

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} 2x_3 + \quad \quad \quad 22x_4 = \quad \quad \quad 1y_1 + 377777 \quad 777737 \quad y_2 + y_3 \\ 6x_3 + \quad \quad \quad 74x_4 = \quad \quad \quad 2y_1 + 377777 \quad 777736 \quad y_2 + y_4 \end{array} \right. \\
 \text{第 3 段} & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + \quad \quad \quad 11x_4 = 177777 \quad 777761 \quad y_1 + 377777 \quad 777740 \quad y_2 + 177777 \quad 777761 \quad y_3 \\ x_2 + \quad \quad \quad 30x_4 = \quad \quad \quad 6y_1 + 377777 \quad 777731 \quad y_2 + \quad \quad \quad 3y_3 \\ x_3 + 377777 \quad 777707 \quad x_4 = 177777 \quad 777755 \quad y_1 + \quad \quad \quad 6y_2 + 177777 \quad 777756 \quad y_3 \\ \quad \quad \quad 6x_4 = 377777 \quad 777740 \quad y_1 + \quad \quad \quad 3y_2 + 377777 \quad 777736 \quad y_3 + y_4 \end{array} \right. \\
 \text{第 4 段} & \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 052525 \quad 252520 \quad y_1 + 177777 \quad 777761 \quad y_2 + 177777 \quad 777760 \quad y_3 + 325252 \quad 525221 \quad y_4 \\ x_2 = \quad \quad \quad 12y_1 + 377777 \quad 777715 \quad y_2 + \quad \quad \quad 17y_3 + 377777 \quad 777735 \quad y_4 \\ (\text{結果}) \quad x_3 = 325252 \quad 525211 \quad y_1 + \quad \quad \quad 23y_2 + 177777 \quad 777741 \quad y_3 + 252525 \quad 252505 \quad y_4 \\ \quad \quad \quad x_4 = \quad \quad \quad 2y_1 + 177777 \quad 777753 \quad y_2 + \quad \quad \quad 5y_3 + 177777 \quad 777757 \quad y_4 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$J \equiv 1.1.2.6. \equiv 14^2$$

$$A_{ik} \equiv J \cdot (a^{-1})_{ik} \equiv \begin{pmatrix} 170 & 377777 \quad 777361 & 264 & 377777 \quad 777661 \\ 377777 \quad 777603 & 344 & 377777 \quad 777447 & 64 \\ 30 & 377777 \quad 777637 & 74 & 377777 \quad 777717 \\ 377777 \quad 777737 & 6 & 377777 \quad 777733 & 2 \end{pmatrix}$$

(以上 8 進法)

これを 10 進になおし、正負の符号も正しくつけると

$$(a^{-1}) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 120 & -240 & 180 & -48 \\ -94 & 228 & -186 & 52 \\ 24 & -66 & 60 & -18 \\ -2 & 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

ディジタル計算機によるある制御系の準最適自動設計*

泥 堂 多 積** 伊 藤 正 美** 乗 松 立 木**

1. 緒 言

一般に複雑な系においては、その特性に影響を与えるパラメータの数が多く、しかも各パラメータが互にからみ合って系の特性を左右していることが多い。このような系を設計するに当って、最適なパラメータの組合せを求めることはかなり困難なことである。したがって設計は多くの場合、特性が仕様におさまるようなパラメータの組合せを試行錯誤法的に見出すのが限度で、よりよい特性を与えるパラメータの値をさらに追求することは、時間的にも経済的にも許されない

場合が少なくなかった。

近年、高速度・大容量のディジタル計算機の出現によって、複雑な系の最適設計も可能となつて、これに関する文献もかなり発表されている。

筆者等の研究室で現在ある種の自動制御系について研究中であり、これに用いる補償回路の設計にディジタル計算機を使用し、系がある程度以上よい特性を示す補償回路のパラメータの組合せを自動的に求めた。その設計法と実施経験を主としてここに報告する。設計についての考え方、得られた結果の詳細と検討などについては他誌に報告する^{1),2)}。なお、この設計法は単に Machine system の設計のみならず、Man-machine system の設計あるいは Decision making などにも適用できるものと考えられる。

* Design Synthesis Optimization of A Feedback Control System Using Digital Computer, by T. Deido, M. Ito and T. Norimatsu (Electrotechnical Laboratory)

** 電気試験所

2. 設計の対象

零非正則制御系と呼ばれるフィードバック制御系においては、ループ・ゲインを大きくすると系が不安定になり、また第2図に示す逆応答現象を呈する³⁾。このような系でも制御性に対する要求が比較的ゆるやかな場合は、簡単な補償回路を用いることにより十分実用可能である^{2), 4)}。

そこで制御対象の伝達関数が

$$G(s) = \frac{-K(s-\alpha)}{(s+1)(s+2)} \quad (1)$$

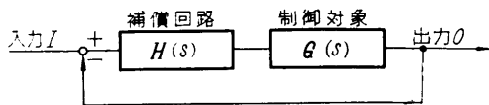
ただし、 $\alpha > 0$ 、 s は Laplace 変

換の複素パラメータ

であって、これに

$$H(s) = \frac{1}{k} \cdot \frac{s+kc}{s+c} \cdot \frac{s+d}{s+md} \quad (2)$$

なる形の伝達関数を有する補償回路を用いた第1図に示す形の制御系に矩形入力印が加されたとき、ある程度以上よい出力応答を示すような補償回路のパラメータを求めることを問題とした。



第1図 ブロック線図

この系の特性方程式は四次方程式となり、これを

$$s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0 \quad (3)$$

と表す。ここで係数 a_3, a_2, a_1, a_0 はいずれも $\alpha, d, m, k, E (\equiv K/k)$ および c の関数である。そして矩形入力に対する応答、すなわちインデシャル応答 $O(t)$ は

(a) (3) 式が不等実根 $(-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, -\alpha_4)$ を有する場合

$$O(t) = A_1 + B_1e^{-\alpha_1 t} + C_1e^{-\alpha_2 t} + D_1e^{-\alpha_3 t} + F_1e^{-\alpha_4 t} \quad (4)$$

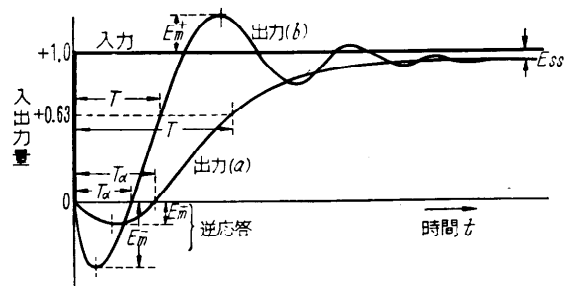
となり、応答曲線は第2図(a)のような形を示し、

(b) (3) 式が複素根 $(-\beta \pm j\gamma)$ と実根 $(-\alpha_1, -\alpha_2)$ とを有する場合。

$$O(t) = A_2 + B_2e^{-\alpha_1 t} + C_2e^{-\alpha_2 t} + Re^{-\beta t} \cos \gamma t - Xe^{-\beta t} \sin \gamma t \quad (5)$$

となり、応答曲線は第2図(b)曲線のような形を呈する。(4),(5)式における各係数 A, B, C, D, F, R および X は系の各パラメータならびに(3)式の根に関する関数であり、 t は時間である。

この系の制御性のよさの尺度として、応答波形に関し次の諸量を定義する。(第2図参照)



第2図 入出力曲線

Undershoot の最大値 E_m^- : 逆応答の最大値

むだ時間 T_d : 入力印加時 ($t=0$) から 逆応答終了までの時間

時定数 T : $t=0$ から 応答がはじめて入力の 63% に達するまでの時間

Overshoot の最大値 E_m^+ : 行きすぎ量の最大値

定常偏差 E_{ss} : $t=\infty$ における入出力量の差、

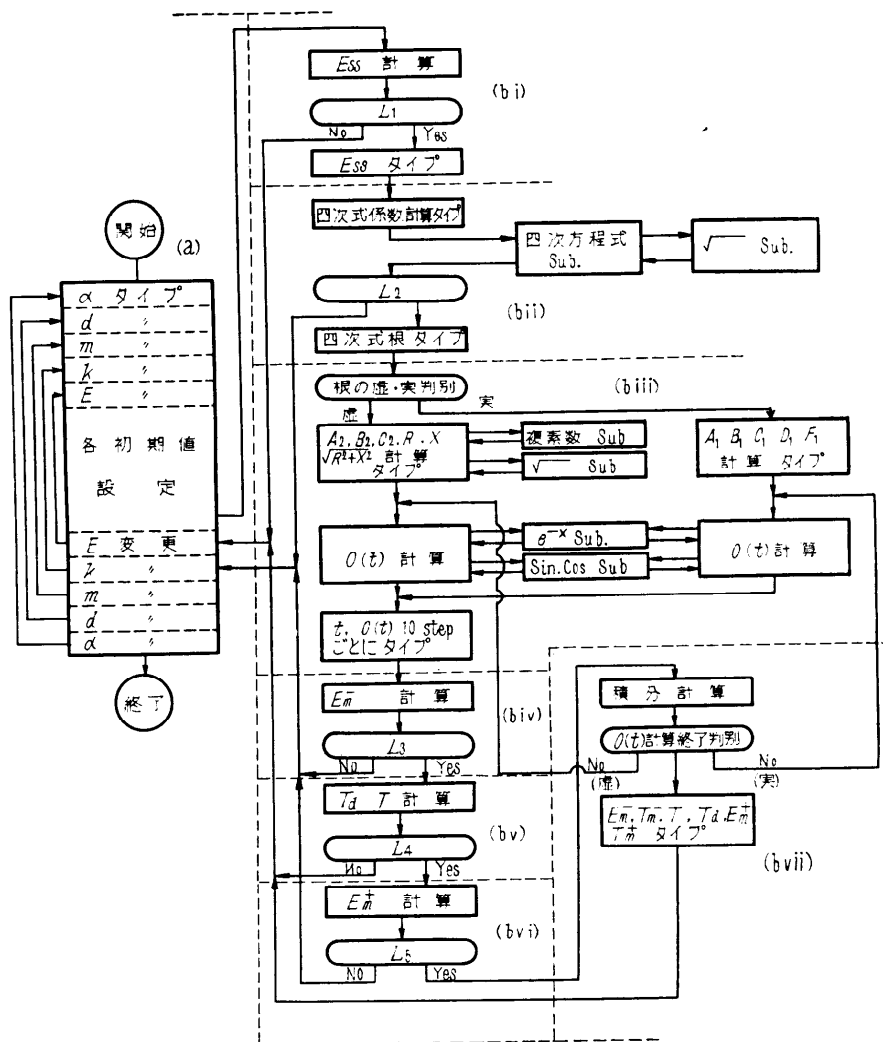
$$E_{ss} = \frac{2m}{kaE + 2m} \quad (6)$$

と与えられる。

3. 設計の基本方針

前項で定義した制御量のよさを示す各量はいずれも小さい方がよいが、実際にこの系を使用する場合、その使用条件によって、ある量はかなり小さくしなければならないが、その他の量はある程度大きくても差支えないことが多い。一般にある系に対する良否の定義は、その系のおかれる環境によって変る。したがってあらゆる制限条件を考慮して、最適のものを一挙に計算機によって求めることはほとんど不可能であり、また可能であるとしても設計の都度、計算機を使用することは得策でない。むしろ条件の数を最小限にし、それぞれの制限条件をある程度ゆるめにとって、全条件に合格するパラメータの組合せ、すなわち準最適領域を計算機によって求め、最終的決定は人間の高級な判断力にゆだねるやり方が最も合理的であり、かつ得られた結果に一般性があるものと考え³⁾、この方法すなわち“閾門通過法”を採用した。

なお、制御系のよさを示す一般的な尺度として提案されている、入出力差（この制御系は定常偏差があるので出力最終値と出力との差）の絶対値の積分値および自乗積分値



第3図 全フロー・チャート

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_0^{\infty} |I(t) - E_{ss} - O(t)| dt \\ S &= \int_0^{\infty} [I(t) - E_{ss} - O(t)]^2 dt \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$I(t)$: 入力

も参考のため、全合格条件を通過したパラメータ組合せに対して求めた。

また、各パラメータの組合せのとり方は、パラメータの数が比較的少なく、かつ物理的にとり得る領域が大体わかっているので、Factorial method⁶⁾ によった。

4. フロー・チャート

本計算全体のフロー・チャートを第3図に示し、各部分について簡単に説明する。

(a) パラメータ変更部

制御対象のパラメータ α ((1)式参照) が 0.5, 1.0, 2.0 の各場合について、補償回路の各パラメータ ((2)式参照) c, d, m, k, E ($\equiv K/k$) を次に示すあらゆる組合せにとって特性計算を行った。

$$c=0.01 \quad d=1, 2, 3$$

$$m=3, 6, 10 \quad k=50, 100, 200, 300$$

$E=0$ から(3)式の根または根の実数部が一つでも正となるまで*, 0.3 おき,

変更は α, d, m, k, E の順とした。

(b) 演算および判別部

(1) E_{ss} の計算と判別 L_1 (6)式により E_{ss} を計算し, これが前以て設定しておいた制限値 E_{ss0} より小なら合格として, E_{ss} をタイプして演算を続行, 不合格ならそのパラメータの組合せは捨て, パラメータ E 変更部へとぶ。

(2) 四次方程式の計算と判別 L_2 (3)式の係数を計算して四次方程式をとく (Newton 法によった), 実根および複素根の実数部が総て負なら全根をタイプして次の演算へ移る, もしこれらのうち一つでも負でなければ, このパラメータの組合せは捨てパラメータ k 変更部へとぶ。

(3) $O(t)$ 計算 (3)式に複素根を含むか否かによって, (4)または(5)式のいずれかを自動的にえらび, 応答曲線を計算してゆく, 時間 t のきざみ幅 h は 0.05 とし, 10 step ごとに $O(t)$ の値をタイプさせた。

(4) E_m^- の計算と判別 L_3 $O(t)$ が負のときのみこの部分を通り, E_m^- とその時間 T_m^- を求める, Undershoot が制限値 E_{m0}^- より大となれば $O(t)$ の計算は打ち切り, パラメータ k の変更部へとぶ**。

(5) T_d および T の計算と判別 L_4 (4)と同様 $O(t)$ を計算しながら T_d および T を求める, 判別は T によってのみ行い, T が制限値 T_0 より小なら合格として判別部分を短絡する, 不合格なら $O(t)$ 計算は打ち切り, パラメータの E 変更部へとぶ (付 3, 4 図参照)。

(6) E_m^+ の計算と判別 L_5 $O(t)$ が 1 以上となったときのみこの部分を通り, E_m^+ とその時間 T_m^+ を求める, Overshoot が制限値 E_{m0}^+ 以上となれば $O(t)$ の計算は打ち切りパラメータの k 変更部へとぶ** (付 3 図参照)。

(7) 積分値計算・ $O(t)$ 計算終了判別およびタイプ (7)式に示した A および S の逐次積分(Simpson の公式によった) 後, (3)式の根が総て実根のときは $O(t)$ が, また複素根を含むときは $O(t)$ の包絡線が $(I(t) - E_{ss})$ の 99.5% に達したか否かによって計算の終了を判定し, 終了なら E_m^+, T_m^+, T_d, T および

* この条件に合うと(4)または(6)式から系は不安定となる, また一旦この条件に合うと, 他のパラメータは固定し E のみをそれ以上増しても系は安定とならない。

** さらに E を大きくすると E_m^+ はなお大きくなる。

積分値 A, S (付録 1 参照) をタイプして, パラメータの E 変更部へとぶ, 未了なら再び(3)の $O(t)$ 計算部へもどる。(付 5 図参照)

5. 計 算

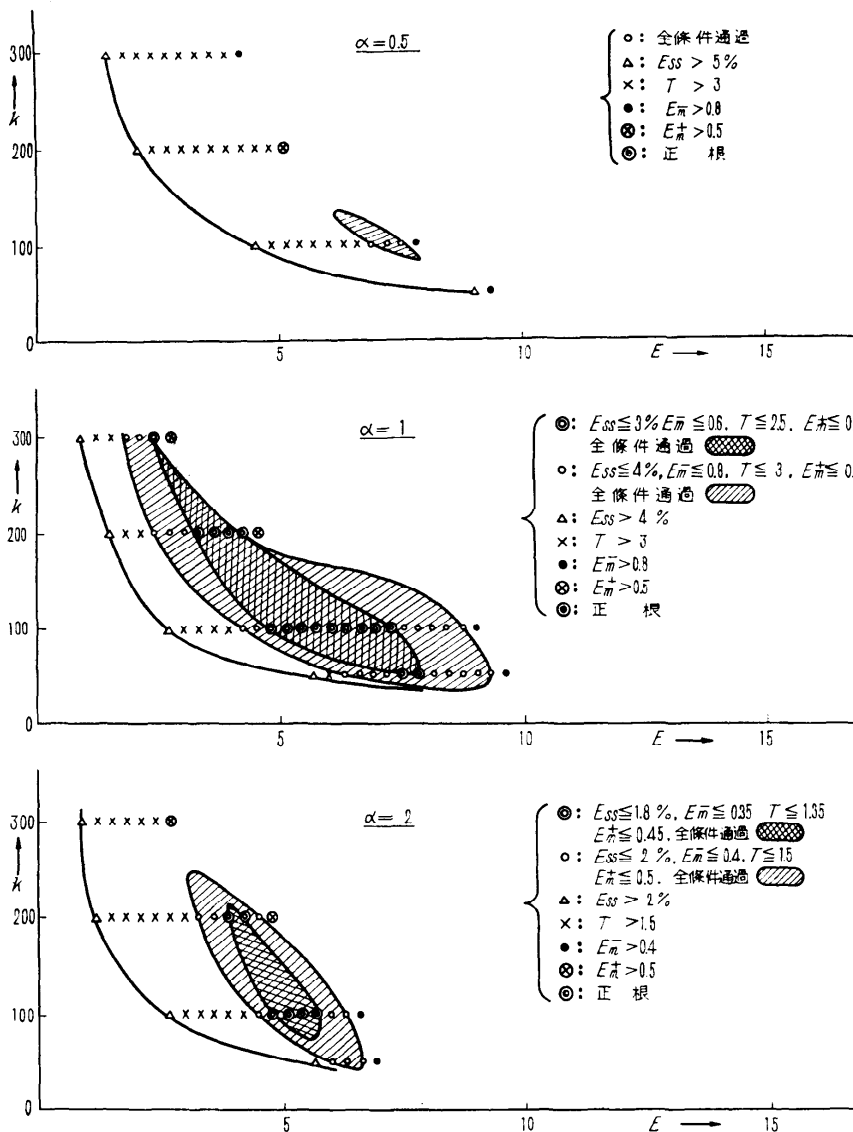
計算には最初電気試験所設置の ETL-Mark IVA を使用した, この場合演算には中央小数点の二重精度法を採用して scaling の問題を除いたが, そのため記憶容量が不足し, 計算を(3)式の根が総て実根である場合と複素根を含む場合の 2 回に分けた, 二重精度法のため演算時間はかなり長くなり (一つの四則演算が約 30 mS), また同機が改造直後であったため, 十分安定に動作しないこともあった, そこで浮動小数点演算が可能である日本電子工業振興協会設置の NEAC-2203 を借用した, これによる各プログラムの語数の概略を第 1 表に示す, NEAC-2203 はメモリ 1 語に 2

第 1 表 プログラムの語数 (概数)

プログラム	語数
パラメータ変更の初期値	140
E_{ss} 計算および L_1	25
四次式係数計算および L_2	80
四次方程式サブルーチン	200
$O(t)$ 計算 (実根用)	250
同上 (複素根用)	280
Sine, Cosine サブルーチン	120
e^{-x} サブルーチン	80
複素数演算サブルーチン	30
平方根サブルーチン	30
L_3, L_4, L_5	100
積分・計算終了・タイプ	210
合 計	1545

命令収容できるから, プログラム用メモリ総数は約 750, これに定数・パラメータおよび演算用一時メモリとして約 100, 総計 850 程度のメモリを使用した。

計算所要時間は NEAC-2203 の場合, 四次方程式 (係数計算も含め) が約 30 秒, E_{ss} および $O(t)$ の係数計算が約 30 秒, $O(t)$ と積分計算が毎 step 約 2 秒で, 一つのパラメータの組合せに対し平均 200 step とすると, 6.7 分, 合計 7.7 分となる (タイプ時間も含む), E が平均 10 個とれたものとする, パラメータの総組合せ数は $3(\alpha) \times 3(d) \times 3(m) \times 4(k) \times 10(E) = 1080$ となり, 総所要時間は 138 時間となる, 実際には $L_1 \sim L_5$ の制限条件によって演算途中で打ち切られたものも多数あり, 機械の故障・制限条件の修正による計算やり直しなどを機械使用時間から除いた止味所要時間は約 90 時間であった。

第4図 全条件合格パラメータの存在領域 ($d=3, m=6$)

得られた結果の一部を第4図に示す。図中斜線部分が総ての制限条件に合格したパラメータ領域である。

6. 検 討

この方法によって得られた結果は、設計に直接役立つとともに、この系の性質と補償効果の全貌がよくわかる。たとえば、制御対象のパラメータ α が小さい程補償しにくい。これは第4図の各合格領域を見ればわ

かるとおり、 $\alpha=0.5$ では、他の場合より各制限条件をゆるめているにもかかわらず、合格領域が非常に狭い。ここに一つの問題が出てくる。すなわち各制限条件の選び方で、あまりきびしすぎると合格するものがなくなってしまい、逆にゆるすぎると合格する量が多すぎて計算機使用時間は長くなり、得られた結果の整理・解釈がやり難くなる。また各制限条件間のバランスも問題である。

今回はまずこれらを適当にきめて計算を実施し、計算結果の状況をみてさらに調整した。この点については、機械に学習能力を与え、自動的に制限条件を修正するようなプログラムにすることも考えられる。

この種の問題を現在の国産機で行うと、上述のとおりかなりの時間を要し、経済的に引き合うか否かはいささか疑問である。計算機の演算速度よりプリンターの印字速度と信頼性の向上が望まれる。一方、計算機の利用者も計算時間の短縮のため、解析方法・数値計算法ならびにプログラムに十分検討を加えるべきである。筆者らもこれ以外の問題において、ちょっとした工夫の集積によって計算時間を 1/10 に短縮した経験もある。本計算においても、例えば(5)式において t が大きくなり、 $e^{-\beta t}$ を許容誤差上 0 とみて差支えなくなったときは、それ以後は $e^{-\beta t} = 0$ として $\cos \gamma t$, $\sin \gamma t$ の計算を省略することとした。

7. 結 言

以上、ディジタル計算機を用いて、零非正則制御系の補償回路をシンセシスする方法と実施経験について報告した。今後の計算機の進歩・普及によって、この種の問題にも広く活用されよう。この報告がその方面に多少とも参考となれば幸である。

最後に計算機使用の便を供された日本電子工業振興協会、種々お世話になった同協会計算機部各位ならびに当所 ETL-Mark IVA 関係者各位に深く謝意を表する次第である。

参 考 文 献

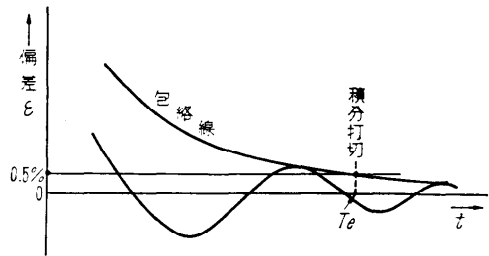
- 1) 乗松：自動制御における統計学的シンポジウム (1959) 及び自動制御研究集会資料 (120 回) p. 1 (1960.5)
- 2) 伊藤・乗松・泥堂：自動制御研究集会資料 (120 回) p. 7 (1960.5)
- 3) 乗松・茂木：自動制御 4, 1, p.5 (1957)
- 4) 乗松・伊藤：電試 23, 10, p.734 (1959)
- 5) 乗松：電気四学会連合大会論文集 No. 250 (昭35年7月)
- 6) S.H. Brooks: Operations Research Jul-Aug. p. 430 (1959)

付 録

[付録 1] 積分値誤差の検討

(7) 式に示した出力最終値と出力との差の積分値 A および S は $t=0$ から ∞ までの積分である。計算機では $t=0$ から逐次積分して最終出力 ($I(t)$ —

E_{ss}) と出力 $O(t)$ の差が入力 $I(t)$ の 0.5% 内に達したとき積分を打ち切って答とした (付 1 図参照)。その結果を A' , S' として真値 A , S との差を検討する。



付 1 図 偏差と包絡線

(4), (5) 式においては $A_1 = A_2 = E_{ss}$ であるから最終出力と出力との差を ε とすると、(4) 式については $\varepsilon = -[B_1 e^{-\alpha_1 t} + C_1 e^{-\alpha_2 t} + D_1 e^{-\alpha_3 t} + F_1 e^{-\alpha_4 t}]$ (付 1)
(5) 式については、
 $\varepsilon = -[B_2 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t} + e^{-\beta t} (R \cos \gamma t - X \sin \gamma t)]$ (付 2)

となる。

ところで積分打ち切り時 T_e のとき、特性根の絶対値 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta$ のうち大きいものの指数関数はほとんど 0 になっている。本計算の場合、係数 $B, C, D, \dots$ などの大きさを考慮しても、許容誤差内 (有動数字 4 桁にとった) では指数の絶対最小の項一つだけを考えれば十分であることが確かめられた。したがって ε が 0.5% 以下のときの積分値 $A_{0.5}, S_{0.5}$ は次の式から求められる。

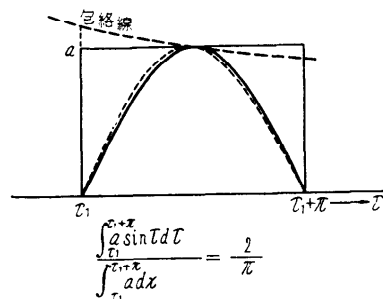
(1) T_e 以降の $O(t)$ が非振動的の場合

$$A_{0.5} = \int_0^{\infty} |0.005 e^{-\alpha t}| dt = 0.005 / \alpha$$

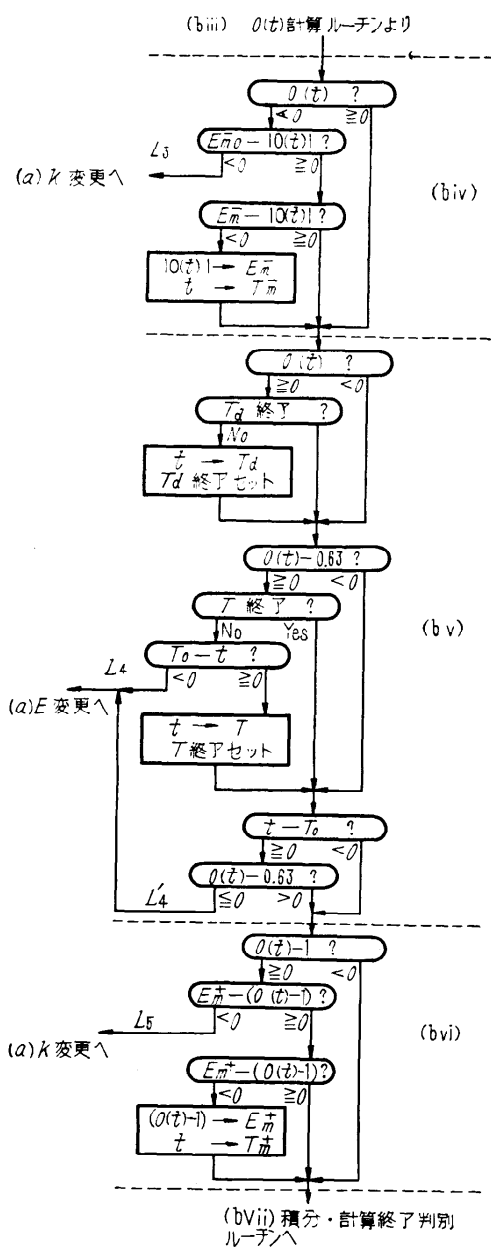
$$S_{0.5} = \int_0^{\infty} [0.005 e^{-\alpha t}]^2 dt = (0.005)^2 / 2 \alpha$$

(2) 振動的の場合

$A_{0.5}$ は解析的に求められないので付 2 図に示すと



付 2 図 矩形と正弦波形の面積比

付3図 $L_{3,4,5}$ ルーチンのフロー・チャート

おり近似的に求める。すなわち、振動の半サイクル間減衰がないものとして正弦波面積と包絡線下の面積(等価矩形で表す)の比が $2/\pi$ であることから

$$A_{0.5} \doteq \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} |0.005 e^{-\beta t}| dt = \frac{0.01}{\pi \beta}$$

を得る。また $S_{0.5}$ は解析的に

$$S_{0.5} = \int_0^{\infty} [0.005 e^{-\beta t} \sin(\gamma t + \theta)]^2 dt \\ = \frac{(0.005)^2}{4} \left[\frac{1}{\beta} - \frac{\beta \cos 2\theta - \gamma \sin 2\theta}{\beta^2 + \gamma^2} \right]$$

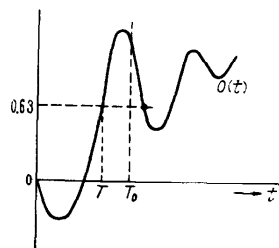
ただし θ は $t = T_e$ における位相角

以上により求まった修正量 $A_{0.5}, S_{0.5}$ を A', S' に加えれば真値 A, S が得られる。

本計算の場合、 $A_{0.5}$ は A の約 1% 以下、 $S_{0.5}$ は S の約 0.01% 以下となるので、求まった A', S' をそのまま真値とみて差支えないであろう。

〔付録 2〕 L_3, L_4, L_5 の詳細フロー・チャート

付3図に示す。同図における制限 L_4' は付4図に示すように時定数 T が T_0 以下で合格となっても、 T_0 以後再び出力 $O(t)$ が入力 $I(t)$ の 63% 以下になるものは不合格とするものである。



付4図 T_0 以後再び $O(t)$ が 0.63 以下になる場合の例

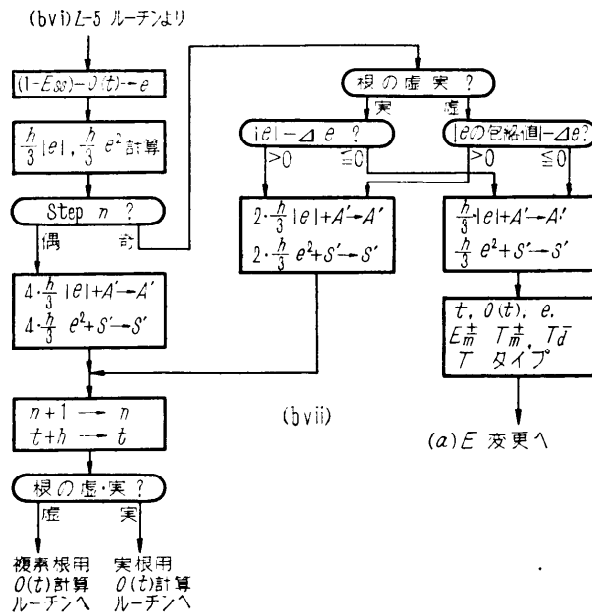
〔付録 3〕 積分・計算終了判別およびタイプ部の詳細フロー・チャート

付5図に示す。積分には Simpson の公式

$$\int_{t_0}^{t_0+n h} x dt = \frac{h}{3} [x_0 + 4 \sum_{i=1}^{n-1} (x_{n-1}) + 2 \sum_{i=2}^{n-2} (x_{n-2}) + x_n]$$

ただし n は偶数

を使用した。



付 5 図 積分・計算終了判別ルーチン