  $\sigma_J^2$  は中心極限定理的な作用が働くことによって減少することが見込まれる。(分析対象 3) で

\*3 本研究のモデルでは式 (11) の右辺第 3 項以降が対応する。

は、株式リターンの分散  $\sigma_{Total}^2$  における 2 つの分散の相対的な大きさやジャンプ成分による分散を構成するパラメータの大きさが重要な役割を担うことになるため、ここでは、ドリフト項における  $\mu_{MJD}$ , 拡散成分のボラティリティ  $\sigma_{MJD}$ , ジャンプ成分のボラティリティ  $\sigma_J$ , 株式リターンの分散  $\sigma_{Total}^2$  に占めるジャンプ成分による分散  $\sigma_J^2$  の割合  $\sigma_J^2/\sigma_{Total}^2$ , インテンシティ  $\lambda$ , 対数ジャンプ幅率の期待値  $\mu_J$  と標準偏差  $\delta$  が、株式ポートフォリオに含まれる銘柄数を 1 銘柄から、2 または 3 銘柄, 5 または 6 銘柄, 10 または 11 銘柄, 21 または 22 銘柄, 43 または 44 銘柄, 1,083 銘柄へと 7 段階で増加させた場合にどのように変化するかについて確認する。これらの銘柄数に対応する株式ポートフォリオ数  $N$  は 1083, 400, 200, 100, 50, 25, 1 であるから、各パラメータ値は株式ポートフォリオの数だけ得られるため箱図として掲載し、箱図に中央値を示すラインを表示し、銘柄数に応じたパラメータ値の変化を確認する際の目安とする。個別銘柄リターンや株式ポートフォリオリターンを対象としたジャンプ拡散過程 (式 (1)) のパラメータ推定は、式 (2) の密度関数を用いた最尤法による。

### 2.3.2 (分析対象 2) に関する分析手法

(分析対象 2) では、多くの個別銘柄の株価が同時に大きく下げる市場環境では TOPIX においても下方ジャンプが確認されることから、個別銘柄リターン間の相関の高まりが想定されるため、その影響を拡散成分の相関とジャンプ成分の相関に分けて確認することである。ジャンプ成分の相関が大きいなら、中心極限定理的な作用の働きは弱く (ジャンプした際のジャンプサイズにみられるネットオフが生じにくく)、株式ポートフォリオリターンにおいてもジャンプ成分が縮小せず相応に残ると考えられる。ここでは、拡散成分の相関係数とジャンプ成分の相関係数を時系列的に把握するため、まず、2.3.1 項で取り上げた株式ポートフォリオを対象に分析期間を 1 年ごとに分割して、1 年ごとにジャンプ拡散過程のパラメータを最尤法により推定する。

株式ポートフォリオの拡散成分の分散に内在する相関係数は株式ポートフォリオ構成銘柄のペアごとに 1 つ存在するため、銘柄数の大きい株式ポートフォリオの場合には多数の相関係数が存在することになり、年ごとの相関係数の大きさの傾向を把握するのが難しい。そこで、株式ポートフォリオごとに共通の相関係数を想定して式 (12) のように定義し、先に推定したジャンプ拡散過程のパラメータを式 (12) に代入して年ごと、株式ポートフォリオごとに 1 つの相関係数を導出する。

$$\rho^B = \frac{\sigma_{MJD,port}^2 - \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_{MJD,i}^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n \omega_i \omega_j \sigma_{MJD,i} \sigma_{MJD,j}} \quad (12)$$

ここで  $\rho^B$  は拡散成分に関する相関係数、添字の *port* は株式ポートフォリオのパラメータであることを意味する。

株式ポートフォリオのジャンプ成分の分散に内在する相関係数はその概念を定義すること自体が難しいが、ここでは、株式ポートフォリオリターンの対数ジャンプ幅率の分散  $\delta^2$  に内在する相関係数ととらえる。個別銘柄リターンがジャンプ拡散過程 (式 (1)) で表現される場合には対数ジャンプ幅率は正規分布に従うから、株式ポートフォリオに複数の銘柄が存在する場合、株式ポートフォリオリターンの対数ジャンプ幅率の分散は、個別銘柄リターンの対数ジャンプ幅率の分散と相関係数から構成されることになる。そこで、ジャンプ成分の分散に内在する相関係数を拡散成分の分散に内在する相関係数と同様に式 (13) によって定義する。株式ポートフォリオリターンのジャンプ成分の分散に内在する相関係数を導出するためには、第 1 に、株式ポートフォリオリターンがジャンプしたタイミングを推定する、第 2 に、そのタイミングにおいて同時にジャンプした個別銘柄がどれであるかを特定する、第 3 に、株式ポートフォリオリターンに関するジャンプ拡散過程のパラメータと、同時にジャンプした個別銘柄リターンに関するジャンプ拡散過程のパラメータを式 (13) に代入すればよい。拡散成分の相関係数と同様にジャンプ成分の相関係数も、年ごと、株式ポートフォリオごとに 1 つ導出する。

$$\rho^J = \frac{\delta_{port}^2 - \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \delta_i^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n \omega_i \omega_j \delta_i \delta_j} \quad (13)$$

ここで  $\rho^J$  はジャンプ成分に関する相関係数である。

この際に注意すべきことは、式 (13) に基づくジャンプ成分の相関係数の計測は、株式ポートフォリオリターンにジャンプが発生するという条件の下での相関係数を計測することになる点である。株式ポートフォリオに含まれる個別銘柄のリターンの対数ジャンプ幅率に関する相関係数が負である場合には、複数の個別銘柄が同時にジャンプしても正のジャンプと負のジャンプが混在して現れやすく、これらが相殺されて株式ポートフォリオとしては当該時点においてジャンプしていないと判断されることがある。株式ポートフォリオに含まれる銘柄数が多くなるほど上記のような相殺が多く発生するため、相関係数が同程度であっても銘柄数が多いほど株式ポートフォリオリターンにおけるジャンプ回数、つまり、インテンシティは低下することになる。式 (5) からジャンプ成分の分散はインテンシティと対数ジャンプ幅率の標準偏差の両方の影響を受けるが、上記の株式ポートフォリオリターンにおけるインテンシティの低下は対数ジャンプ幅率の標準偏差を上記のような相殺がない場合よりも大きく推定することになるため、株式ポートフォリオリターンにジャンプが確認された時点において式 (13) を用いて対数ジャンプ幅率の相関係数を計測すると、銘柄数が多いほど本来の相関係数よりも大きめに推定するバイアスを持つことになる。よって、式 (13) から得られる対数ジャンプ幅率の相関係数の大きさ自体を異な

る銘柄数からなるポートフォリオ間で比較することは難しいが、各株式ポートフォリオに関して対数ジャンプ幅率の相関係数の大きさが市場環境に応じてどのように変動するかについて検討する際には有意義な情報となる。

個別銘柄リターンや株式ポートフォリオリターンにおけるジャンプのタイミングを特定する手法が、Barndorff-Neilsenら [2], [3], Leeら [11] によって提案されている。彼らの提案しているジャンプ検出手法は、ジャンプ変動に対して頑健に連続的変動の情報のみを抽出できる統計量 Bipower-variation とジャンプを含む包括的な変動の情報を表現する統計量 Realized-variation との差に着目したものである。彼らは、確率過程を連続成分とジャンプ成分から構成されることを想定してジャンプの検出を行っている。連続成分には確率ボラティリティで記述されるような確率過程も許容されるため、ジャンプは検出されにくい（ニュース発生時のリターンの大きな変動がジャンプではなくボラティリティの増大として把握される）ことが想定される。これに対して、本研究では株価過程をジャンプ拡散過程でモデル化しているので、連続成分を少し制約した形（拡散係数は定数のボラティリティ）でジャンプ成分との対比を行うことが目的となるため、Bipower-variation を直接的に適用するわけにはいかない\*4。そこで本研究では、株価モデルとして採用したジャンプ拡散モデルとの対応付けの観点を重要視し、式 (15) で与えられる Realized-variation を分母に、分子には Bipower-variation の代わりに拡散項のボラティリティを Realized-variation から差し引いたものを用いて得られる相対ジャンプ測度  $RJ_T$  (式 (15)) に基づいてジャンプの検出を行う。

$$RV_T = \sum_{j=1}^M R_{T,j}^2 \quad (14)$$

$$RJ_T = \frac{RV_T - M\sigma_{MJD,T}^2}{RV_T} \quad (15)$$

ここで  $R_{T,j}$  は時刻  $T-1$  から時刻  $T$  までをサンプル数  $M$  に分割した際の  $j$  番目のリターン、つまり時刻  $T-1+(j-1)/M$  から時刻  $T-1+j/M$  までのリターンを示す。

Realized-variation の定義から式 (15) は、定数のボラティリティを想定した連続過程ではとらえられないようなジャンプのみによる変動とジャンプを含む包括的な変動の相対比を示している。そのため、相対ジャンプ測度  $RJ_T$  がある閾値 (7.5% を採用、詳細は付録 A.2 を参照) を超える場合には、サンプル期間での総変動の中にジャンプ変動が存在する、つまり時刻  $T-1$  から時刻  $T$  まで間に少なくとも 1 度のジャンプが発生したと判断できる。本研究では、以下の手順を繰り返すことで、少なくとも 1 度のジャンプが発生したと判断されるデータセットの中からジャンプ日を

\*4 詳細な議論は付録 A.2 を参照されたい。

抽出する。

#### 分析手順

**Step1** 相対ジャンプ測度  $RJ_T$  を算出し、閾値を超えているか否かを判断する。閾値を超えていた場合には Step2 に進み、そうでない場合には試行を終了する。

**Step2** リターンのデータセットの中で、 $|R_{T,j} - \mu_{MJD}|$  が最も大きいリターンをジャンプ成分が含まれるリターンとし、それを除外した新たなデータセットを構築する。

**Step3** Step2 で新たに構築したデータセットに基づき、相対ジャンプ測度  $RJ_T$  を更新する。

#### 2.3.3 (分析対象 3) に関する分析手法

(分析対象 3) では、株式ポートフォリオの構成銘柄数の増加にともなう中心極限定理的な作用により株式ポートフォリオリターンが正規分布に近づくことが想定されるが、その強さが VaR の計測を多変量正規分布に基づいて行った際の計測誤差にどのような影響を及ぼすかについて検証する。また、検証に際して所与の信頼水準や市場環境に応じて計測誤差がどのように異なるかについても確認する。

観測数が  $L$  であったとき、株式ポートフォリオリターンの従う分布を正規分布と仮定した  $VaR_{c,L}^n$  は所与の信頼水準  $c\%$  に対応して式 (16) で与えられ、2.3.1 項で取り上げた株式ポートフォリオを対象に VaR を算出する。

$$VaR_{c,L}^n = \frac{\sum_{n=1}^L R_{n,t}}{L} - \alpha_c \hat{\sigma}_n \quad (16)$$

ここで  $R_{n,t}$  は時刻  $t$  における構成銘柄数  $n$  の株式ポートフォリオリターン、 $\alpha_c$  は信頼水準  $c\%$  に応じた定数 (リターン分布に正規分布を仮定しているため、たとえば信頼水準が 97.5% の場合、 $\alpha_c = 1.96$  となる)、 $\hat{\sigma}_n$  はリターンデータ  $R_{n,t}$  から推定された標本標準偏差である。

観測数  $L$  のリターンデータセットを小さい順に並べたものを、 $\mathbf{R} = (R_{(1)}, \dots, R_{(p)}, \dots, R_{(L)})$  ( $p \equiv L \cdot (100 - c) / 100$ ) とする。 $R_{(p)}$  はサンプル期間に現実のリターン分布が従う確率分布において下側確率が  $(100 - c)\%$  となる分位点であり、 $VaR_{c,L}^n$  はリターン分布に正規分布を仮定した場合の下側確率が  $(100 - c)\%$  となる分位点である。そのため、株式ポートフォリオリターンが真に正規分布に従うのであれば  $R_{(p)}$  と  $VaR_{c,L}^n$  は等しくなる。しかしながら、実際には多くのリターン分布が正規分布に従わずファットテイルであるため、これらが等しくならない場合が生じる。この差  $\varepsilon_{c,n}$  (式 (17)) を計測誤差とし、市場安定期や市場混乱期において、計測誤差が株式ポートフォリオに含まれる銘柄数  $n$  や信頼水準  $c\%$  に応じてどの程度の大きさとなるかについて検証する。

$$\varepsilon_{c,n} = VaR_{c,L}^n - R_{(p)} \quad (17)$$

ここで特に  $\varepsilon_{c,n} \leq 0$  である場合には多変量正規分布に基づく VaR の計測はリスクを過大評価することになるもの

の保守的なリスク管理の立場からは許容されるが、逆に  $\varepsilon_{c,n} > 0$  である場合には多変量正規分布に基づく VaR の計測では、リスクを過小評価することになり十分な注意が必要となる。

### 3. 実証分析

#### 3.1 データと分析設定

分析に用いる株価データは、2000年7月3日から2010年6月30日までの東証1部上場企業1,083社の日次データである。株式ポートフォリオに含まれる銘柄数  $n$  として、1銘柄から、2または3銘柄、5または6銘柄、10または11銘柄、21または22銘柄、43または44銘柄、1,083銘柄の7通りのケースを取り上げる。これらの銘柄数に対応する株式ポートフォリオ数  $N$  は1083, 400, 200, 100, 50, 25, 1である。これらの株式ポートフォリオは分析開始時点(2000年7月3日)に個別銘柄を時価総額順にソート、 $N$ 分割して構築し、分析期間を通じて同一のものを使用する。なお、保有ウェイトは各個別銘柄の変動のインパクトを等しくするため、保有金額が等しくなるよう ( $w_i = 1/n$ ) にした。

分析対象1の検証では、データ期間のうち、市場が比較的安定していた2000年7月3日から2007年8月8日までを市場安定期、サブプライム問題が表面化し市場が混乱していた2007年8月9日から2009年12月30日までを市場混乱期として、これらの2期間を対象として分析を試みる。

分析対象2の検証では、分析期間2000年7月3日から2010年6月30日を1年ずつの10期間に分割し、各期間に対して検証を行う。そのため、ジャンプ日の特定を行う際の時刻  $T-1$  から時刻  $T$  までの間は1年であり、分割したサンプル数  $M$  は各期間における営業日数となる。

分析対象3の検証では、信頼水準  $c\%$  を95%から99%の0.5%刻みとする。また分析対象1の検証と同様に市場安定期、市場混乱期を対象として分析を試みる。各期間の観測数  $L$  は市場安定期では1749、市場混乱期では585である。

#### 3.2 分析結果と考察

##### 3.2.1 (分析対象1)の分析結果と考察

ジャンプ拡散モデルのパラメータ推定結果を箱図として図2から図15に示した<sup>\*5,\*6</sup>。図2から図8が市場安定期、図9から図15が市場混乱期の分析結果である。各図

の横軸は株式ポートフォリオを構成する銘柄数  $n$  を示しており、 $n=1$  は個別銘柄そのものである。箱図を結ぶラインは、中央値を紡いだものであり、これをパラメータ値の変化の目安とする。

図2と図9から安定期と混乱期ともにドリフト項における  $\mu_{MJD}$  は株式ポートフォリオに含まれる銘柄数にかかわらずおおむね一定であることが確認される。これは、式(9)、式(11)で示すように株式ポートフォリオのドリフト項における  $\mu_{MJD}$  が構成銘柄のドリフト項における  $\mu_{MJD,i}$  のウェイト重み付けの足し合わせであるといった点と整合的である。

次にジャンプ成分のボラティリティに注目する。拡散成分のボラティリティ  $\sigma_{MJD}$  は、図3と図10から安定期と混乱期ともに株式ポートフォリオに含まれる銘柄数が増加すると、通常の分散投資効果が働くことによって減少することが確認される。同様に、ジャンプ成分のボラティリティ  $\sigma_J$  は、図4と図11から安定期と混乱期ともに株式ポートフォリオに含まれる銘柄数が増加すると、中心極限定理的な作用が働くことによって減少することが分かる。これより、株式ポートフォリオの銘柄数が増え、株式ポートフォリオのリターンの分散において、拡散成分による分散だけでなくジャンプ成分による分散も同時に減少することが確認される。より詳細に検討するため、株式リターンの分散  $\sigma_{Total}^2$  に占めるジャンプ成分による分散  $\sigma_J^2$  の割合(図5と図12)に着目すると、安定期においては、銘柄数  $n$  が1のとき0.581である割合は銘柄数  $n$  が1083へと増加すると0.337へと42%も縮小し中心極限定理的な作用が強く働くことが確認されるのに対して、混乱期においては、銘柄数  $n$  が1のとき0.509である割合は銘柄数  $n$  が1083へと増加しても0.428にとどまり、わずか15.9%しか縮小せず中心極限定理的な作用の働きが弱いことが確認される。

株式リターンの分散  $\sigma_{Total}^2$  に占めるジャンプ成分の分散  $\sigma_J^2$  の割合  $\sigma_J^2/\sigma_{Total}^2$  が混乱期においては株式ポートフォリオの銘柄数  $n$  が増えてもそれほど低下しない原因を探るために、ジャンプ成分の分散を構成するパラメータであるインテンシティ  $\lambda$  と対数ジャンプ幅率の期待値  $\mu_J$  と対数ジャンプ幅率の標準偏差  $\delta$  について確認する。インテンシティ  $\lambda$  (図6と図13)に着目すると、安定期においては、銘柄数  $n$  が1のとき0.335である割合は銘柄数  $n$  が1083へと増加すると0.111へと66.8%も縮小するのに対して、混乱期においては、銘柄数  $n$  が1のとき0.21であるインテンシティ  $\lambda$  は銘柄数  $n$  が1083へと増加しても0.114と45.4%程度の縮小となり縮小幅は相対的に小さい。ここで、どの構成銘柄数においても安定期のインテンシティの方が混乱期のインテンシティより大きいという結果は直感に反するように思われるが、これは本研究の検証で用いるモデルでは推定期間を通じて定数とした拡散成分のパラメータ

\*5 ボラティリティなどの単位は年率で考えることが一般的であるが、ジャンプ幅率  $Y$  はジャンプした際に値をとる時間に対して離散的な確率変数であるため、日率で推定された期待値  $\mu_J$ 、ボラティリティ  $\delta$  を通常的手法を用いて年率変換することができない。本研究では、株式ポートフォリオを構成する個別銘柄数の増加にともなう各パラメータの縮小の差異に着目することも目的としている。そのため、各パラメータに関して日次単位で示している。久田 [19] でも日次リターンから推定したジャンプ拡散モデルのパラメータを日率のまま示しているようである。

\*6 本研究の実証分析とあわせて、ジャンプ拡散モデルと単純な拡散モデル ( $\lambda=0$ ) とのリターンの表現力に関して尤度比とAICによる検討を行った。詳細は付録A.3を参照されたい。

値ではとらえきれない変動をジャンプを含む変動としているためと考えられる。つまり、安定期では拡散成分のパラメータ値が比較的小さいため、比較的小さな変動であってもジャンプを含む変動として判断されやすいのに対して、混乱期では拡散成分のパラメータ値が比較的大きいため、金融危機直後に観測されたきわめて大きな変動のみがジャンプを含む変動として判断されたのだと考えられる。実際、サンプル数に占める  $\mu_{MJD} \pm 1.96\sigma_{MJD}$  を超える大きな変動の割合は、概して混乱期よりも安定期のほうが多かった。

対数ジャンプ幅率の期待値  $\mu_J$  (図 7 と図 14) に着目すると、安定期と混乱期ともに銘柄数が少ない場合にはおしなべて 0 であるが、銘柄数が増加するにつれて負の大きな値をとっていることが確認される。これは株式ポートフォリオリターンでは下方ジャンプが多く観測される傾向にあることを示している。インテンシティ  $\lambda$  が銘柄数の増加にともなって縮小していることをふまえると、個別銘柄リターンのジャンプのうち、上方ジャンプの多くは個別銘柄特有のニュースを織り込んだものであり、株式ポートフォリオリターンではこれがネットオフされた可能性がある。その一方、下方ジャンプの多くは市場全体のニュースを織り込んだものであり、複数の個別銘柄リターンが同時に下方ジャンプしたために、株式ポートフォリオリターンであってもジャンプ成分がネットオフされずに残った可能性が考えられる。

対数ジャンプ幅率の標準偏差  $\delta$  (図 8 と図 15) に着目すると、安定期においては、銘柄数が 1 のとき 0.0288 である対数ジャンプ幅率の標準偏差は銘柄数が 1083 へと増加すると 0.0163 へと 43.4% も縮小するのに対して、混乱期においては、銘柄数が 1 のとき 0.0473 である対数ジャンプ幅率の標準偏差は銘柄数が 1083 へと増加しても 0.0347 と 26.3% 程度の縮小となり縮小幅は相対的小さい。このことから、株式リターンの分散  $\sigma_{Total}^2$  に占めるジャンプ成分の分散  $\sigma_J^2$  の割合  $\sigma_J^2/\sigma_{Total}^2$  が混乱期においては株式ポートフォリオの銘柄数が増えてもそれほど低下しない原因は、インテンシティ  $\lambda$  と対数ジャンプ幅率の標準偏差  $\delta$  の両方によることが分かる。ここで特に注目しておきたいことは、銘柄数が比較的小さい場合には、インテンシティに関してはその大きさ自体は安定期の方が混乱期よりも大きいものに対して、対数ジャンプ幅率の標準偏差  $\delta$  は銘柄数にかかわらず混乱期の方が安定期よりも大きいことである。つまり、安定期には小さなジャンプが比較的多く観測され、混乱期にはジャンプの観測は少ないものの観測された場合には大きなジャンプであることがうかがえる。

3.2.2 (分析対象 2) の分析結果と考察

(分析対象 1) から、株式リターンの分散  $\sigma_{Total}^2$  に占めるジャンプ成分による分散  $\sigma_J^2$  の割合に着目すると、安定期においては、銘柄数が 1 から 1083 へと増加すると 42% も縮小するのに対して、混乱期においては、銘柄数が 1 から

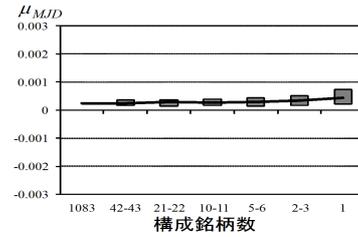


図 2  $\mu_{MJD}$  の推定値 (安定期)

Fig. 2 Estimated  $\mu_{MJD}$  (Stable market condition).

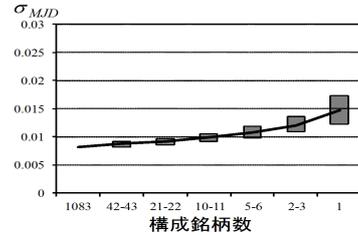


図 3  $\sigma_{MJD}$  の推定値 (安定期)

Fig. 3 Estimated  $\sigma_{MJD}$  (Stable market condition).

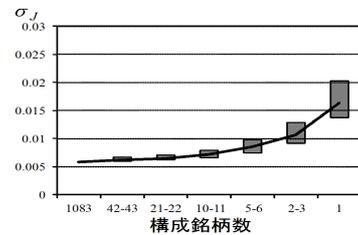


図 4  $\sigma_J$  の推定値 (安定期)

Fig. 4 Estimated  $\sigma_J$  (Stable market condition).

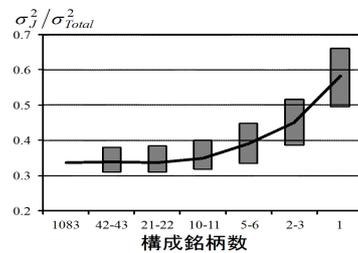


図 5  $\sigma_J^2/\sigma_{Total}^2$  の推定値 (安定期)

Fig. 5 Estimated  $\sigma_J^2/\sigma_{Total}^2$  (Stable market condition).

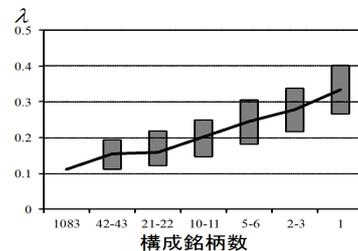


図 6  $\lambda$  の推定値 (安定期)

Fig. 6 Estimated  $\lambda$  (Stable market condition).

1083 へと増加してもわずか 15.9% しか縮小しないことが確認された。これは、安定期においては、銘柄数が 1 から 1083 へと増加する場合に拡散成分による分散の減少よりもジャンプ成分による分散の減少の方がきわめて大きい

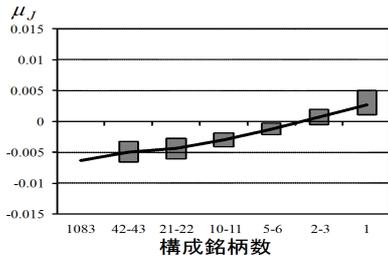


図 7  $\mu_J$  の推定値 (安定期)

Fig. 7 Estimated  $\mu_J$  (Stable market condition).

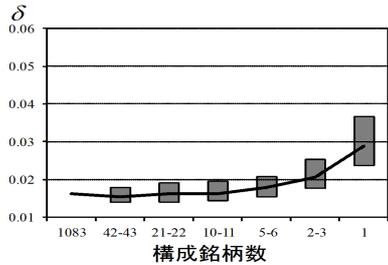


図 8  $\delta$  の推定値 (安定期)

Fig. 8 Estimated  $\delta$  (Stable market condition).

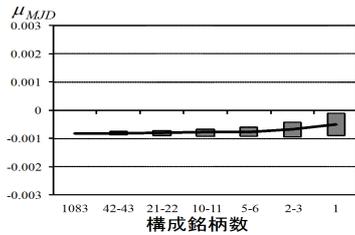


図 9  $\mu_{MJD}$  の推定値 (混乱期)

Fig. 9 Estimated  $\mu_{MJD}$  (Turbulent market condition).

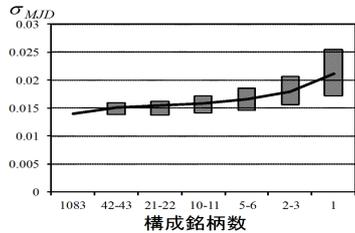


図 10  $\sigma_{MJD}$  の推定値 (混乱期)

Fig. 10 Estimated  $\sigma_{MJD}$  (Turbulent market condition).

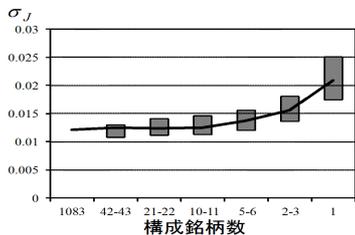


図 11  $\sigma_J$  の推定値 (混乱期)

Fig. 11 Estimated  $\sigma_J$  (Turbulent market condition).

に対し、混乱期においては、拡散成分による分散の減少よりもジャンプ成分による分散の減少の方が大きいものの大差はないことを意味する。(分析対象2)では、このような

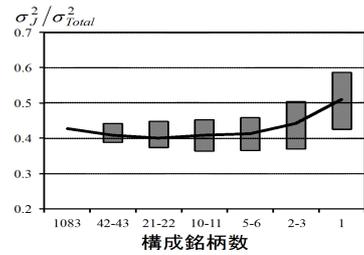


図 12  $\sigma_J^2 / \sigma_{Total}^2$  の推定値 (混乱期)

Fig. 12 Estimated  $\sigma_J^2 / \sigma_{Total}^2$  (Turbulent market condition).

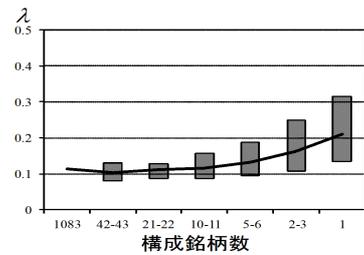


図 13  $\lambda$  の推定値 (混乱期)

Fig. 13 Estimated  $\lambda$  (Turbulent market condition).

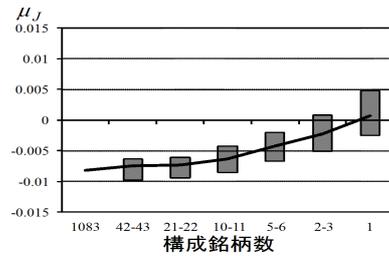


図 14  $\mu_J$  の推定値 (混乱期)

Fig. 14 Estimated  $\mu_J$  (Turbulent market condition).

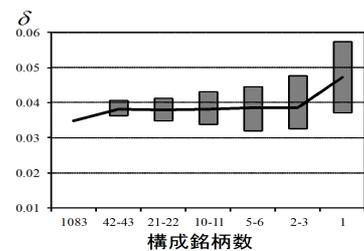


図 15  $\delta$  の推定値 (混乱期)

Fig. 15 Estimated  $\delta$  (Turbulent market condition).

市場環境によって中心極限定理的な作用の強さに違いが生じる結果について、銘柄間の相関構造の市場環境による違いに着目して検証を行う。拡散成分による分散に内在する銘柄間の年ごとの相関係数とジャンプ成分の分散を構成する対数ジャンプ幅率の分散に内在する銘柄間の年ごとの相関係数を、それぞれ、図 16、図 17 に示した。

拡散成分による分散に内在する銘柄間の年ごとの相関係数は、図 16 から、最も分散投資効果が現れる銘柄数が 1083 の場合に着目すると、安定期においては 0.2~0.3 程度であるのに対して、混乱期には 0.4 程度と高まるもののその程度はそれほど大きくないことが分かる。また、いず

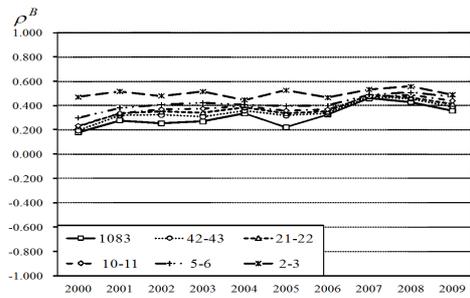


図 16 拡散項の銘柄間の相関の推移

Fig. 16 Correlation in diffusion component.

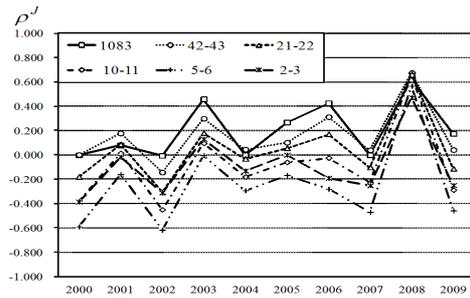


図 17 ジャンプ項の銘柄間の相関の推移

Fig. 17 Correlation in jump component.

れの市場環境であってもおしなべてポートフォリオの銘柄数が増加するに従って相関係数が低下し分散投資効果が現れることも確認される。これに対して、図 17 から、対数ジャンプ幅率の分散に内在する銘柄間の年ごとの相関係数は、銘柄数が 1083 の場合に注目すると、安定期においてはおおむね 0.4 以下となるのに対し、リーマンショックが発生した 2008 年には 0.7 に及ぶ水準にまで達していることが分かる。また、銘柄数が比較的少ない場合には、安定期において対数ジャンプ幅率の相関係数が負の値をとることが多いのに対して、混乱期には 0.5 程度まで急上昇することが確認される。このことから、混乱期においては図 15 で確認したように株式ポートフォリオに含まれる銘柄数にかかわらず対数ジャンプ幅率の標準偏差は高止まりすることが裏付けられる。また、対数ジャンプ幅率の相関係数は、拡散成分の相関係数と比較すると、時系列的に大きく変動することも分かる。

### 3.2.3 (分析対象 3) の分析結果と考察

株式ポートフォリオの銘柄数に応じて株式ポートフォリオリターン tails リスクへの中心極限定理的な作用の強さがどの程度で確認されるかを VaR の観点から検証し、前項までのパラメトリックな分析結果との対応付けを行う。

株式ポートフォリオリターンに正規分布を仮定して、構成銘柄数  $n$  と所与の信頼水準  $c\%$  に関して、 $VaR_{c,L}^n$  から期待リターン部分を除いた  $\alpha_c \hat{\sigma}_n$  の安定期と混乱期における値をそれぞれ図 18 と図 21 に示した。また、VaR の計測誤差となる  $\varepsilon_{c,n}$  についても安定期と混乱期における値をそれぞれ図 19 と図 22 に、VaR の計測誤差率として

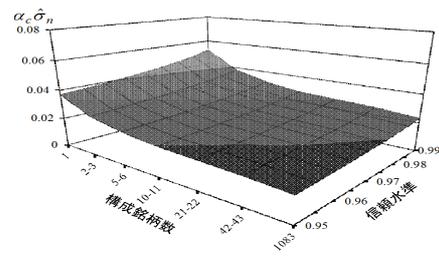


図 18  $\alpha_c \hat{\sigma}_n$  の推定値 (安定期)

Fig. 18 Estimated  $\alpha_c \hat{\sigma}_n$  (Stable market condition).

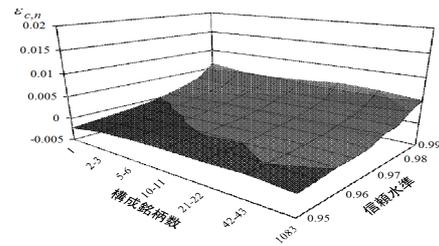


図 19  $\varepsilon_{c,n}$  の推定値 (安定期)

Fig. 19 Estimated  $\varepsilon_{c,n}$  (Stable market condition).

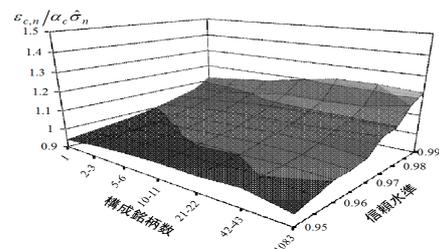


図 20  $\varepsilon_{c,n} / \alpha_c \hat{\sigma}_n$  の推定値 (安定期)

Fig. 20 Estimated  $\varepsilon_{c,n} / \alpha_c \hat{\sigma}_n$  (Stable market condition).

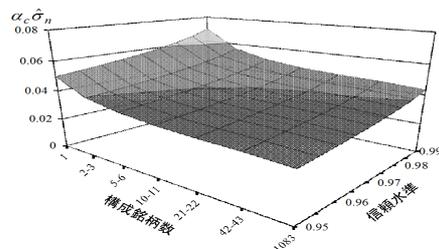


図 21  $\alpha_c \hat{\sigma}_n$  の推定値 (混乱期)

Fig. 21 Estimated  $\alpha_c \hat{\sigma}_n$  (Turbulent market condition).

$\varepsilon_{c,n} / \alpha_c \hat{\sigma}_n$  についても安定期と混乱期における値をそれぞれ図 20 と図 23 に示した。

図 18 と図 21 から、安定期と混乱期のいずれの時期であっても、株式ポートフォリオに含まれる銘柄数が少ないほど、信頼水準が高いほど、 $\alpha_c \hat{\sigma}_L$  が高くなることが確認できる。信頼水準が高いほど  $\alpha_c$  として大きな値が採用されるから  $\alpha_c \hat{\sigma}_L$  が高くなるのは自明であるが、銘柄数が少ないほど  $\alpha_c \hat{\sigma}_L$  が高くなることは、図 3、図 4、図 10、図 11 から確認したように、安定期と混乱期のいずれの時期においても、また、拡散成分のボラティリティ  $\sigma_{MJD}$  とジャンプ成分のボラティリティ  $\sigma_J$  のいずれの場合であっても、

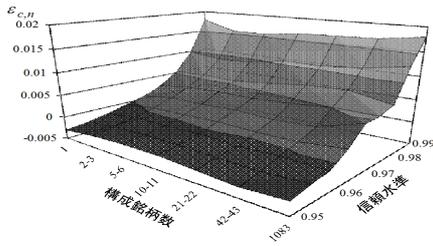


図 22  $\varepsilon_{c,n}$  の推定値 (混乱期)

Fig. 22 Estimated  $\varepsilon_{c,n}$  (Turbulent market condition).

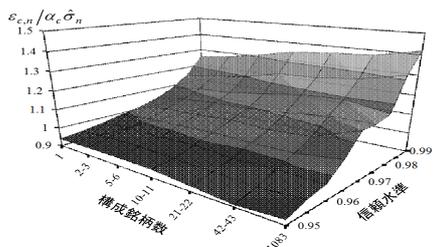


図 23  $\varepsilon_{c,n}/\alpha_c\hat{\sigma}_n$  の推定値 (混乱期)

Fig. 23 Estimated  $\varepsilon_{c,n}/\alpha_c\hat{\sigma}_n$  (Turbulent market condition).

株式ポートフォリオに含まれる銘柄数が少なくなるに従ってボラティリティ  $\sigma_{Total}$  が高くなることから裏付けられる。

興味深いのは、図 19 と図 22 に示した VaR の計測誤差である  $\varepsilon_{c,n}$  が安定期と混乱期を問わず銘柄数を増やしても縮小する傾向が確認できない点である。これは、図 5 や図 12 が示唆する、株式リターンの分散  $\sigma_{Total}^2$  に占めるジャンプ成分による分散  $\sigma_J^2$  の割合が、安定期には銘柄数が 1 から 1083 へと増加する際に 42%、混乱期に 15.9% と縮小し中心極限定理的な作用が相応に働く結果と相反するよう見える。ここで重要なことは、図 5 や図 12 においては 2 次のモーメントにおける中心極限定理的な作用の程度を把握しているのに対し、図 19 や図 22 では信頼水準が 95% 以上となるような分布のテイル部分における中心極限定理的な作用の程度を表している点である。図 19 と図 20 から安定期に関して VaR の計測誤差である  $\varepsilon_{c,n}$  と割合である  $\varepsilon_{c,n}/\alpha_c\hat{\sigma}_n$  を確認すると、いずれの信頼区間においても  $\pm 0.005$  以内におおむね収まり  $\alpha_c\hat{\sigma}_L$  対比で 1 割程度にとどまることから、株式ポートフォリオのリスク管理の観点からそれほど問題はない。しかしながら、図 22 と図 23 から混乱期に関しては信頼水準が 97% を超えると急増し信頼水準が 99% のところでは VaR の計測誤差は 0.015 を超え  $\alpha_c\hat{\sigma}_L$  対比で 4 割程度に及ぶことが確認され、株式ポートフォリオのリスク管理を VaR で行う際には保守的な運用が必要となることが示唆される。このように、2 次のモーメントにみられる中心極限定理的な作用とテイル部分における中心極限定理的な作用に違いが見られる理由は、図 6 や図 13 から確認したように株式ポートフォリオリターンのインテンシティ  $\lambda$  に関しては銘柄数が増加するに従って

低下し、2 次のモーメントを縮小させるのに貢献するが、図 8 や図 15 にある対数ジャンプ幅率のボラティリティ  $\delta$  は特に混乱期においてそれほど低下しない。このため、ひとたびジャンプが発生した際（その可能性は低くなってはいるが）には、ジャンプの大きさが小さくなっていないために正規分布で計測した信頼水準の閾値を超えやすくなることが考えられる。

#### 4. まとめと結語

本研究では、日本株式市場を対象に個別銘柄リターンや複数の個別銘柄から構成される株式ポートフォリオリターンをジャンプ拡散過程でモデル化したうえでパラメータ推定を行い、株式ポートフォリオに含まれる銘柄数の増加に従って中心極限定理的な作用からどの程度正規分布に近づくかについて VaR 計測をふまえて 3 つの観点から検証した。

第 1 に、株式ポートフォリオを構成する銘柄数とモデルパラメータの観点からは、市場環境にかかわらず拡散項とジャンプ項のボラティリティが構成銘柄数の増加にともなって縮小することが確認された。しかしながら、混乱期においては株式ポートフォリオの構成銘柄を増加させてもジャンプした際のジャンプ幅率のボラティリティの縮小がそれほどみられないことが確認できた。

第 2 に、拡散成分とジャンプ成分の個別銘柄間の相関の観点からは、拡散成分の相関係数は銘柄数の増加にともない低下すること、また、市場環境に依存せずおおむね一定で推移していることが確認された。その一方で、ジャンプ成分の相関係数は、リーマンブラザーズ証券破綻直後のような市場全体への強いショックがあった場合には銘柄数によらず大きな正の値をとること、また、市場環境に応じて時系列的に相応に変動することが確認された。

第 3 に、株式ポートフォリオを構成する銘柄数とテイルリスクの観点からは、安定期では 99% のような厳しい信頼水準であっても計測誤差がおおむね VaR の 1 割程度であるが、混乱期では計測誤差が VaR の 4 割程度に及ぶことが観測された。この理由として、株式ポートフォリオリターンのインテンシティに関しては銘柄数が増加するに従って低下し、2 次のモーメントを縮小させるのに貢献するが、対数ジャンプ幅率のボラティリティは特に混乱期においてそれほど低下せず、ジャンプが発生した際には正規分布で計測した信頼水準の閾値を超えやすくなることが分かった。

謝辞 初稿における不十分な表現を指摘したうえで、改善の方向性を示す貴重なコメントをくださった 2 人の匿名査読者の方々には、この場をかりて心から感謝いたします。なお、本研究は、科研費 (22510143) の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] Bansal, R. and Shaliastovich, I.: Learning and Asset-price Jumps, *The Review of Financial Studies*, Vol.24, pp.2738-2780 (2011).
- [2] Barndorff-Neilsen, O.E. and Shephard, N.: Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps (with discussion), *Journal of Financial Econometrics*, Vol.2, pp.1-48 (2004).
- [3] Barndorff-Neilsen, O.E. and Shephard, N.: Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation, *Journal of Financial Econometrics*, Vol.4, pp.41-30 (2006).
- [4] Black, F. and Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol.81, pp.637-654 (1973).
- [5] Cont, R. and Tankov, P.: *Financial Modeling with Jump Processes*, CHAPMAN & HALL/CRC (2004).
- [6] Craine, R., Lochstoer, L.A. and Syrtveit, K.: Estimation of a Stochastic-Volatility Jump-Diffusion Model, *Revista de Analisis Economico*, Vol.15, pp.61-87 (2000).
- [7] Duffie, D. and Pan, J.: Analytical Value-at-risk with Jumps and Credit Risk, *Finance Stochastics*, Vol.5, pp.155-180 (2001).
- [8] Fama, E.F.: Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis, *Journal of Business*, Vol.36, pp.420-429 (1963).
- [9] Gibson, M.S.: Incorporating Event Risk into Value-at-Risk, *FEDS Discussion Paper*, No.2001-17 (2001).
- [10] Guan, L.K., Xiaoqing, L. and Chong, T.K.: Asymptotic Dynamics and Value-at-risk of Large Diversified Portfolios in a Jump-diffusion Market, *Quantitative Finance*, Vol.4, No.2, pp.129-139 (2004).
- [11] Lee, S. and Mykland, P.A.: Jump in Financial Markets: A New Nonparametric Test and Jump Dynamics, *Review of Financial Studies*, Vol.21, pp.2535-2563 (2008).
- [12] Mandelbrot, B.: The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business*, Vol.36, pp.394-419 (1963).
- [13] Merton, R.C.: Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous, *Journal of Financial Economics*, Vol.3, pp.125-144 (1976).
- [14] Shreve, S.E.: *Stochastic Calculus for Finance II Continuous-Time Models*, Springer Finance Text book (2004).
- [15] 佐々木豊史, 宮崎浩一: “伝染” 或いは “除外”? 日本株式市場におけるバッドニュースの影響, 電気通信大学紀要, Vol.17(1/2), pp.21-32 (2005).
- [16] 佐々木豊史, 宮崎浩一, 野村哲史: 観測数および銘柄数に依存した VaR の推定誤差に関する実証分析, オペレーションズ・リサーチ, Vol.50, pp.277-284 (2005).
- [17] 佐々木豊史, 宮崎浩一, 野村哲史: Edgeworth 展開に基づくオプション評価—原資産収益率が Merton の Jump-Diffusion モデルに従う場合, 応用統計学, Vol.32, No.2, pp.113-128 (2006).
- [18] 田中健太郎, 宮崎浩一, 岡本雅生: オプションモデル価格の市場価格や実現株価との整合性に関する検証, オペレーションズ・リサーチ, Vol.54, pp.485-494 (2009).
- [19] 久田祥史: ジャンプ拡散過程を用いたオプション価格付けモデルについて, *IMES Discussion Paper Series*, No.2002-J-26 (2002).
- [20] 宮崎浩一: オプション市場分析への招待, 朝倉書店 (2009).

付 録

A.1 Merton [13] のジャンプ拡散モデルにおける株価の確率密度関数

まず, 式 (1) の両辺に  $S_t$  を掛け合わせる.

$$dS_t = (\mu_{MJD} - \lambda\beta) S_t dt + \sigma_{MJD} S_t dW_t + (Y - 1) S_t dN_t \quad (A.1)$$

$X(t)$  を一次元のジャンプを含む伊藤過程とし,  $f(t, x)$  を偏導関数  $f_t, f_x, f_{xx}$  が定義可能でかつ連続な関数としたとき, 伊藤公式は式 (A.2) である\*7.

$$\begin{aligned} & f(t, X(t)) \\ &= f(0, X(0)) + \int_0^t f_u(u, X(u)) du \\ & \quad + \int_0^t f_x(u, X(u)) dX_c(u) \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(u, X(u)) dX_c(u) dX_c(u) \\ & \quad + \sum_{0 < u \leq t} [f(u, X(u)) - f(u-, X(u-))] \end{aligned} \quad (A.2)$$

ここで  $dX^c(u)$  は確率過程  $dX(t)$  の連続部分であり,  $f(u, X(u)) - f(u-, X(u-))$  は  $X(t)$  が時刻  $u$  で  $X(u) - X(u-)$  だけジャンプした場合の  $f(t, x)$  の変化量を示す.

本研究で用いる株価の従う確率過程 (式 (A.1)) は一次元のジャンプを含む伊藤過程であり, その連続部分  $dS_t^c$  は式 (A.3) で与えられる. また, ジャンプサイズは  $(Y - 1) S_t$  である.

$$dS_t^c = (\mu_{MJD} - \lambda\beta) S_t dt + \sigma_{MJD} S_t dW_t \quad (A.3)$$

ここで  $f(t, S_t) = \ln S_t$  とし, 伊藤公式 (式 (A.2)) を適用し微分形で表示すれば, 式 (A.4) を得る.

$$\begin{aligned} & d \ln S_t \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + f_s(t, S(t)) \\ & \quad \{(\mu_{MJD} - \lambda\beta) S_t dt + \sigma_{MJD} S_t dW_t\} \\ & \quad + \frac{1}{2} f_{ss}(t, S(t)) \\ & \quad \{(\mu_{MJD} - \lambda\beta) S_t dt + \sigma_{MJD} S_t dW_t\}^2 \\ & \quad + (\ln Y S_t - \ln S_t) \end{aligned} \quad (A.4)$$

また,  $(dt)^2 = 0, dt dW_t = 0, (dW_t)^2 = dt$  であることを考慮して式 (A.4) をまとめると,

\*7 一次元のジャンプを含む確率過程の伊藤公式に関しては宮崎 [20], および Shreve [14] が詳しい.

$$d \ln S_t = \left( \mu_{MJD} - \lambda\beta - \frac{1}{2}\sigma_{MJD}^2 \right) dt + \sigma_{MJD} dW_t + \ln Y \quad (\text{A.5})$$

となり、これを  $[t, t+1]$  での積分形で表示すると式 (A.6) が得られる。

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} d \ln S_t &= \int_t^{t+1} \left( \mu_{MJD} - \lambda\beta - \frac{1}{2}\sigma_{MJD}^2 \right) du \\ &\quad + \int_t^{t+1} \sigma_{MJD} dW_u + \sum_{k=1}^{N_{t+1}-N_t} \ln Y_k \\ \Leftrightarrow \ln S_{t+1} - \ln S_t &= \mu_{MJD} - \lambda\beta - \frac{1}{2}\sigma_{MJD}^2 \\ &\quad + \sigma_{MJD}(W_{t+1} - W_t) + \sum_{k=1}^{N_{t+1}-N_t} \ln Y_k \\ \Leftrightarrow \ln S_{t+1} &= \ln S_t + \mu_{MJD} - \lambda\beta - \frac{1}{2}\sigma_{MJD}^2 \\ &\quad + \sigma_{MJD}(W_{t+1} - W_t) + \sum_{k=1}^{N_{t+1}-N_t} \ln Y_k \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

ここで  $\ln Y \sim N(\mu_J, \delta^2)$  であるため、対数株価  $X_{t+1} = \ln S_{t+1}$  は単位時間あたりに  $k$  回ジャンプが発生したという条件の下で、

$$\begin{aligned} X_{t+1} | N_{t+1} - N_t = k \\ \sim N(\ln S_t + \psi + k\mu_J, \sigma_{MJD}^2 + k\delta^2) \end{aligned}$$

となる。また、単位時間に  $k$  回ジャンプが発生する確率は、

$$\Pr(N_{t+1} - N_t = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

である。そのため、対数株価の確率密度関数はこれらを用いて式 (A.7) として記述できる。

$$\begin{aligned} f(x) \\ = \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \exp\left(-\frac{(x - \ln S_t - \psi - k\mu_J)^2}{2(\sigma_{MJD}^2 + k\delta^2)}\right)}{k! \sqrt{2\pi(\sigma_{MJD}^2 + k\delta^2)}} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

また、株価  $S_{t+1}$  の確率密度関数は  $dx/ds = 1/s$  ( $> 0$ ) であることから、式 (A.7) より式 (A.8) となる。

$$\begin{aligned} g_{MJD}(S_{t+1} | \theta) \\ = \frac{f(\ln S_{t+1})}{S_{t+1}} \\ = \frac{\exp(-\lambda)}{S_{t+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \exp\left(-\frac{(\ln S_{t+1} - \ln S_t - \psi - k\mu_J)^2}{2(\sigma_{MJD}^2 + k\delta^2)}\right)}{k! \sqrt{2\pi(\sigma_{MJD}^2 + k\delta^2)}} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

## A.2 ジャンプ検出結果の比較

本研究ではジャンプを検出する際に、Barndorff-Neilsen ら [2], [3] などで用いられている Bipower-variation に基づ

く検定統計量ではなく、Realized-variation と拡散項に関する分散との差に着目した相対ジャンプ測度  $RJ_T$  がある閾値 (7.5%を採用) を上回るかを判断基準としている。ここでは、相対ジャンプ測度  $RJ_T$  でのジャンプ検出結果と Barndorff-Neilsen らの提案するジャンプ検出結果との比較をする。

Realized-variation は式 (A.9) のように連続的な変動に起因する分散の累積とジャンプ変動の累積との足しあわせである。一方、Bipower-variation は式 (A.10) で定義され、連続型で表現すると式 (A.11) のように記述される。

$$\lim_{M \rightarrow \infty} RV_T = \int_{T-1}^T \sigma^2(s) ds + \sum_{j=1}^{N_T} k_{T,j}^2 \quad (\text{A.9})$$

$$BPV_T = \frac{\pi}{2} \left( \frac{M}{M-1} \right) \sum_{j=2}^M |R_{T,j-1}| |R_{T,j}| \quad (\text{A.10})$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} BPV_T = \int_{T-1}^T \sigma^2(s) ds \quad (\text{A.11})$$

ここで  $\sigma(s)$  は拡散変動の連続ボラティリティ、 $k_{T,j}$  はジャンプ変動の大きさ、 $N_T$  はサンプル期間内でのジャンプ変動の回数を示している。

Barndorff-Neilsen ら [2], [3] では、ジャンプ変動を含む Realized-variation とジャンプ変動を含まない Bipower-variation との差に着目すればジャンプ変動をとらえることができるという考えに基づいて、この差を Tripower-quarticity (式 (A.12)) で除することにより  $t$  分布に従う検定統計量  $z_T$  (式 (A.13)) を導いている。

$$\begin{aligned} TP_T &= \left( \frac{M^2}{M-2} \right) \left( E \left( |N(0,1)|^{\frac{4}{3}} \right) \right)^{-3} \\ &\quad \sum_{j=3}^M |R_{T,j-2}|^{\frac{4}{3}} |R_{T,j-1}|^{\frac{4}{3}} |R_{T,j}|^{\frac{4}{3}} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$z_T = \frac{RV_T - BPV_T}{\sqrt{\left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 + \pi - 5 \right) \frac{1}{M} TP_T}} \quad (\text{A.13})$$

図 A.1 と図 A.2 は、TOPIX を対象とした際に Barndorff-Neilsen らのジャンプ検出手法によりジャンプが検出された期間 (2003年7月から2004年6月) とジャンプが検出されなかった期間 (2008年7月から2009年6月) のリターン推移を示している。ここで、点線は  $\mu \pm 1.96\sigma(t)$  であり、黒のプロットが Barndorff-Neilsen らのジャンプ検出手法によりジャンプを含むと判断されたリターンを示している。図 A.1 と図 A.2 より、ジャンプが検出された期間では相対的に小さなレンジ  $\mu \pm 1.96\sigma(t)$  を超えたりターンをジャンプを含むリターンとして検出しているが、ジャンプが検出されなかった期間では 0.1 を超える大きなリターンであっても、相対的に大きなレンジ  $\mu \pm 1.96\sigma(t)$  を超えないため、ジャンプを含むリターンが1つも検出されていない。このように、Barndorff-Neilsen らのジャンプ検出手法ではニュース発生時のリターンの大きな変動が

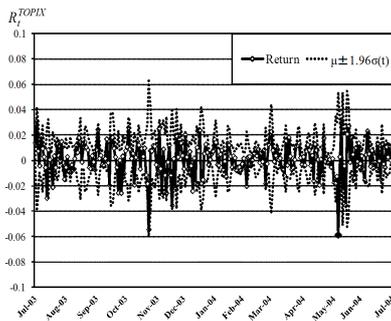


図 A-1 TOPIX リターンとスポット・ボラティリティ (ジャンプが検出された期間; 2003年7月から2004年6月)

Fig. A-1 TOPIX return and spot volatility (Jump is detected for the period from July 2003 to June 2004).

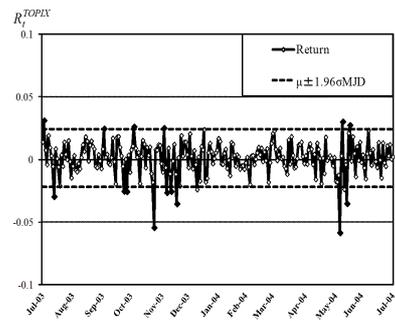


図 A-3 TOPIX リターンと拡散項のボラティリティ (2003年7月から2004年6月)

Fig. A-3 TOPIX return and constant volatility (From July 2003 to June 2004).

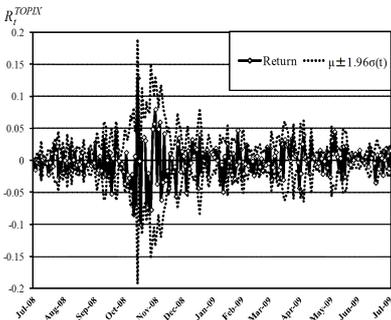


図 A-2 TOPIX リターンとスポット・ボラティリティ (ジャンプが検出されなかった期間; 2008年7月から2009年6月)

Fig. A-2 TOPIX return and spot volatility (Jump is not detected for the period from July 2008 to June 2009).

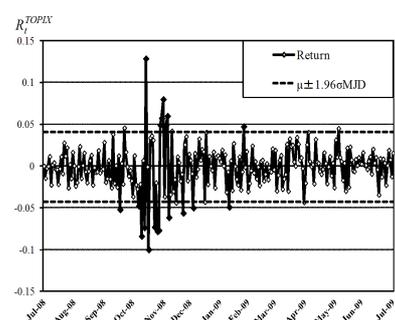


図 A-4 TOPIX リターンと拡散項のボラティリティ (2008年7月から2009年6月)

Fig. A-4 TOPIX return and constant volatility (From July 2008 to June 2009).

ジャンプではなく確率ボラティリティの増大と見なされるため、ジャンプが検出されにくい。これに対して、本研究では拡散係数を定数としたモデル化により検証を行っているため、ジャンプ拡散モデルとの対応付けを重要視して相対ジャンプ測度  $R_{JT}$  に基づくジャンプ検出を行っている。ここで問題となるのは、相対ジャンプ測度  $R_{JT}$  がどの程度の水準を超えていれば、対象としているリターンセットの中にジャンプを含むリターンが存在すると判断すべきかといった点であるが、本研究では、Bansalら [1] における米国株式市場での平均的な相対ジャンプ度の水準を参考に7.5%とした。Barndorff-Neilsenら [2], [3] のジャンプ検出手法による結果と比較するために、図 A-1 と図 A-2 と同じ期間における TOPIX リターンの推移を、点線を  $\mu \pm 1.96\sigma_{MJD}$  に、黒のプロットを閾値に7.5%を採用した相対ジャンプ測度  $R_{JT}$  によりジャンプを含むと判断されたリターンとして、図 A-3 と図 A-4 に示した。図 A-3 と図 A-4 から、Barndorff-Neilsenらのジャンプ検出手法ではジャンプを含むリターンとされなかったリターンのいくつか (ジャンプを含むものとされたリターンの数が2003年から2004年の期間では14個、2008年から2009年の期間では19個) がジャンプを含むものとして検出されていることが確認できる。また、それらのすべてが  $\mu \pm 1.96\sigma_{MJD}$

を超えるものであることを考慮すれば、閾値に7.5%を採用した相対ジャンプ測度  $R_{JT}$  によるジャンプ検出手法は、Barndorff-Neilsenら [2], [3] のジャンプ検出手法と比較して、本研究で行う拡散係数を定数としたモデル化による検証を想定したジャンプ検出手法に適しているものであることが確認できる。

### A.3 ジャンプ拡散モデルと拡散モデルの尤度比検定とAIC

本研究では株式ポートフォリオを構成する銘柄数の増加にともなって働く中心極限定理的な作用によりリターンのジャンプ成分がどの程度縮小するのかを確認することを目的として、すべての個別銘柄リターン、株式ポートフォリオリターンにジャンプ拡散モデルを適用し、そのパラメータ水準の比較を行っている。しかしながら、中心極限定理的な作用が働き株式ポートフォリオリターンの従う分布が正規分布に近づくことを想定した検証を行うのであれば、そもそもジャンプのない ( $\lambda = 0$ ) の拡散モデルが棄却されるのかどうかを確認する必要がある。そこで、実証分析に際し、ジャンプ拡散モデルの対数尤度と拡散モデルの対数尤度の違いを検討するため、尤度比検定を行ったところ、すべての個別銘柄リターン、株式ポートフォリオ

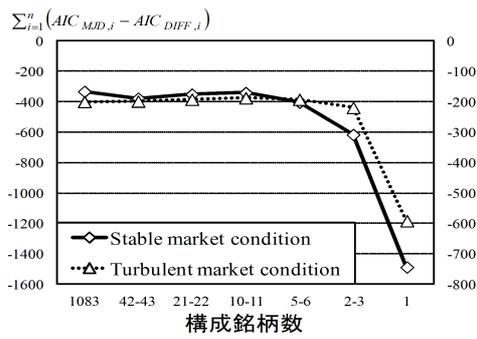


図 A.5 ジャンプ拡散モデルの AIC と拡散モデルの AIC の差  
 Fig. A.5 The differences in AIC between jump diffusion model and diffusion model.

ターンにおいて拡散モデルが棄却された。このことは、たとえ全個別銘柄で構成される株式ポートフォリオのリターンであってもジャンプ拡散モデルの方が拡散モデルよりも説明力が高く ( $\lambda \neq 0$  であり), Guan ら [10] のモデルのようにシステムティックなジャンプ成分が残ることを示している。

より詳細にみると、株式ポートフォリオの構成銘柄数とジャンプ拡散モデルの  $AIC_{MJD}$  と拡散モデルの  $AIC_{DIFF}$  の差の平均  $\sum_{i=1}^n (AIC_{MJD,i} - AIC_{DIFF,i})$  (図 A.5 (左縦軸が安定期の、右縦軸が混乱期の AIC の差を示している)) に着目すると、安定期と混乱期ともに構成銘柄数が増加するに従って、ジャンプ拡散モデルと拡散モデルの AIC の差が小さくなる傾向がみてとれる。これはリターンの従う過程が構成銘柄数の増加にともなって単純な拡散過程に近づいていることを示している。また、その傾向は銘柄数が 1 から 5 または 6 の間で顕著であることから、この部分でジャンプ成分のネットオフ (中心極限定理的な作用の働き) が強く確認できる。



竹俣 潤

昭和 63 年生。平成 23 年電気通信大学電気通信学部システム工学科卒業。平成 25 年同大学大学院博士前期課程修了。現在に至る。



宮崎 浩一

昭和 42 年生。平成 12 年筑波大学大学院経営・政策研究科博士課程修了。博士 (経営学)。電気通信大学電気通信学部システム工学科専任講師等を経て、平成 23 年電気通信大学大学院情報理工学研究科教授、現在に至る。