

- 16; March, 1960.
- 9) C. M. Melas: A New Group of Codes for Correction of Dependent Errors in Data Transmission, IBM Journal, 4, No. 1, p. 59, 1960.
 - 10) R. T. Chien: Group codes for Prescribed Error Patterns, IRE International Convention Record, Part 4, p. 125, 1960.
 - 11) M. J. E. Golay: Notes on Digital Coding, Proc. IRE, 37, No. 6, p. 657, 1949.
 - 12) 弥永昌吉, 杉浦光夫: 代数学 I ~ II, 岩波講座, 現代応用数学, (1957).
 - 13) B. Elspas: The Theory of Autonomous Linear Sequential Networks, Trans. IRE, PGC T-6, p. 45; March, 1959.
 - 14) R. W. March: Tables of Irreducible Polynomials over GF(2) Through Degree 19, National Security Agency; October, 1957.
 - 15) D. W. Hagelbarger: Recurrent Codes, BSTJ, 38, No. 4, p. 969, (1959).
 - 16) E. Prange: Cyclic Error-Correcting Codes in two Symbols, Air Force Cambridge Research Center, ASTIA Document No. AD 133749; September, 1957.
 - 17) E. Prange: Some Cyclic Error-Correcting Codes with Simple Decoding Algorithms, AF-CRC, ASTIA Document No. AD 152386; April, 1958.
 - 18) E. Prange: The Use of Coset Equivalence in the Analysis and Decoding of Group Codes, AF-CRC-TR-59-164; June, 1959.
 - 19) 嵩 忠雄: 独立でない誤を訂正するある組織符号系について, 情報処理, 第3号 (1960).

円試験による Runge-Kutta 法の誤差集積の研究*

乗 松 立 木** 泥 堂 多 積**

1. 緒 言

最近高速度全自動計数形電子計算機の実用化に伴ない, 常微分方程式を広範囲にわたって数値積分することが可能となった。この場合に「手計算」と比較すると問題にならないほど多数回の計算を行うので, その誤差の集積が問題となって来っており, これについての文献も最近現われている。

著者らも工学上の問題で, 非線形常微分方程式を Runge-Kutta 法により多数, 広変域にわたって計数形電子計算機を用いて数値積分を実施したが, 得られた結果の精度が不明確で, 結果の解釈に困惑した経験がある¹⁾。

周知のとおり, Runge-Kutta 法は常微分方程式を階差方程式で近似し, この階差方程式を利用して常微分方程式を近似的に積分するものである。したがって

当然積分間隔を有限値にとるため誤差 (打ち切り誤差) が発生する。この誤差は積分間隔を十分小にとれば無視し得る程度になるが, 一方一定の変域を積分するための計算回数がふえ, したがって取扱う数値を丸め (四捨五入) の操作回数もふえて, それに伴って丸め誤差が集積してくる。打ち切り誤差とその集積については常微分方程式が簡単な場合には, これを解析的に求めることが可能であるが, 丸めの誤差が介入してくる場合には, 問題が非常に複雑になり, 解析的な手法では到底処理できないものである。なお丸めの誤差がランダムに発生するものとして統計的に誤差限界を推定した論文もあるが²⁾, これは必ずしも実状にあっていないことはすでに文献³⁾に指摘されている。

以上の理由から, 常微分方程式を数値積分した場合の誤差に関する諸現象をつかむため, 解が解析的に求められる常微分方程式 $d^2y/dx^2 = -y$ を一つの代表例にとって電気試験所設置のトランジスタ計算機 ETL-Mark IVA (固定小数点, 7桁+符号) を用いて積分した。これはアナログ計算機の精度を試験するのにこの方程式が用いられていることと, 直接関連している

* Investigation of Error Accumulation in Runge-Kutta Integration Process, by Circle Test, by Tatsuki Norimatu and Tazumi Deido (Electrotechnical Laboratory)

** 電気試験所, 田無分室

ものである。

著者らは結果の一部を既に二、三発表したが、ここにとりまとめて報告する。なおこれと同様な研究を Gill の方法について松谷泰行氏（八幡製鉄）も実施され、報告⁵⁾されている。

2. 円 試 験

著者らは連立常微分方程式

$$dy/dx=z, \quad dz/dx=-y \quad (2.1)$$

を初期条件

$$x_0=0, y_0=0, z_0=0.1000000 \quad (2.2)$$

のもとで、 $x=0$ から 50 乃至 100 ラジアンにわたって積分した。その際の振幅および位相角誤差を y および z の誤差、 ε_y および ε_z を利用して次式から求めた。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &\approx \varepsilon_y \sin x + \varepsilon_z \cos x \\ r\varepsilon_\theta &\approx \varepsilon_y \cos x - \varepsilon_z \sin x \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_y &= y - 0.1 \sin x \\ \varepsilon_z &= z - 0.1 \cos x \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

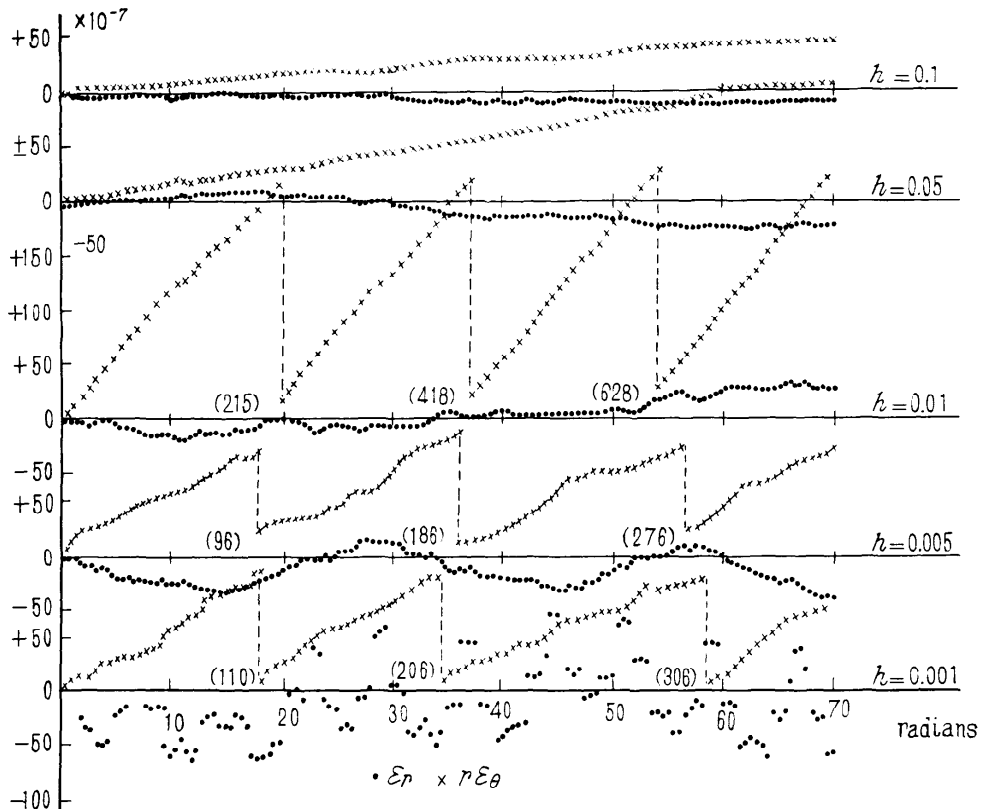
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= r - 0.1, \quad r = \sqrt{y^2 + z^2} \\ \varepsilon_\theta &= \theta - x, \quad \theta = \arctan(y/z) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

である。

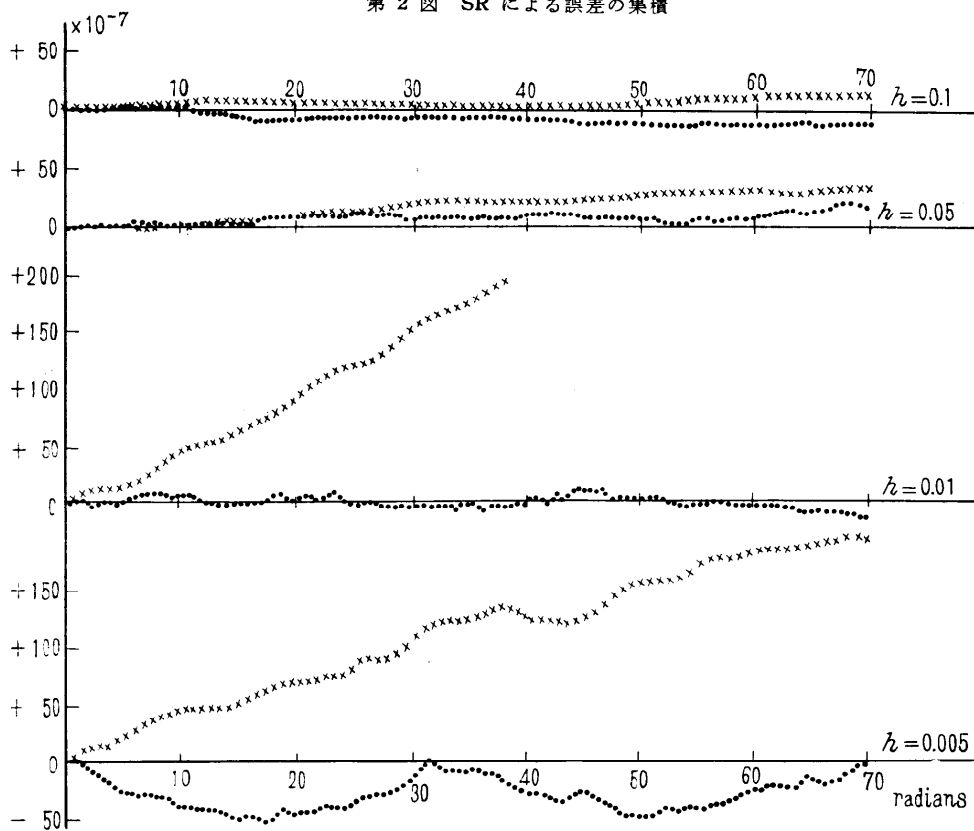
本論文で用いられた近似積分公式は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= h z_0 & l_1 &= -h y_0 \\ k_2 &= (h/2)(2z_0 + l_1) & l_2 &= -(h/2)(2y_0 + k_1) \\ k_3 &= (h/2)(2z_0 + l_2) & l_3 &= -(h/2)(2y_0 + k_2) \\ k_4 &= h(z_0 + l_3) & l_4 &= -h(y_0 + k_3) \\ \Delta y &= (1/6)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ \Delta z &= (1/6)(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

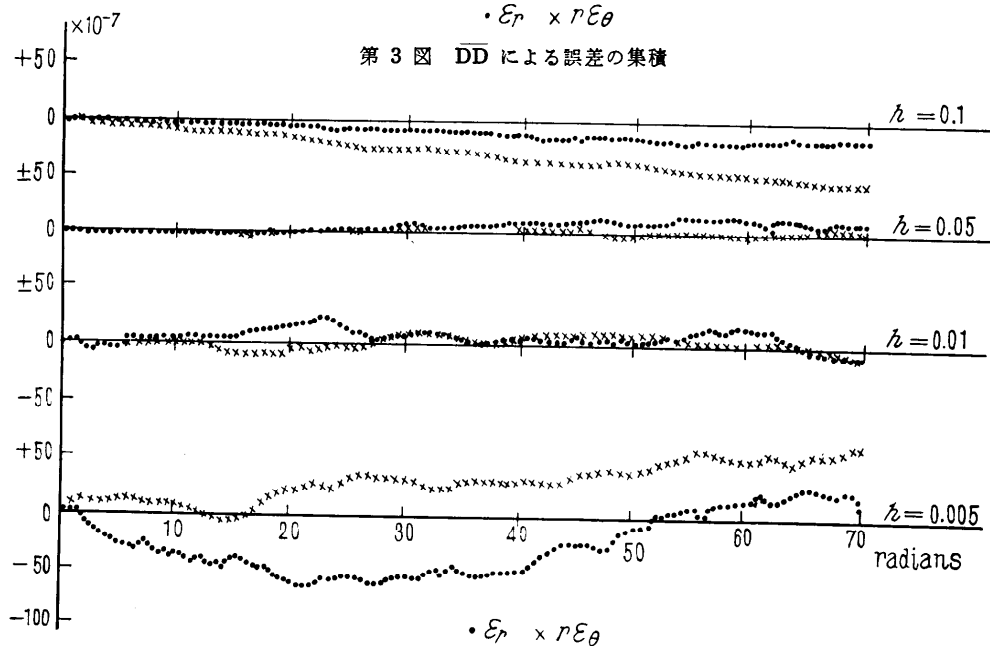
$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_1 &= z_0 & \bar{l}_1 &= -y_0 \\ \bar{k}_2 &= z_0 + (h/2)\bar{l}_1 & \bar{l}_2 &= -(y_0 + (h/2)\bar{k}_1) \\ \bar{k}_3 &= z_0 + (h/2)\bar{l}_2 & \bar{l}_3 &= -(y_0 + (h/2)\bar{k}_2) \\ \bar{k}_4 &= z_0 + h\bar{l}_3 & \bar{l}_4 &= -(y_0 + h\bar{k}_3) \\ \Delta y &= h \cdot \frac{1}{6} \cdot (\bar{k}_1 + 2\bar{k}_2 + 2\bar{k}_3 + \bar{k}_4) \\ \Delta z &= h \cdot \frac{1}{6} \cdot (\bar{l}_1 + 2\bar{l}_2 + 2\bar{l}_3 + \bar{l}_4) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$



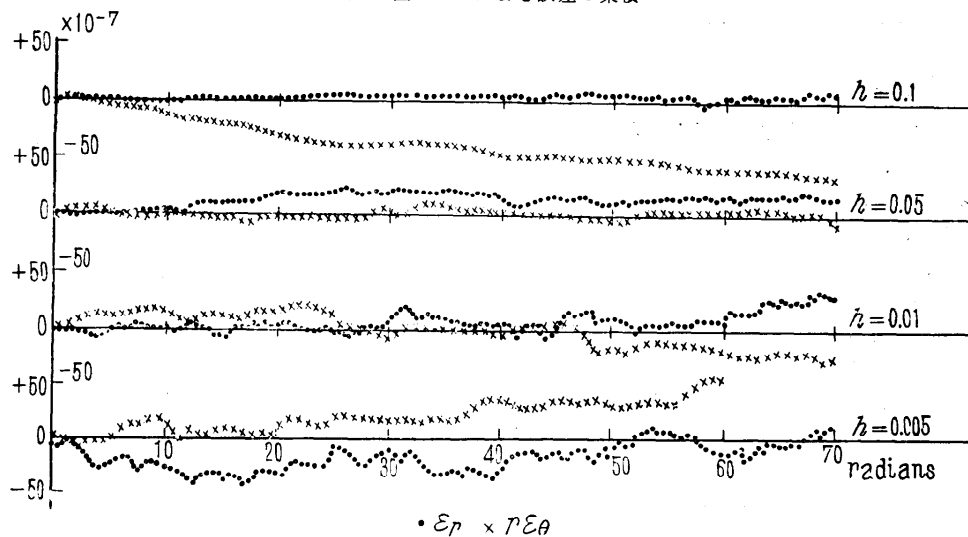
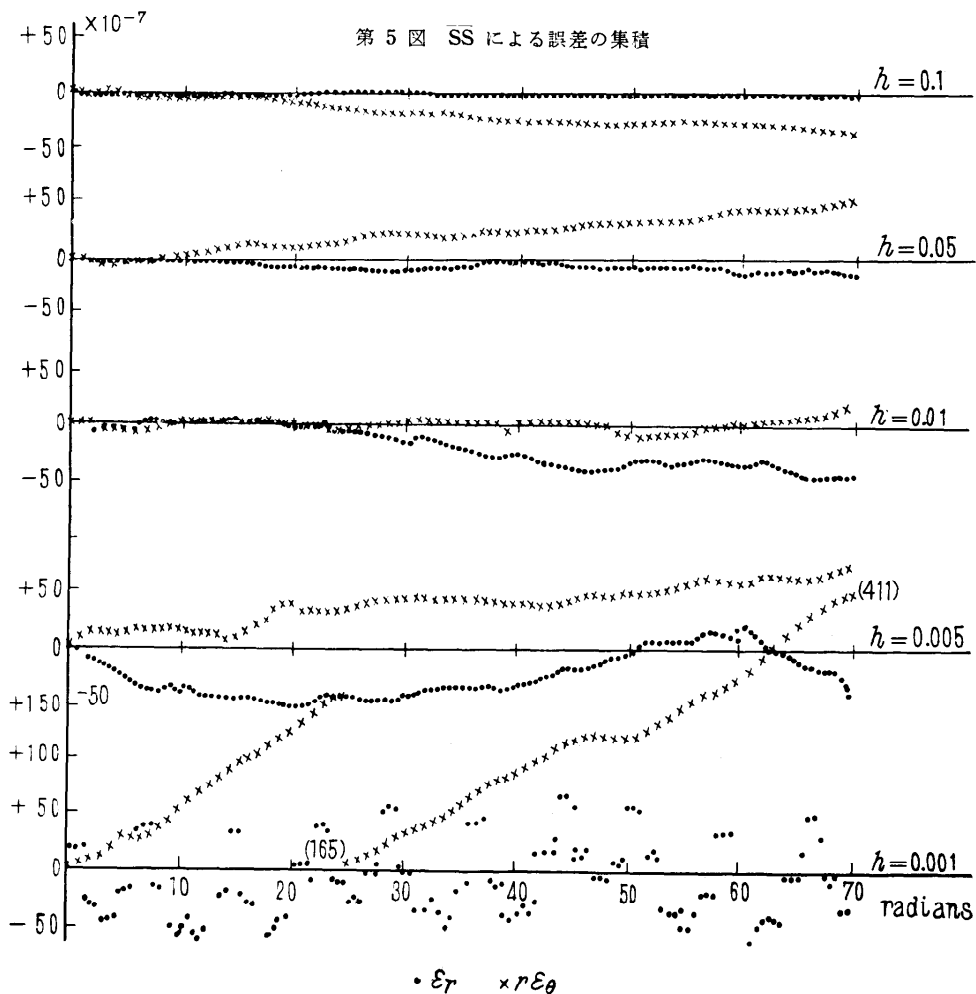
第 1 図 $\overline{SS}_7$ による誤差の集積

第2図 $\overline{SR}$ による誤差の集積

$$\cdot \varepsilon_r \times r \varepsilon_\theta$$

第3図 $\overline{DD}$ による誤差の集積

$$\cdot \varepsilon_r \times r \varepsilon_\theta$$

第 4 図 $\overline{RR}$ による誤差の集積第 5 図 $\overline{SS}$ による誤差の集積

なお $\sin x$ および $\cos x$ は $\pm 5 \times 10^{-9}$ 以内の誤差で、近似多項式によって機械の内部で産出された。

3. 実験結果

実験に用いた“計算手順”は第1表に示されているとおりである。同表に見られるとおり、ランダム丸めを行っているが、その要領は次のとおりである。

すなわち、7桁の乱数を Lehmer の方法によって発生させ、これを下部アキュムレータに加え、下部アキュムレータを切捨て、なお計算結果を通常0.5ラジアン置きに印字させた。

第1図乃至第5図は各種計算手順を使用した場合の結果の一部で、積分間隔 h ごとに図示しているものである。なおランダム丸めを使用している場合には同一の h に対し乱数の出発値を種々変えて、通常6回積分を行わせたが、同一の h に対して一例ずつの結果を図示した。それらの各積分はもちろん各個に少しずつ異っている。その状況は第6図に示しているとおりである。

第1表 計算手順

記号	計算式	h_i, l_i	1/6 およびその他	$\Delta y, \Delta z$
SS ₇	(2.6)	S.P.,* O.R.**	0.1666667	S.P. O.R.
SS ₈	(2.6)	S.P., O.R.	0.1666666	S.P. O.R.
SR	(2.6)	S.P., O.R.	R.R.†	S.P. O.R.
SD	(2.6)	S.P., O.R.	0.1666666 6666667	D.P. O.R.
DD	(2.6)	D.P.††, D.F.N†††	0.1666666 6666667	D.P. O.R.
RR	(2.6)	S.P., R.R.	R.R.	S.P. R.R.
SS	(2.7)	S.P., O.R.	計算式 ①	S.P. O.R.
SS _R	(2.7)	S.P., R.R.	計算式 ①	S.P. R.R.

* 半精度演算 ** 四捨五入

† ランダム丸め

†† 2重精度演算

††† 2重精度の数

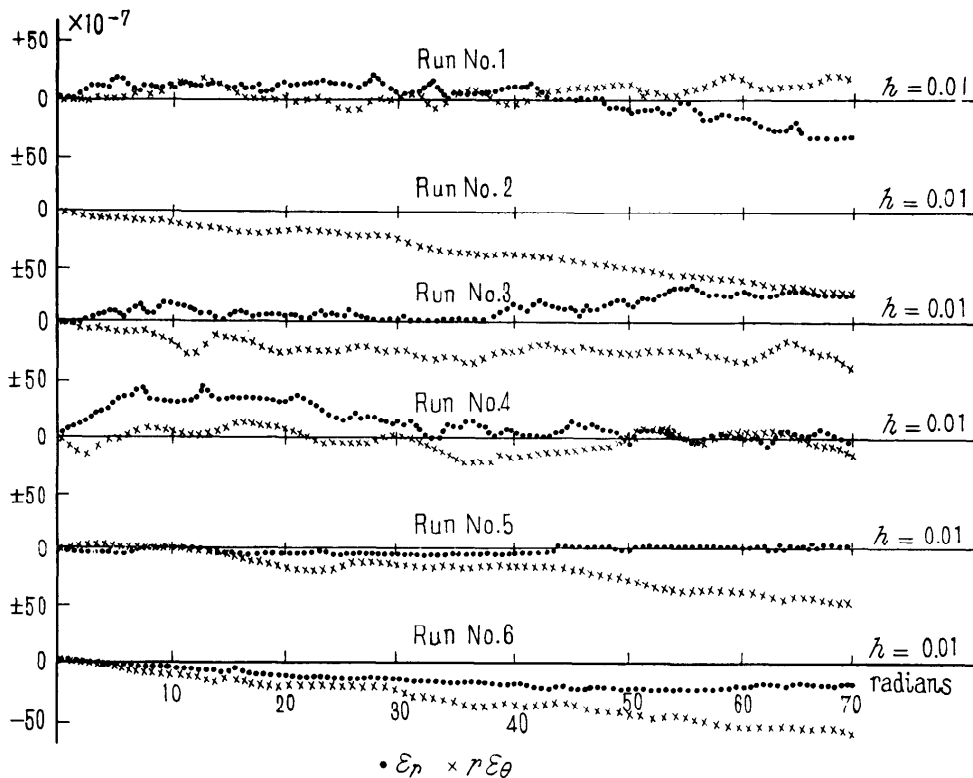
$$\textcircled{1} \Delta y = [0.1666667 \bar{h}_1 + 0.1666667 \bar{h}_4 + 0.3333333 \bar{h}_2 \\ + 0.3333333 \bar{h}_3] \times h$$

$$\Delta z = [0.1666667 \bar{l}_1 + 0.1666667 \bar{l}_4 + 0.3333333 \bar{l}_2 \\ + 0.3333333 \bar{l}_3] \times h$$

4. 検 討

(a) 打ち切り誤差 (第2表参照)

積分間隔 $h=0.25$ および 0.24 の場合の y および



第6図 SS_R, $h=0.01$ において乱数出発値を種々変えたときの誤差集積の比較

z の積分 1 段当りの打ち切り誤差の絶対値はそれぞれ $0.1 \times (0.25)^5/120$ および $0.1 \times (0.24)^5/120$ すなわち 8.14 および 6.63 単位 (一単位は 10^{-7}) 以下であり、丸め誤差 (0.5 単位) に比して非常に大きい。そうすると振幅および位相の打ち切り誤差 ε_r および $r\varepsilon_\theta$ (2.3) および付録 1 参照) は 50 ラジアン積分進行後に、-336, -1591 および -274, -1354 単位に集積する。これは実験値とよく合っている。

積分間隔 h が 0.05 より小さいときは打ち切り誤差は丸めの誤差に比して無視し得る程度に小さくなり、その集積誤差も同様である。

積分間隔 $h=0.1$ においては、 y および z の打ち切り誤差の絶対値は 0.08 単位であり、丸めの誤差に比してかなり小さい。しかし打ち切り誤差の集積は丸めのそれと同程度となる。

第 2 表 打ち切り誤差

h	積分 1 段当りの打ち切り誤差		50 ラジアン積分したときの打ち切り誤差集積	
	$\varepsilon_r (10^{-7})$	$r\varepsilon_\theta (10^{-7})$	$\varepsilon_r (10^{-7})$	$r\varepsilon_\theta (10^{-7})$
0.25	-1.68	-7.96	-336	-1591
0.24	-1.32	-6.50	-274	-1354
0.12	-2.07×10^{-2}	-2.06×10^{-1}	-8.6	-86
0.10	-0.69×10^{-2}	-8.30×10^{-2}	-3.5	-41.5
0.06	-0.32×10^{-3}	-6.48×10^{-3}	-0.27	-5.4
0.05	-0.11×10^{-3}	-2.59×10^{-3}	-0.11	-2.6
0.025	-0.17×10^{-5}	-8.12×10^{-6}	-0.34×10^{-2}	-0.16×10^{-1}
0.01	-0.70×10^{-8}	-0.83×10^{-6}	-0.35×10^{-4}	-0.42×10^{-2}

(b) 計算手順: SS_7 , SS_6 , SR, SD (第 1 表参照)

公式 (2.6) 中にある $1/6$ という数値の取扱い方において奇妙な現象が発見された。 $1/6$ を 0.1666667 と丸めると (SS_7)、位相誤差は正であった。すなわち四捨五入は位相進め作用をしているわけである (第 1 図参照)。 $1/6$ を 0.1666666 と切り捨てると (SS_6)、上記と逆となった。そこで著者らは $1/6$ をランダム丸めをしたところ (SR)、予期したとおり特に良好な結果が得られた (第 2 図参照)。ところが $1/6$ の代りに 0.1666666 6666667 を用いると (SD)、 SS_7 と全く同じ結果が得られた。これは予期と全く異っているので、プログラミング、テープ、操作および機械自身について誤りがないかを再三検査したが誤りを発見できなかった。

(c) 計算手順: DD, RR (第 1 表参照)

k_i および l_i の計算における丸めの誤差の影響をなくするために、 k_i , l_i について 2 重精度演算を行った。計算手順 DD においては、総ての中間演算は 2 重精度で行われた。したがって丸めの誤差は Δy および Δz を単精度の数に丸めるときに発生するのみである。したがって結果は特に良好であった (第 3 図参照)。DS と DD とほぼ同様であるが幾分精度の悪い結果を与えた。

なお、 k_i , l_i の演算における系統的丸めの誤差はランダム丸めを実行することによってもこれを取除くことができる。RR は SR および SS_7 に比して特に $h \leq 0.01$ において良好な結果を与えているが、これは前述の効果を示しているものである (第 4 図参照)。

(d) 計算手順: SS , $\overline{SS}_R$ (第 1 表)

公式 (2.7) を用いると k_i および l_i の取扱い中における丸めの誤差の影響を少にできる。したがって $\overline{SS}$ は $\overline{SS}_7$ に比し特別によい結果を与えている (第 5 図参照)。 $\overline{SS}_R$ は $\overline{SS}$ において Δy および Δz をランダム丸めしたものであって、さらに良い結果を与えている。

(e) (c) および (d) 項によると系統的丸めの誤差は Δy および Δz を丸めるときに発生するのみでなく、 k_i および l_i の取扱い中にも発生することがわかった。

(f) 丸め誤差の規則的集積

第 1 図乃至第 5 図を参照して、位相角誤差曲線は一般に直線と変動分とから成り立っているものと近似的にみなされる。また積分間隔 h が 0.01 より小さいときには、誤差曲線に解曲線の概分調波成分がみられる (特に振幅誤差曲線において)。

なお一つの積分間隔についての ε_y および ε_z が x および y に比例すると、位相誤差曲線が直線になることが簡単に証明される (付録 2 参照)。

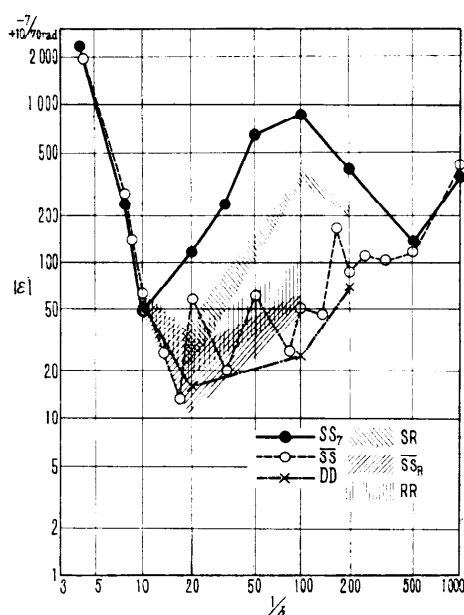
位相誤差曲線の直線部分と $1/h$ との関係をみると、計算手順 SS_7 においては、この関係は単純であって W に似た形の曲線となり、 $1/h \approx 20$ 乃至 100 および $1/h \approx 400$ 以上の領域において、誤差は $1/h$ に略々比例している。(A 4) 式を参照すると、これは丸めの誤差 $\varepsilon_{y'}$ および $\varepsilon_{z'}$ がこれらの領域内で特に規則的でそれらはそれぞれ x および y に比例していることを示している。

しかし計算手順 $\overline{SS}$ においては、この誤差 $1/h$ 曲線は複雑であるが、集積された誤差の大きさは、打ち切り誤差が特におきい場合および $h=0.001$ の場合を除

いて SS_7 よりも小さい。

(g) 各種計算手順の比較

著者らは $|\epsilon| \equiv \sqrt{\epsilon_r^2 + r^2 \epsilon_\theta^2}$ を誤差の尺度にとり、各種の手順間の誤差の比較を行った (第7図参照)。



第7図 各種手順における $|\epsilon|$ (70 rad. までの最大誤差)

計算手順 DD は非常によい結果を与えるが、プログラミングが複雑となるので一般に使用するのは不便であろう。SS はプログラミングが簡単であって、演算時間が短く、しかも良好な結果を与えるので、一般の使用に便利であろうと思われる。SS_R は SS よりも良い結果を与えるが、プログラムが複雑になる難点がある。

5. 結 言

(a) 著者らが提案した誤差評価の基準は、常微分方程式の数値解を求める方法それ自身およびそれに附随する計算手順、積分間隔の選定、丸めの処理の優劣良否を非常にはっきりと、かつ、わかりやすく表現できるので、便利なものであると思われる。

(b) これによって、Runge-Kutta 法による各種計算手順と積分間隔の選定による誤差の集積が非常に長い積分過程全般にわたって明瞭になり、実用に資するところが少なくないものと思われる。

(c) 計算手順 SS は他のものに比し、プログラム

が比較的簡単でしかも誤差の集積が少なく、 $1/h$ が 6~500 の広範囲にわたって、 $x=0$ 乃至 70 ラジアンにおいて、誤差の絶対値 $|\epsilon|$ が 200 単位を出ないことがわかった。

(d) 誤差の集積現象は非常に複雑で解析的方法では処理しがたいものと思われる。そこで著者らは、系統的にサンプルとなる適当な実験データを公表し、これらを整理した結果を見て、個々の具体的解の誤差の見当をつけるというのが実用的なアプローチであると考えている。

本論文はこの意味での一つのサンプル・データ群である。したがって他種のデータ群が公表されることが望まれる (例えば (5) のような)。

最後に当研究に多大な協力をいただいた電気試験所員寺田浩一郎氏、佐藤静子氏に深謝する次第である。

(昭和35年8月27日受付)

参考文献

- 1) 乗松, 泥堂, 茂木: 直流速度発電機の発生電圧に脈動がある場合の速度制御系の出力擾乱及び不安定領域について, 電試彙, 23 (1959) p. 689-708.
- 2) H. Rademacher: "On the Accumulation of Errors in Process of Integration on High-Speed Calculating Machines", Proceedings of a Symposium on Large-Scale Digital Calculating Machinery (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1948).
- 3) Harry D. Huskey, with an appendix by Douglas R. Hartree, "On the Precision of a Certain Procedure of Numerical Integration" Research Paper RP 1950, J.R.N.B.S., Vol. 42 (Jan. 1949) p. 57-62.
- 4) 乗松, 泥堂: Runge-Kutta 法により常微分方程式を数値微分した場合の誤差について, 昭和34年11月, 電気学会東京支部大会論文集 No. 2. 泥堂, 乗松: 同上, 「微分方程式の数値計算」予稿集 (数理学科総合研究第2, 3, 4班合同シンポジウム, 昭和35年4月8日). 泥堂, 乗松: 同上 II, 昭和35年7月電気4学会連合大会論文集, No. 11, その他.
- 5) 松谷泰行: Runge-Kutta-Gill および Runge-Kutta 法での $y'' = -y$ の計算について, 日科技連 C.P. 委員会資料 (昭和34年12月), その他.

附 録 1. 打ち切り誤差

y および z の一積分間隔ごとの打ち切り誤差は、簡単な計算によって次のとおりになる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{y^{i+1}} &= -\frac{h^5}{5!}z_i + \frac{h^6}{6!}y_i + \frac{h^7}{7!}z_i - \dots \\ \varepsilon_{z^{i+1}} &= +\frac{h^5}{5!}y_i + \frac{h^6}{6!}z_i - \frac{h^7}{7!}y_i - \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}\cdot 1)$$

(A・1) を (2・3) に代入し、次の関係

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad y_i \simeq r \sin x_i, \quad z_i \simeq r \cos x_i$$

を用いて整理すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_r \simeq & -\frac{h^6}{120} \left[\left(\frac{\sin h}{h} - \frac{\cos h}{6} \right) \right. \\ & \left. - \frac{h^2}{42} \left(\frac{\sin h}{h} \right) - \frac{\cos h}{8} + \dots \right] \quad (\text{A}\cdot 2) \end{aligned}$$

$$r\varepsilon_\theta \simeq -\frac{h^5}{120} \left(\cos h + \frac{h \sin h}{6} - \frac{h^2}{42} \cos h - \dots \right)$$

附 録 2. 丸めの誤差の規則的集積

打ち切り誤差が無視できるときには、次の階差方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta y &= z \Delta x + \varepsilon_y' \\ -\Delta z &= y \Delta x + \varepsilon_z' \end{aligned}$$

ここで ε_y' および ε_z' は丸めの誤差である ((2・1)

参照)。

次の関係

$$\varepsilon_y' = \delta_1 z, \quad \varepsilon_z' = \delta_2 y$$

が成立するとすれば、次の関係式が得られる。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = z \left(1 + \frac{\delta_1}{\Delta x} \right), \quad -\frac{\Delta z}{\Delta x} = y \left(1 + \frac{\delta_2}{\Delta x} \right)$$

したがって次の解が得られる。

$$y \simeq A \sin \left(1 + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2 \Delta x} \right) x$$

$$z \simeq A \cos \left(1 + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2 \Delta x} \right) x,$$

すなわち、 $\Delta x = h$ において

$$\left. \begin{aligned} r &\simeq A, \\ \theta &\simeq \left(1 + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2h} \right) x_0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}\cdot 3)$$

集積誤差は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &\simeq 0, \\ \varepsilon_\theta &\simeq \frac{\delta_1 + \delta_2}{2h} x_0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}\cdot 4)$$

電子計算機の配線に関する自動データ処理*

淵 一 博** 西 野 博 二**

1. はじめに

1 台の計算機を作り上げる過程に膨大な量のデータ処理が伴うことは、計算機製作を実地に経験した人すべてが痛感するところであろう。一方計算機自体に、そのようなデータ処理をもとり込む能力があるのは論をまたない。既にある計算機を利用できるとき、新しい計算機の製作に関するデータ処理をそれにまかせようとするのは極めて当然のなりゆきである。

電気試験所で現在調整中の ETL Mark 4 B¹⁾ の製作に当って、そのデータ処理の大きな部分を占める

“配線” 指令書の作製を ETL Mark 4 A に行わせる試みをしたので、その経験を報告する。それがますます広範囲な自動データ処理の発展にいささかなりとも役立てば幸いである。

2. 計算機製作におけるデータ処理

一つの製品を完成する過程には、研究、計画、設計に始まって、製作、検査に至るまで、極めて多種多様の作業が含まれている。実験的な小規模の製品の場合は、これらの作業を意識的に分析しなくても済むことも多い。しかし、電子計算機では試作の場合でも、作業を意識的に分析し、その上に立って作業手順を再構成しなければならないくらい大量な作業量があり、この中には幾多の情報処理過程が存在する。

* Automatic Data Processing in the Wiring of Digital Computers, by Kazuhiro Fuchi and Hiroji Nishino (Electrotechnical Laboratory, Tokyo)

** 電気試験所電子部