非同期式回路の理論（III）

（Muller と Bartky の論文*の解説）

木 村 泉**

10. Distributive な回路

束の一つの特別な場合が semi-modular な束であって，sm[u] 回路の $C[u]$ がこの semi-modular な束を形成していることは前回に述べたとおりである．だが実をいうと，この semi-modular な束は束としてそうポピュラーなものではない．せっかく semi-modular という制限を加えても，それだけをもとにしていえることがそう多くないからである．

ところで一方，semi-modular な束の特別な場合として **modular な束**が，さらにそのまた特別なものとして **distributive な束（分配束）**が知られているが，これら modular または distributive な束の方はすでによく研究されており，いろいろとおもしろい成果が得られている[1]†．

そこでいま，われわれの $C[u]$ に制限を加えて，たとえば modular であれ，という要請をおいてみたらどうなるであろうか．つまり，もとの回路から $C[u]$ を構成してみたとき，それが（順序関係 $\mathcal{F}$ のもとに）modular になってくれなかったら，そのような回路はうちすてて，はじめから考えないことにしたらどうなるか？ そこでまず

(10：1) Semi-modular な束 $C[u]$ が modular であるとは，$C[u]$ 内の任意の三つの状態 a, x, y に対し，もし $x \neq y$ であり，また a が x および y を cover しているならば，x, y がそれぞれ $x \frown y$ を cover していることである．

Modular な束の定義の仕方は他にもあるが，$C[u]$ にあてはめるにはこれが一番便利である．

ところで (10：1) を (7：14) と見くらべると，前者は後者に後者の双対 (dual) を追加したものであることがわかる．(7：14) が“一歩先まで責任をもつ”ものだったのに対して，これは“一歩手前にも責任をもつ”ものだといえる．そこでいかにも成り立ちそうに思われることは，

(10：2) p, q を $C[u]$ 内の二つの状態とするとき，$C[u]$ が modular ならば，$p \frown q = p \wedge q$．

であるが，これは実際成り立つのである．証明は省くが，ただ原著の証明では (7：13) が用いられていることを指摘しておく．($\frown$ は束論的な意味における下端，$\wedge$ は成分ごとにとった“小さい方”なのであった念のため)．

さて (10：2) から直ちにいえることは，

(10：A) もし $C[u]$ が modular なら，それは distributive である．

そもそも distributive な束とは，内部で公式：

$$a \frown (b \smile c) = (a \frown b) \smile (a \frown c)$$
$$a \smile (b \frown c) = (a \smile b) \frown (a \smile c)$$

が成り立っているような束のことであるが，(10：2) によって，$\smile$ と $\vee$ ばかりでなく，distributive な $C[u]$ に関するかぎり $\frown$ と $\wedge$ をも入れかえてよいのであるから，“大きい方”“小さい方”の定義からして，これは明らかなのである．

ところで前にも述べたように distributive な束はもともと modular な束の特別な場合なのだから，これで (10：1)→(10：2)→(10：A)→(10：1) という論理の輪ができて，これら三つの条件はみな同等であることが知れる．そこで，

(10：3) ある sm[u] 回路が，初期状態 u につき distributive であるとは，その回路の $C[u]$ が distributive な束をなすことである．

---

* D.E. Muller, W.S. Bartky: "A Theory of Asynchronous Circuits" I, II, III (Report Nos. 75, 78, 96; University of Illinois, Digital Computer Lab.)

** 東京大学理学部

† 参考書目は前回の末尾に掲載．

ということにして，これからこの **distributive な回路**を研究しよう，というのであるが，これは $C[u]$ 内で公式 $p\smile q=p\wedge q$ が成り立っているような回路を研究することだ，といいかえても全く同じことになるわけである．

なお，

(10：4) $C[u]$ は **descending chain condition** をみたす．

を確認しておこう．Descending chain condition とは，無限に長い descending chain が存在しないこと，つまり任意の x から出発して $\underset{\sim}{x}>\underset{\sim}{x}(1)>x(2)>$ ……というようなくさりを作ると，これはどこかでちょん切れてしまう，ということである．C- 状態が非負整数を成分とすることを思えば，これはあたりまえのことである．

ところで distributive で descending chain condition をみたす束には，すべての要素がそのうちの比較的少数の要素，すなわち **join-irreducible な要素**なるものの組み合わせによって完全に表現されてしまう，という性質がある（**Birkhoff の定理**[4]）．すなわち，

(10：5) $J[u]$ とは $C[u]$ の join-irreducible な要素の集合のことである．ただしある C- 状態 a が join-irreducible であるとは，もし $a=x\smile y$ とすると必ず $a=x$ または $a=y$ が成り立つことである．そのとき

(10：6) 束 $C[u]$ が distributive ならば，すべての C- 状態は $J[u]$ の要素から成る redundant でない組の上端として一意にあらわされる．

ただし（10：6）で redundant でない組といっているのは，組の中から要素を一つでも除外すると上端の値が変ってしまうような組のことである．

さて $J[u]$ の要素，すなわち join-irreducible な要素とは，具体的にはどんなものだろうか？ 定義によって，join-irreducible な要素とは，2本以上の道が入って来ないところ，つまりこの要素に cover される要素が二つ以上ないところ，ということである．（だから状態 0 は join-irreducible である．なにしろ1本も道が入って来ないのだから!!）前回の例（7：16）でいえば（同じく前回の第11図参照），0=(0,0,0) のほか，(1,0,0)，(1,1,0)，(1,0,1)，(2,1,1) 等は $J[u]$ に属するが，(1,1,1)，(2,2,2) 等はそうではない．

ところで $C[u]$ が distributive ならば，この join-irreducible な要素に，非常に見やすい意味をつけることができる．そのためにまず，**causation signal** なるものを定義する．すなわち，

(11：7) Causation signal $[\alpha, i]$ とは正の整数の順序づけられた組であって，$C[u]$ 内に $\underset{\sim}{a}_i=\alpha>0$ をみたすベクトル $\underset{\sim}{a}$ が存在するとき，そのときに限って，**存在する**といわれる．このとき，ベクトル $\underset{\sim}{a}$ は $[\alpha, i]$ を**導き出す**，という．また，

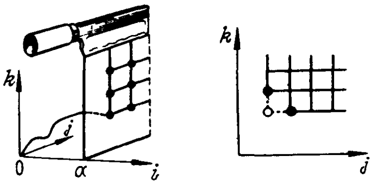
(11：8) 二つの causation signal $[\alpha, i]$，$[\beta, j]$ について，もし $C[u]$ 内のすべての $\underset{\sim}{a}_i\leq\alpha-1$ をみたす C- 状態 $\underset{\sim}{a}$ が，同時に必ず $a_j\leq\beta-1$ をもみたすならば，$[\alpha, i]$ は $[\beta, j]$ の**原因になる**，といい，これを $[\alpha, i]\leq[\beta, j]$ と書く．

直観的にいうと，$[\alpha, i]$ とは i 番目の node における α 番目の変化，ということである．そしてそれが“存在する”とは，そのような変化が，問題にしている回路で実際に起りうるということを意味する．そしてまた，$[\alpha, i]\leq[\beta, j]$ は，j 番目の node の β 回目の変化は，i 番目の node が α 回動いてからでなくては起らない，ということを示す．つまりこの関係式は，二つの変化の間の**因果関係**を示している．Causation signal，訳して因果信号，という名前の由来はここにある．

ところで重要なのは次の事実である．

(11：B) Distributive な $C[u]$（以下 D：$C[u]$ と書く）においては 0 でない join-irreducible な要素の集合が causation signal $[\alpha, i]$ の集合と isomorphic である．その際もし $[\alpha, i]$，$[\beta, j]$ がそれぞれ a，b に対応するものとすれば，$\underset{\sim}{a}\leq\underset{\sim}{b}$ となるための必要かつ十分な条件は $[\alpha, i]\leq[\beta, j]$ となることである．

まず対応のさせ方であるが，それにはまず $[\alpha, i]$ を導き出す C- 状態の全体を考える．つまり C- 状態をプロットした n 次元空間に，i 軸に垂直に i 軸上の点 α を切ってほうちょうを入れ，その切り口を考えるのである（**第16図**(a)）．するとこの切り口の上の状態



(a) (b)

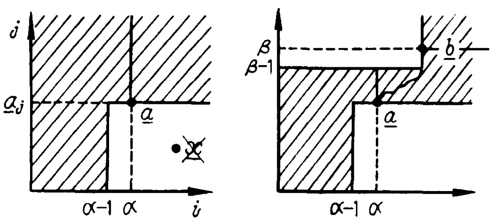
第 16 図

には minimal なものがある．ただの $C[u]$ だと，同図 (b) に実線と黒丸によって示されているように，この minimal な状態が二つ以上存在することもありうるが[†]，$C[u]$ が distributive であると，(10：2) によってこういう切り口は必ず凸になっているはずだから，点線をも含めた形になり，こういう状態は白丸で示されるように一つしかない．この minimal な状態，いわば node i の α 番目の変化に対する“**とっつき**” $\underline{a}$ を，$[\alpha, i]$ に対応させる．

するとこの $\underline{a}$ は join-ireducible である．$\underline{a}$ に来る道は，このほうちょうの刃にそったところにあるはずがない．とすれば，この面 ($n-1$ 次元の) に垂直に入って来るしかない．そういう道は１本しか考えられない．

もとよりこうしてえられる $\underline{a}$ が $\underline{0}$ であることはない．$\underline{a}$ が $[\alpha, i]$ を導き出しているのだから．

逆に任意の $\underline{0}$ でない join-irreducible な要素 $\underline{a}$ を考えよう．ここに入って来る道はたしかに１本あるが，２本以上はない．そこでこの道に垂直に，$\underline{a}$ にそって $C[u]$ にほうちょうを入れる．そのときできる切り口を見ると，１本しかない道が垂直に入って来ている以上，$\underline{a}$ はその面内での minimal な要素，つまりとっつきになっていないわけにはゆかない．これで望みの対応がついた．



(a) (b)

第 17 図

† このことの実例は，前回の第 15 図で $\underline{a}_8=1$ なる面を考えるとえられる．

そこで今度は順序関係の対応であるが，これは，定義から明らかなように，$[\alpha, i]$ に対応するとっつき $\underline{a}$ に対して，$\underline{x}_j<\underline{a}_j$ でしかも $\underline{x}_i>\alpha-1$ となるような $\underline{x}$ は存在しないから (**第 17 図** (a))，同図 (b) を見れば直観的に理解される．

D：$C[u]$ における causation signal の全体を $\sum[u]$ と書こう．すると Birkhoff の定理 (10：6) とたった今えられた定理 (11：B) を組み合わせて知れるように，D：$C[u]$ は，この $\sum[u]$ によって完全に代表されてしまうのである．ところで一般に $\sum[u]$ の要素の数は，D：$C[u]$ のそれにくらべて格段に小さいことが多い．くわしくいうと同時に起る parallel な変化の数を $\underline{r}$ とするとき，前者は $\underline{r}$ の程度，後者は 2^r の程度になる[††]．だから D：$C[u]$ の理論を $\sum[u]$ の理論として書きかえてしまえば，なにかと好都合であろう．そこでまず $\sum[u]$ のもっとも基本的な性質として，

(11：C) $\sum[u]$ は半順序集合をなし，また次の三つの条件をみたす．

(11：9a) $\sum[u]$ 内の任意の $[\alpha, i]$ に対し，$[\beta, j]<[\alpha, i]$ をみたす $[\beta, j]$ は $\sum[u]$ 内に有限個しかない．

(11：9b) $\sum(u)$ 内のすべての $[\alpha, i]$ に対して，一つの整数 n が存在して，$i\leq n$ が成り立つ．

(11：9c) $\sum[u]$ が $[\alpha, i]$ を含み，また $\alpha>1$ ならば，$[\alpha-1, i]$ もまた $\sum[u]$ 内に存在して，$[\alpha-1, i]<[\alpha, i]$ が成り立つ．

半順序集合をなすことは，$\sum[u]$ での $\leq$ が join-irreducible な要素の間の $\leq$ にうつし植えられることから明らかである．(11：9a) は (10：4) からの帰結である．(11：9b) は i が node の番号を表わすことから明らかであり，(11：9c) は i 番目の node が α 回動くためには，まずもって $\alpha-1$ 回動かなくてはならない，ということに他ならない．

(11：C) は trivial に見えるが，実はこれが $\sum[u]$ のもつ根本的な性質の一半を抽出したものであることが，12章で明らかにされる．もっともこの性質は，回

†† これを裏からいうと，もし parallel action が全然起らないなら，せっかく $\sum[u]$ の世界にうつっても一向とくにはならないということである．事実 totally sequential な回路の $C[u]$ は D：$C[u]$ だが，これを $\sum[u]$ にひきなおしても，減るのはただ１個，つまり $\underline{0}$ だけである．

路が cycling を起した場合に $\sum[u]$ 内に生ずべき周期性については何もいっていない．この方面での決定的要素の抽出は次章でおこなう．

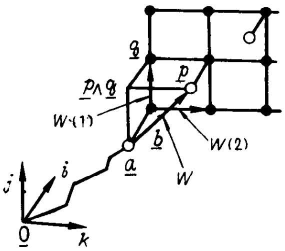
11. Distributive な回路の cycling

D : $C[u]$ 回路における cycling には，つぎのような著しい特徴がある．すなわち，

(11 : A)　AおよびBをある distributive な回路(以下 D : $C[u]$ 回路と呼ぶ）の二つの $A\mathcal{T}B$ をみたす equivalence set とすれば $W[A]\subseteq W[B]$.

これは A で起っていた素な cycling は，B でも存在するのみならず素である，ということ，いいかえれば，D : $C[u]$ 回路では，set から set へとうつりかわるときに，cycling のベクトルが割れることは決してない，ということである．

仮に D : $C[u]$ で cycling のベクトルの割れが起ったとしよう．そういう変化はもちろんどこか set から set への変り目で起るはずのものである．ところで set から set へ乗りうつるのは，もとの set で張られていなかった node がひとつ動いたときである．（定理(8 : F)．これは前回証明を省いたが，直観的にはほとんど明らかであろう）．いま$\underline{a}$から node i がひとつ動いてそれを cover する$\underline{b}$にうつりかわったときに，cycling のベクトルが割れて，w から $w(1)$ と $w(2)$ とになったとしよう（**第 18 図**）．白丸は $E[\underline{a}]$ の要素，黒丸は $E[\underline{b}]$ の要素を示す．ところで図のように $\underline{p}$, $\underline{q}$ をとると，この束は D : $C[u]$ だから，$\underline{p}\wedge\underline{q}$ もここに入っている．



第 18 図

ところで$\underline{a}$から$\underline{b}$を通って$\underline{q}$までの道をたどったとき，I- 状態における node i はどう変化するだろうか？　まず$\underline{a}$から$\underline{b}$にうつるときに一歩動くが，これは上るか下るか，どちらかであろう．そこからさき$\underline{q}$までは，$w(1)$ が i を張っていない以上，全く動かないであろう．一方同じく$\underline{a}$から $\underline{p}\wedge\underline{q}$ を通って$\underline{q}$へ行く道はどうであろう？　$\underline{a}\leq\underline{p}\wedge\underline{q}\leq\underline{q}$ であるからこういう道はたしかに存在するが，この際明らかに node iは，$\underline{p}\wedge\underline{q}$ までは止っており，そこから$\underline{q}$までに一歩動く．同じ $t(\underline{a})$ から出発して同じ $t(\underline{q})$ へ行くのであるから，このとき上るか下るかは，$\underline{a}$から$\underline{b}$へ行くとき上るか下るかに一致する筈である．

ところで仮定によって $t(\underline{b})=t(\underline{q})$ であった．すると $t(\underline{a})=t(\underline{p}\wedge\underline{q})$ も成り立つことになる．だから $\underline{p}\wedge\underline{q}-\underline{a}$, すなわち $w(1)$ は $W[\underline{a}]$ に含まれていることになる．同様に $w(2)$ も $W[\underline{a}]$ に含まれていることがいえるから，w が割れた，という仮定はおかしい，ということになる．

この定理 (11 : A) からわかるように，D : $C[u]$ 回路では，一つの node が二つ以上の cycling のベクトルによって張られることはない．ある node の群で cycling がひとたび起ってしまえば，その node 群の運動は以後他の node とは没交渉におこなわれるのである．

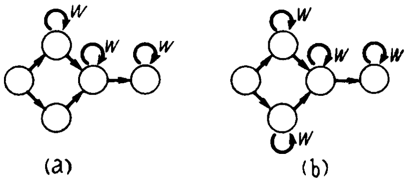
さて，

(11 : 10)　w を D : $C[u]$ 内のある $W[A]$ に属するベクトルとする．そのとき，equivalence set B が存在して，$B\mathcal{T}C$ ならばつねに w が $W[C]$ にふくまれており，また逆に w がある $W[C]$ に含まれていれば $B\mathcal{T}C$ が成り立つ．

つまりどの cycling のベクトルについても，水源地がちゃんと決っている，というのである．Equivalence set の集合は関係 $\mathcal{T}$ のもとに半順序集合をなしているだけで，全順序集合（任意の二要素間に順序関係が定義されている集合）になっているわけではないから，これはそう明らかなことでもない．たとえば**第 19 図** (a) のようなことは起るが，(b) のようなことは起らないというのである．丸は set をあらわし，まるい矢印にwを書いたのは，その set において cycling のベクトルwが存在していることを示している．

証明は，二つの C- 状態 $\underline{a}$, $\underline{b}$ があるとき，この$\underline{a}$と$\underline{b}$の両方で可能な cycling は，D : $C[u]$ においては $\underline{a}\wedge\underline{b}$ でも可能であるという事実を利用しておこなう．

さて先を急がなくてはならない．$\sum[u]$ の周期性に



第 19 図

関するこまかい議論の筋を追うことはいっさいはしょって，公約どおり周期性におけるもっとも本質的なるものを示そう．ただその前に感じを出すため，次の小定理を紹介しておこう．

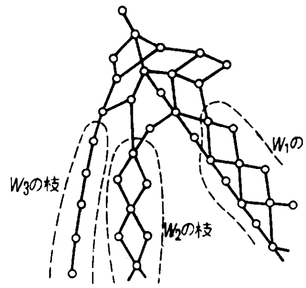
なおここで $j\sim[\alpha, i]$ とは，j が $[\alpha, i]$ に対応することを示す．

(11 : 13)　$j\sim[\alpha, i]$ が A 内にあるとし，また $\boldsymbol{w}$ が $W[A]$ に入っていて $w_i\neq 0$ とする．そのとき A は $\boldsymbol{w}$ に関して minimal であり，またもし $\beta>\alpha$ なる β に対し $a\sim[\beta, i]$ が存在すれば，a も A 内に入っている．

これはある $\boldsymbol{w}$ に張られた node i に関するとっつきは，ある所から先ではその $\boldsymbol{w}$ に関する minimal な set の中にある，というものである．それから先の set は，この cycling について何も新しいものを提供しないのである．Cycling が起るまでのことは知らないが，一旦 cycling が起ってしまえば，i 番目の node を α 回動かすについて一番手っとり早い方法はその迂回路にそってせっせとまわり続けることである．$\boldsymbol{w}$ に張られていない node のことなど，かまいつけている必要はないとすれば，i に関するとっつきは A より先へ行く必要がない．（以下の練習問題を解いてみればイメージが一層はっきりするだろう）．さて，

(11 : E)　$[\gamma, i]$ がすべての γ に対して $\sum[\boldsymbol{u}]$ 内にあるような i の全部からなる集合 $i(1), i(2), \cdots\cdots, i(k)$ を考える．そのとき k 個の signal の値の組 $\alpha(1), \alpha(2), \cdots\cdots, \alpha(k)$ および k 個の整数の組 $r(1), r(2), \cdots\cdots, r(k)$ が存在して，任意の $i(s)$ に対し，もし $\alpha\geqq\alpha(s)$，ならば，$[\alpha, i(s)]\leqq[\beta, i(t)]$ なることと $[\alpha+r(s), i(s)]\leqq[\beta+r(t), i(t)]$ なることが同等となり，さらにこの場合，$[\beta, i(t)]\leqq[\gamma, i(s)]$ なる γ が必ず存在する．

これが (11 : C) に対応する大定理である．すべての γ に対して $[\gamma, i]$ が存在するような i，とは，とりもなおさずある cycling のベクトルによって張られている signal index ということである．張られていない node はどこかで頭うちで，永久に伸びて行くなどということはないはずだから．そしてこの定理のいうところは，同じベクトルに張られている node はある所から先では周期性を保ち，互いにからみあいながら伸びて行く，ということである．$r(s)$ としては，この cycling のベクトルの第 $i(s)$ 番目の成分をとればよい．すると $i(s)$ 番目の node が $r(s)$ 歩前進するためには，このベクトルにそって1回まわることが必要だから，同じベクトルに張られた他の node $i(t)$ も同時に $r(t)$ 歩前進することになるのである．だが一方別のベクトルに張られている node はどうか，というと，ベクトルがちがえば，お互いに干渉されずに運動することができるから，決して永久にからみあうということがなく，そこでこれら二つの別世界にいる node に関しては，じゅうぶん先の方を見る限り，$[\alpha, i(s)]\leqq[\beta, i(t)]$ というような一方向きの関係が成り立つことは決してない．**第 20 図**は，このへんの事情を示す概念図である．

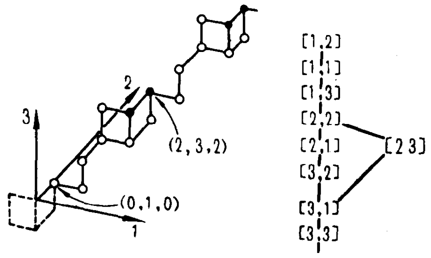


第 20 図

なお副条件 $\alpha\geqq\alpha(s)$ がつけてあるわけは，スイッチを入れてまもなくには，まだ回路が“定常状態”に達していないかもしれないからである．そこのところは，D: $C[\boldsymbol{u}]$ 回路の例 (11 : 15) を見るとよくわかる．

$$(11:15)\quad \begin{aligned} z_1' &= \bar{z}_2 \vee z_1 z_3 \\ z_2' &= z_1 \vee z_2 \bar{z}_3 \\ z_3' &= \bar{z}_1 z_2 \end{aligned}$$

初期状態を (1,0,0) にとると**第 21 図** (a) のような動作をする．白丸がとっつきをあらわす．ここで



(a)　　(b)

第 21 図

(0, 1, 0)はたしかに join-irreducible であるが，1回まわって帰って来たところの (2, 3, 2) はそうではない．はじめのうち死んでいた node 2 が動き出すからである．同図 (b) にこの D : C[u] に対応する $\sum$[u] 内の順序関係を図示する．

〔練習問題〕

つぎの回路を，(1,0,0) を初期状態として解析すること．これが D : C[u] であることをたしかめ，J[u] および $\sum$[u] を構成してみよ．

$$z_1' = \bar{z}_1 z_2$$
$$z_2' = z_1 + z_2$$
$$\bar{z}_3' = \bar{z}_3 + z_1 \bar{z}_2$$

12. 設計法の理論

この章でやることは要するにさかだちである．前章までのすじみちは，回路の関数 f_i から C[u] を構成し，C[u] から（これが D : C[u] であるとの条件のもとに）$\sum$[u] を作る，ということであった．そしてこの $\sum$[u] を見ると，その構造はもとの D : C[u] にくらべてずっと簡単であり，またその要素間の順序関係には，直観的な意味づけができるのであった．そこでこの章では，この点に目をつけて，まず $\sum$[u] を与え，そこから逆に D : C[u]，さらに f_i を構成してみようというのである．具体的にいうと，たとえば3番の node が8回動く前に，7番の node が3回動いているべし，というような $\sum$[u] と同じ形式の注文書を与えて，その注文書にしたがう distributive な，したがって semi-modular な，それ故 speed-independent な回路をあみ出そうというのである．

もっとも概念的には，この注文書と $\sum$[u] とは一応別物であるべきである．$\sum$[u] はその背後に，それを織り出したもとの回路をせおっているのであるが，注文書の方はあくまで注文書にすぎないからである．そこで，

(12 : 1)　**change chart** $\sum$ とは二つの正整数の組〔α, i〕（必ずしもこの形のものをすべて含むわけではなく，また一つ一つの組は，みな互に異なるものと考えるが）から成る半順序 ($\leq$) 集合であって，次の条件をみたすものである．

(12 : 1a)　一つの整数 n が存在して，$\sum$ 内のすべての〔α, i〕に対して $i \leq n$ が成り立ち，また〔β, j〕<〔α, i〕をみたす〔β, j〕は $\sum$ 内には有限個しかない．

(12 : 1b)　〔α, i〕が $\sum$ に含まれ，また $\alpha > 1$ とすれば，〔$\alpha-1$, i〕も $\sum$ に含まれ，〔$\alpha-1$, i〕<〔α, i〕が成り立つ．

これは (11 : C) のさか立ちである．そしてこれが注文書の syntax になる．$\sum$ はゆくゆく $\sum$[u] になるべきものだから，少なくとも (11 : C) に相当するこの条件をみたさなくてはならないのである．

次に D : C[u] のさか立ちとして，

(12 : 2)　A は次の規則をみたすように選ばれた n 次元のベクトル $\underline{a}$ の集合である．すなわち $\underline{a}$ の各成分 a_i は負でない整数であって，さらに，

(12 : 2a)　$\underline{a}_i > 0$ なら〔a_i, i〕が $\sum$ 内にあり，また，

(12 : 2b)　任意の〔β, j〕$\leq$〔a_i, i〕をみたす $\sum$ の要素〔β, j〕に対して $\beta \leq a_j$ が成り立つ．

これらの条件のうち (12 : 2a) は (11 : 7) に対応し，(12 : 2b) は (11 : 8) に対応する．この定義のもとに，

(12 : A)　A は演算 $\vee$, $\wedge$, および $\leq$ のもとに distributive な束をなし，またこの束には零元がある．

ベクトル (0,0,……,0) が A に入っていることは明らかである．なぜかというと，これは $a_i > 0$ なる a_i をひとつも有していないから，(12 : 2) のどの条件にも抵触しようがないのである．これが零元になる．また $\underline{a}$, $\underline{b}$ が A に入っているとすると，ベクトル $\underline{a} \vee \underline{b}$ および $\underline{a} \wedge \underline{b}$ も A に入っていることが定義からたしかめられる．A が distributive な束をなすことは，

$\vee$, $\wedge$ および $\leq$ の性質から明らかである．また明らかに，(10：4) に対応して，

(12：3) 任意の Λ 内の $\underline{a}$ に対し，$\underline{b}<\underline{a}$ をみたす $\underline{b}$ は Λ 内には有限個しかない．

また次の事実が成り立つ．

(12：4) $\underline{b}$ が Λ の中で $\underline{a}$ を cover するための必要かつ十分な条件は，ある j に対して $b_j=a_j+1$，またすべての $i\neq j$ に対して $b_i=a_i$ となることである．

これは (7：D) に当る．さらに (11：B) に対応して，

(12：5) Λ の $\underline{0}$ でない join-irreducible な要素の全体は，change chart $\sum$ の中に 1 対 1 に写像される．この写像において $\underline{a}$ が $[\alpha, i]$ に対応するとは，$\underline{a}$ が Λ において $a_i=\alpha$ をみたす要素のうちで minimal なものになっていることである．

(12：6) Λ の $\underline{0}$ でない join-irreducible な要素の集合は，$\sum$ と isomorphic であって，$\underline{a}$ と $[\alpha, i]$ また $\underline{b}$ と $[\beta, j]$ が対応するときに，$[\alpha, i]\leq[\beta, j]$ となるための必要かつ十分な条件は $\underline{a}\leq\underline{b}$ となることである．

そしてここまでの理論的展開の一つの大団円として，つぎの定理がある．

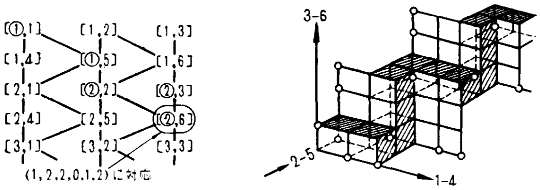
(12：C) Λ を $\sum$ の (12：2) で定義される像とする．また $\sum_1$ を Λ の (11：7)，(11：8) で定義される像とする．すると $\sum_1=\sum$ が成り立つ．

証明は省かざるを得ない．

ところで $\sum$ から Λ を構成するのにいちいち (12：2) にもどってえっちらおっちらやっているのでは，とてもやり切れない．ところで Birkhoffの定理 ((10：6) 参照) と (12：A)，(12：3) を組み合わせると，Λ のすべての要素は，Λ の ($\sum$ の各要素に対応する) join-irreducible な要素の組の上端，つまり“大きい方”として表現できるのだから，この join-irreducible な要素を $\sum$ から直接算出できればありがたい．そこで，

(12：9) $\underline{a}$を change chart $\sum$ の要素 $[\alpha, i]$ に対応する Λ の join-irreducible な要素とする．このとき $a_j=\beta$ なるための必要かつ十分な条件は，$\beta>0$ なら，$[\beta, j]\leq[\alpha, i]$ なる $[\beta, j]$ が $\sum$ 中に存在し，さらにもし $[\beta+1, j]$ が $\sum$ 内にあれば $[\beta+1, j]\not\leq[\alpha, i]$ となることである．

つまり $[\alpha, i]$ から対応するとっつきをうるには，おのおのの j ($j=i$ も含めて) について，$[\beta_j, j]\leq[\alpha, i]$ をみたすぎりぎり最大の β_j を求め，これを a_j とすればよい．こういう β_j が存在しなかったら $a_j=0$ としておけばよい．**第22図** (a) に上記手法の実行例を示す．



(a) (b)

第 22 図

なおこの $\sum$ においては，node 1 と 4，2 と 5，3 と 6 が組になっていて，必ず交互にしか動かないから，この $\sum$ から作った Λ は三次元空間にプロットできる．たとえば $a_1=2$，$a_4=1$ をあらわすには，1－4 軸上の位置 2+1=3 を用いる．次に node 4 が動いてしまうまでは node 1 が動くことはないから，これでまちがいは生じない．第22図 (b) はそうやって示した Λ である．また図中白丸は例によってとっつきをあらわす．

さて，いよいよ Λ という $C[u]$ の模型を折りたたんで，I- 状態の模型を作りあげる話にかかる．そのためには，

(12：11) 初期状態 $\boldsymbol{u}$ が与えられたとき，集合 S が束 Λ の **state assignment** であるとは，S が次の条件をみたす n 次元のベクトル $\boldsymbol{a}$ の集合であることである．

(12：11 a) すべての成分 i に対して整数 k_i が存在して，すべての S 内の $\boldsymbol{a}$ に対し，$0\leq a_i<k_i$，また

(12：11 b) Λ の中の $\underline{a}\neq\underline{0}$ なる要素を S の中の $\boldsymbol{a}$ に一意に写し，また $\underline{0}$ を $\boldsymbol{u}$ に写し，しかも $\underline{0}$, $\underline{a}(1)$, $\underline{a}(2)$,……, $\underline{a}$ を Λ の中の cover 列† とし，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{a}(1)$, $\boldsymbol{a}(2)$,……,$\boldsymbol{a}$ を S における その像とするとき，$\underline{a}=L[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}(1), \boldsymbol{a}(2),……, \boldsymbol{a}]$ をみたすような写像

† となり同志が cover の関係で結ばれている列.

が存在する.

という定義をすればよさそうである. すると,

(12:13)　uを初期状態, Sを A の assignment とする. そのとき A 内の $\underset{\sim}{a}$ に対し, $\underset{\sim}{a}$ の assignment は

$a_i=0$ なら $a_i=u_i$

また $\underset{\sim}{b}$ を $\underset{\sim}{b}\sim[a_i, i]$ の assignment として,

$a_i=b_i$

で与えられる.

が証明できる. つまり, node i が a_i 回目に上るか, 下るかは, (12:11) のような定義をとる限りにおいて, 定まっていて, 他の node がどうなっているかによらないのである.

次に, "次の状態" にあたるものの定義をしなければならないが, それには,

(12:14)　任意の A 内の $\underset{\sim}{a}$ に対し, state assignment S におけるベクトル $z'(\underset{\sim}{a})$を, $z'(\underset{\sim}{a})=b(\underset{\sim}{a})$ で定義する. ただし $b(\underset{\sim}{a})$とは, $\underset{\sim}{b}(j)(j=1, 2, \cdots\cdots, k)$ を A 内で $\underset{\sim}{a}$ を cover するベクトルの全体とし, $\underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{a})=\underset{\sim}{b}(1)\vee\underset{\sim}{b}(2)\vee\cdots\cdots\vee\underset{\sim}{b}(k)$とするとき, $\underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{a})$ の state assignment のことである. このとき A 内のすべての $\underset{\sim}{a}$ に対するかようなベクトル $z'(\underset{\sim}{a})$ 全体の集合を **covering function assignment** と呼ぶ.

とすればよい. こうすると二進以上の場合も2ステップ一度にとぶ可能性は失われてしまうが, こうやった方が見通しがよくなることは明らかである.

ところで A 内の異なる $\underset{\sim}{a}$ と $\underset{\sim}{b}$ とが, Sでは同じ a に対応する, ということもありうる. Cycling が起るような回路を考えれば当然そうなる. そしてのんきにかまえていると, その場合たまたま $z'(\underset{\sim}{a})\neq z'(\underset{\sim}{b})$ になることもありうるわけである. そうなっては大いに困る. そこで,

(12:15)　State assignment $S[u]$が **consistent** であるとは, $S[u]$ の中の同じベクトル a に対応するすべての A 内の $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ について, $z'(\underset{\sim}{a})=z'(\underset{\sim}{b})$ となることである.

もし (12:15) が成り立てば, これで $S[u]$ から $S[u]$ の上への写像が, つまりは関数 $z_i'=f_i(z_1, z_2, \cdots\cdots z_n)$ がきまったことになる. そしてここまで来れば

(12:16)　$S[u]$ を A の consistent な state assignment とし, また $z_i'=f(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$を $S[u]$ の上で定義された covering function assignment とする. そのとき, この函数を初期状態を u とする回路とみなせば, 回路は distributive で $\mathrm{D}: C(u)=A$ である.

となることは明らかであろう. そこで問題は consistent な $S[u]$ をとにかく一つみつけるということに帰着された.

ところで回路はまだ binary に限られていない. 必要なら k_i をいくら大きく取ることも許される. だからもしすべての i について $[\alpha, i]$ の α が有限ならば, ただちに consistent な $S[u]$ を発見することができる. $a=\underset{\sim}{a}$ とするのである. なあんだというところであるが (もちろん binary ならこうは行かないが, それは別問題である. 後述する).

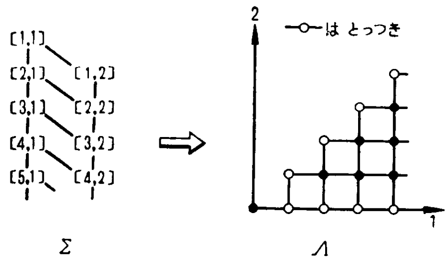
そこで問題は無限回動きうる node である. いくら k_i が大きくてよいといっても, 有限にはちがいないから, こういう node があると, どこかで A を "折りたたんで" おりの中に押し込めてしまわなければならない. そうするととじ込められた回路は必然的にぐるぐるまわりを始める. ぐるぐるまわりをする $\mathrm{D}: C[u]$ 回路の $\sum[u]$ については, (11:E) という制限があった. だから A が矛盾なく折りたためるためには, A のもととなった $\sum$ について少なくとも次の条件が成り立たなければ話にならない. すなわち,

(12:17)　Change chart $\sum$ が**実現可能**であるとは, すべての γ に対して $[\gamma, i(j)]$ が $\sum$ 内に存在するような $i(j)$ $(j=1, 2, \cdots\cdots)$ について, $\sum$ 内に要素 $[\alpha(j), i(j)]$ および整数 $r(j)$ が存在して,

(12:17 a)　$\alpha\geq\alpha(s)$ なるときには, $[\alpha, i(s)]\leq[\beta, i(t)]$ と $[\alpha+r(s), i(s)]\leq[\beta+r(t), i(t)]$ とが同等であり,

(12:17 b)　$[\alpha(s), i(s)]\leq[\beta, i(t)]$ なら $[\beta, i(t)]\leq[\gamma, i(s)]$ をみたす $[\gamma, i(s)]$ が存在する.

(12:17) をみたさない $\sum$ は折りたためない. その例を**第23図**に示す. これは2系列の演算がほとんど独立におこなわれていて, ただ第1の系列の第 n 番目がすむまでは, 第2の系列は第 n 番目にかからない



第 23 図

こと，という条件がついている，といったものである．この $\sum$ は（12：17 b）をみたさない．だからこの $\sum$ から作った Λ は D：$C[u]$ になる資格を欠いている．このことは直観的にもたやすく理解される．第2の系列が1歩進んでよいかどうかをいつも判断できるようにしておくためには，第1の系列が第2の系列の先何歩の所を進んでいるかを，回路が記憶している必要がある．だがこの差は，ひょっとするといくらでも大きくなるおそれのあるものである．それを記憶するためには無限に多くの内部自由度を必要とする．それは困る．

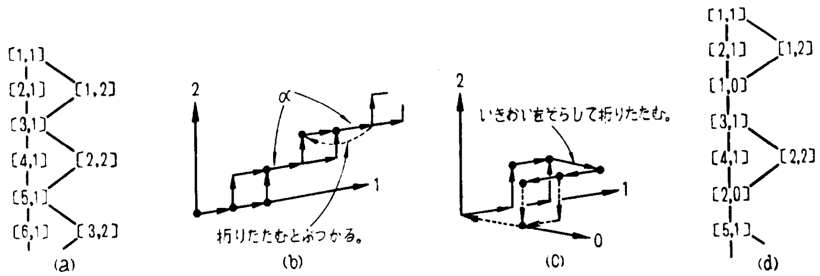
それでは“実現可能”な $\sum$ から作った Λ ならば必ず折りたためるのだろうか？ 実はノーなのである．たとえば**第 24 図**（a）の change chart を考えよう．これは binary counter である．あるいは node 1 が計算機のメモリー・ユニットで node 2 がステップ・カウンターである，と考えてもよい．これらの装置は，対応する node が1歩動くたびに1回動作するようになっているとするのである．メモリーが命令を読んだらステップ・カウンターを進めてよい．それと同時にオペランドを読みはじめることができる．オペランドが読まれ，カウンターが進んだら，次の命令を読みにかかってよい，というわけである．

さてこの $\sum$ は明らかに実現可能である．そこでこれから Λ を構成すると同図（b）のようになる．これは折りたためない．node 1 は年中動きかかつているので，これをどこでどう折ったにしても衝突が起ってしまうからである．

ではこの $\sum$ を合法的にたたむにはどうしたらよいか？ それには同図（c）および（d）のように新しい node（0番と呼ぶ）を追加して，node 1 のいきおいを一時そらしてやる他はない．この場合 node 2 を折ることについては問題がない．たとえば（b）のマッチ棒 α を軸にして，その前後で180度ひねってやるだけで十分である．

もちろん折りたたんだら“のりづけ”しなければならない．この例の場合なら，node 0 をもう1回動かして，同図（c）の点線の部分まで入れたものを考えれば足りる．

では任意の $\sum$ を与えられて，それをぶつからずに折りかさねるためにはどうしたらよいか？ いつも上の場合のように目の子でやればうまく行くという保証は，もちろんない．目の子でなくても行く方法はないか，というと，それはないでもない．だがその方法をきっちり記述するためには，もう少し準備がいる．まず：



第 24 図

（12：18） 集合 $\{[\alpha(s),\ i(s)]\}$ は $[\alpha(s),\ i(s)]\leq[\beta,\ i(t)]$ をみたす $[\beta,\ i(t)]$ 全体の集合である．

ただし $\alpha(s)$ の定義は（12：17）による．

（12：19） 任意の集合 $\{[\alpha(s),\ i(s)]\}$ と，isomorphism の整数 $r(j)$ に対して，つぎの条件をみたす n 次元の isomorphism のベクトル w が定義される．すなわち：

（12：19 a） ある β に対して $[\beta,\ i(t)]$ が $\{[\alpha(s),$

†† こういう解釈をしてみると，わざわざ苦労して cycling などというものを理論にとり入れたことの効用がはっきりする．

$i(s))]\}$ に含まれているとき，そのときに限って $w_{i(t)}=r(t)$ また

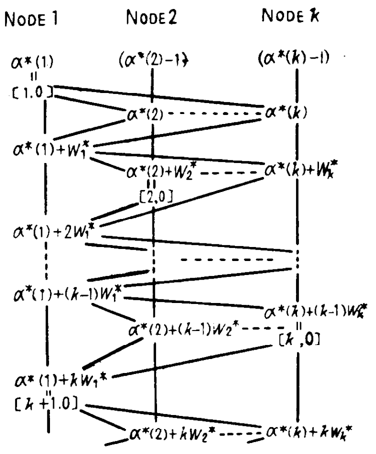
(12:19b) その他の成分に対して，$w_m=0$

この集合 $\{[\alpha(s),\ i(s))]\}$ は第20図の"枝"にあたるものである．また w は D:$C[u]$ の cycling のベクトルに対応するものであって，一般にその何倍かになっている．(2分の1であることもあり得る)．こういうベクトルが二つあったとすると，それらは直交する．つまり $w(1)$, $w(2)$ に対して $w(1)\wedge w(2)=0$ である．なぜなら(12:17)によって，もし $[\beta, i(t)]$ が $\{[\alpha(s),\ i(s)]\}$ に属しているときは，ある $[\gamma,\ i(s)]$ が $\{[\alpha(t),\ i(t)]\}$ に属しているから．また，

(12:20) w を isomorphism のベクトルとし，また a を $w_{i(s)}\neq 0$ なる $i(s)$ に対して $a_{i(s)}\geq\alpha(s)$ をみたす A 内の任意のベクトルとする．ただし $\alpha(s)$ の定義は(12:17)による．そのとき $a+w$ も A 中にあって，a と isomorphic である．

が証明できる(この際少し微妙な点があるが略す)．

さて本題の折りたたむ話にもどって，仮に与えられた $\sum$ には isomorphism のベクトルが一つ，ただ一つあるということにしよう．そしてそのベクトルに張られる node は，1,2,……, k 番の node と考える．ベクトルが2本以上あるときのことは，D:$C[u]$ 回路における cycling の独立性(11:A)を考えれば，心配ないことがわかる．



第 25 図

さて $[\alpha^*(j),\ j]$ $(j=1,2,\cdots\cdots,k)$ をつぎのように選ぶ．すなわち $[\alpha^*(j),\ j]$ は $\{[\alpha(1),\ 1]\}$ 内に入っているが，$[\alpha^*(j)-1,\ j]$ はもし存在すれば入っていない，というようにである(**第25図**参照)．また isomorphism の整数 $r^*(j)$ を，$\{[\alpha(1),\ 1]\}$ と $\{[\alpha(1)+r^*(1),\ 1]\}$ とが isomorphic であって，またすべての j について $[\alpha^*(j),\ j]\leq[\alpha(1)+r^*(1),\ 1]$ が成り立つように選ぶ．これは(12:17b)によって可能である．こうして選ばれた $r^*(j)$ によって構成した isomorphism のベクトルを w^* とする．

ここで，もとの change chart に"緩衝用"の node を加える．"お目付け役"といってもよかろう．この node を前と同じ筆法で0番ということにする．その加え方は，

(12:21) $j=1,2,\cdots\cdots,k$ に対して $[\alpha^*(j)+(j-1)w_j^*,\ j]$ を $[\alpha^*(j)+(j-1)w_j^*,\ j]$ とそれを cover する $[j,\ 0]$ との組でおきかえる．また集合 $\{[\alpha^*(1),\ 1]\}$ と $\{[\alpha^*(1)+mkw_1^*,\ 1]\}$ とが，すべての m に対して isomorphic となるようにしてやる．

このとき isomorphism の整数は $r(0)=k$, $r(1)=kw_1^*,\cdots\cdots$, $r(j)=kw_j^*,\cdots\cdots$, $r(k)=kw_k^*$ となる．

というものである．こうしてできた新しい change chart を折る．つまり $S[u]$ を作る．それには，

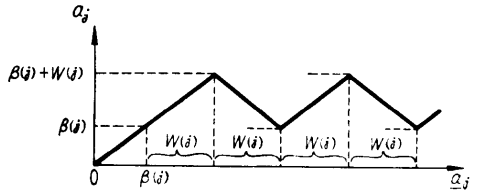
(12:22a) $a_j\leq\beta(j)$ ならば $a_j=a_j$,

(12:22b) ある $m\geq 0$ につき $2mw(j)\leq a_j-\beta(j)<(2m+1)w_j$ ならば $a_j=\beta(j)+[a_j-\beta(j)] \bmod w(j)$,

(12:22c) ある $m\geq 0$ につき $(2m+1)w(j)\leq a_j-\beta(j)<(2m+2)w(j)$ ならば $a_j=\beta(j)+w(j)-[a_j-\beta(j)] \bmod w(j)$,

ただし $j=1,2,\cdots\cdots,k$ に対して $w(j)=kw^*(j)$, $w(0)=k$ また同じく $j=1,2,\cdots\cdots,k$ に対して $\beta(j)=\alpha^*(j)+(j-1)w_j^*$, $\beta(0)=1$.

この折り方を図示すると**第26図**のようになる．つまりこうである．Cycling が始まるまでは，例によって $a_j=a_j$ で片づける．初期状態としては $(0,0,\cdots\cdots 0)$ をとるわけである．さて change chart にいよいよ周期性があらわれたら，最初に node 1 が動いたところで，お目付け役を1歩進めてやる．ここから先は cycling だよ，というわけである．その node 0 が動いた結果 node 2 以下 j までが少なくとも1回動き，



第 26 図

さらにそれらの動きがふたたび node 1 にはねかえって来るまで待つ．ここでまた node 1 が動いた結果が（こんどは node 0 を動かすことなく）波及して行くが，これが node 2 に達したときに，今回はここでお目付け役を増してやる．3番から k 番までについては放っておく．そしてこれらの動きがふたたび node 1 にはねかえるのを待つ．さてこのはねかえった node 1 の動きが，ふたたび node 2 ないし k につたわるのであるが，今回は node 3 の所でお目付け役を動かす．以下同様にして node k まで目を付け終ったら，そのとき node 0 は $a_0=k=\beta(0)+w(0)-1$ に達している．つまり頂点の1歩手前である．

さてふたたび node 1 が動く．すると node 1 は $a_1=\beta(1)+w(1)$ に達する．この node はここで折りかえされる．だがそれにとりかかる前に，お目付け役をもう1歩だけ動かす．これによって仮に node 1 がすぐ続けて動こうとしても，いきおいがそらされたことになって，衝突は起らない．

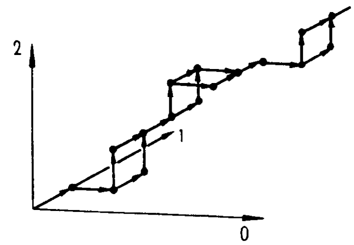
さて，この node 0 の動きが node 2 ないし k に波及する．もどって来て1を動かす．そしてまた2へたどり着いたとき，2はちょうど $a_2=\beta(2)+w(2)$ に達している．ここが2の頂点である．お目付け役ににらんでもらう必要がある．そこで node 0 を動かすが，node 0 もまた頂点に達していたわけで，やはり折りかえしを受けなくてはならない．しかしこの場合，幸い前回 node 0 が動いてから現在までに，node 1 ないし k が少なくとも1回ずつ動いている．だからここで node 0 を折り返しても文句は出ないのである．ここがポイントである．

以下 node 3 から k までを折り返しながらお目付け役を一目ずつ下げて行く．それでもちゃんとにらみはきいている．k まで折ると，そのあとでは $a_0=2$ である．

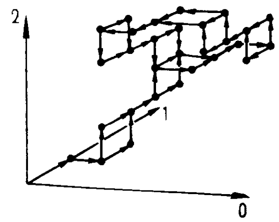
結果が1に帰って来たら，このときちょうど $a_1=\beta(1)$ になるわけだから，ここでお目付け役をさらに $a_0=1=\beta(0)$ まで下げて境界線とし，以後 node 1 に上昇線をたどらせる．次に2がどん底に落ちて来るからこれを折るが，そのときは node 0 もどん底にいるのだから，$a_0=1$ を1から2にたたき上げることによって，境い目をつくる．それから先は node 0 を 3, 4, ……と上げてゆきながら，node 3,4,……をどん底から立ちなおらせる．node k までが立ち上り，お目付け役が $a_0=k$ に達したときに，前につけた道との合流が起り，以後 node 0 を含めた cycling が続いてゆく．

以上の方法がまちがいなく働くかどうかを本当にたしかめるには，もちろん数学的な理論づけが必要である．それにはこうして作った $S[u]$ が consistent でないと仮定して，帰謬法を使う．やっかいにはちがいないが証明は一本道である．そして原論文の最後をかざるつぎの存在定理がえられる．

(12 : F)　任意の実現可能な chang chart $\sum$ において，もし一つの isomorphism のベクトル当り一つの新しい node を追加することを許すならば，関数の組が構成でき，これをある初期状態 u から出発させたときに D : $C[u]$ を形成し，その $\sum[u]$ から新しく加えられた node に関する causation signal を除いたものは $\sum$ に等しい．



C-状態

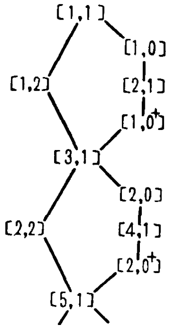


I-状態

第 27 図†

† この図は和田英一氏の労作である．同氏に謝す．

参考のために上述の方法を第24図（a）にそのまま適用すると，**第27図**のようなものがえられる．node 0 は 4 進，node 1 は 6 進，node 2 は 5 進で，cycling の際には，そのうち，それぞれ1と 3，1と 5，2と4の間を行ったり来たりする．



第 28 図

ところでこの定理の実用性のことであるが，まず第一に素子が binary と限ってないのはいかにも不都合である．この点については，さらにお目付け役の node を追加してやることによって解決できるとされている．事実第24図（a）の $\sum$ は，**第28図**のように 0^+，0の二つの node を追加すれば折りたたんで binary の回路を作ることができる．

第二の問題は，こうして得られる関数 f_i が，たいていの場合相当複雑であることである．これは相当問題であろう．

こういうわけでこの理論を実際に用立てるためには，さらに続篇が書かれなくてはなるまい．特に上に述べた二つの問題のほか，やはり何らかの意味における input を理論に含ませることが望ましいのではなかろうか．だからこの紹介記事も，まだまだ完結篇ではなく，前篇の終りということにしたいものである．

〔練習問題〕

（1） 第11章の問題で得られる $\sum[u]$ を $\sum$ とみなして，定理（12：F）の方法を機械的に適用してみること．この際 isomorphism のベクトルが二つあることは注意を要する．

（2a） 第22図 (b) の Λ は各 node を binary として折りたたみうる．折りたたみを実行し，関数 f_i を求めること．ただし初期状態を (0,0,0,1,1,1) にとること．（答：Binary とわかっているのだから，Λ の各要素に u を加えて modulo 2 で見れば $S[u]$ が得られる．$z_1'=(z_1, z_4, z_5)$，$z_2'=(z_2, z_5, z_6)$，$z_3'=z_6$，$z_4'=z_1$，$z_5'=(z_5, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ $z_6'=(z_6, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$．ただしカッコ (a, b, c) は多数決 $(ab+bc+ca)$ をあらわす．

（2b） 第28図の $\sum$ から Λ を求め，前問と同じことをやること．（答：初期状態をゼロとして，$z_0^{+\prime}=z_0^+z_1+z_0\bar{z}_1$，$z_0'=z_2'=\bar{z}_0^+z_1+z_0\bar{z}_1$，$z_1'=\bar{z}_0^+\bar{z}_0(z_1+\bar{z}_2)+z_0z^+z_0(z_1+z_2)$）．

（昭和36年7月14日受付）