数独の数理モデル「解き筋」

是川　空，小谷　善行
東京農工大学工学府　電子情報工学専攻

数独などに代表されるペンシルパズルは世界中で人気があるパズルである.ペンシルパズルは様々なパズルと同じように解探索によって解を得ることができる.一方で問題の知識を用いた推論を併用することで,候補値による分岐やバックトラックをすることなく,確定的な解経路を得ることが出来るのが特徴である.このような問題では部分解答の解答順序が重要である.

我々は人間の思考過程における部分解答の決定方法を確定定理として定義した.確定定理を用いた解法における解答手順を解き筋という概念として提案する.この概念を利用することにより,問題から抽出した解き筋を用いて,問題の構造的特徴を得ることができる.数独の問題を例に挙げて,問題の小さな解き筋を得ることで,人間の思考過程の特徴について考察を行った.

Mathematical model of Sudoku："Solution Path"

Takashi KOREKAWA, Yoshiyuki KOTANI
Department of Electronic and Information Engineering, Graduate school of Technology,
Tokyo University of Agriculture and Technology

Sudoku and other Pencil puzzles are popular all over the world. They can be solved as a state-space search problem. On the other hand, they are solved in the deterministic way without branching and backtracking by reasoning. The key is the sequence of selecting unit parts in solution.

We defined "resolutional rules" that are the method of deciding a part of solution near human's thought process. We notice the sequence of the solution process, and propose the concept of solution path. Using this concept, we get the solution paths from pencil puzzle and conjecture the situation of that problem. We take up the example of Sudoku's problem. We get the small solution paths and then show the feature of situation on the human thought process.

1　はじめに

数独はペンシルパズルの一種で,世界中で愛されているポピュラーなパズルである.その手軽さと深い思考過程が反響を呼び,幅広い年齢層に楽しまれている.

数独を代表とするペンシルパズルの解法は局面を変数で表し,様々なパズルと同様に解探索によって解が求められてきた.その一方で問題の知識を利用した解探索の効率化手法の発展により,得られる解探索の経路が一本道にまで限定されるようになる.

本研究はこのような確定的な解法を用いたときに,解法が辿る解答手順には問題の特徴を表す構造が存在することに着目し,解答手順構造を問題から抽出することで,問題の難易度や良し悪しと結びつける手法を提案す

る.

数独を対象とし,解答手順を作成する確定的な解法として確定定理を用いた解法を利用する.確定定理は問題を制約式によって表現し,それらの変数の真偽を推論することによって逐次的に問題の部分解を得る手法である.

確定定理を用いた解法によって得られる解答手順構造を解き筋と定義し,問題から抽出することで問題の構造的特徴を得る.こうして得られた特徴はペンシルパズルの問題の難易度や良し悪しと関連性があることを述べる.

2　ペンシルパズル

ペンシルパズルとは,お絵かきロジック,数独などに代表される,紙などを媒体とした,有限で確定性のある完全情報のパズルである.シンプルなルールの上になりたつ奥深い思考過程と,そのバリエーションの多さから多くの人間に愛され,雑誌やゲームなどで多くの問題が発表されている.

2.1 ペンシルパズルの定義

本稿で扱うペンシルパズルの定義として,以下の条件を満たしているパズルをペンシルパズルとして扱う.

- 紙などに文字や図などに有限のサイズで示すことが出来る,完全情報で確定性があるパズルである.
- 有限個の部分解答箇所が存在する.
- それぞれの解答箇所には問題の制約による有限の解答候補が存在し,そのうち一つが当てはまる.
- 解答箇所の一部に部分解答を書き込むと,その部分解答から問題の制約により他の箇所の解答候補が制限される.
- 部分的な解答を繰り返し,全ての解答箇所を問題の制約を満たした状態で埋めることで解状態を得る.
- 問題の初期状態から制約を満たして成立するような全体の解答が一つしかない

		5		7		8		
	6		8		1		7	
7								4
	3			2			1	
4			6		8			7
	9			4			3	
8								3
	7		4		5		2	
		1		6		9		

図 2-1　数独の問題例

2.2 数独

数独はペンシルパズルの中でも最もポピュラーなパズルであり,雑誌や新聞など世界中で取り上げられ楽しまれているパズルの一つである.ナンバープレイスとも呼ばれる.

数独は縦横に９×９個のマスを並べた枠があり,枠はさらに３×３の大きさのブロックに分断される.

この枠内には１～９の数字が記入される.初期状態でいくつかの数字が記入されていて,残りの空白の枠にルールに従って数字を記入していく.

数独の枠に記入される数字は「各行,列,ブロックには１～９の数字が一つだけ記入される」と言うルールに従う.このルールに従って全ての枠に数字を記入して行くと,同じグループには同じ数字が入った枠が存在せず,また各グループでは１～９のうち入っていない数字も存在しない状態が得られる.

初期状態で与えられる数字を変えることで,同じルールを使って非常に多くの問題を作成することが出来る.数独の解状態は[8]によっておよそ 6.671×10^{21} 個あることが示されている.

3 関連研究

3.1 ペンシルパズルの解法に関する研究

ペンシルパズルは計算機上での表現がしやすく,人工知能の分野では解探索問題として発展をしてきた.[8]では数独の解状態がいくつ存在するかを求めるために,解数が重複する状態をまとめ上げた後に,力任せに深さ優先探索によって解数の数え上げを行っている.

こういったペンシルパズルの解探索の効率化に広く利用されているのが,問題の知識を用いた手法である.[3][7]は数独,[4]はスリザーリンク,[11]は美術館,[12]はぬりかべ,[13]はひとりにしてくれなど,様々な問題の種類に対して問題の知識を利用した探索の効率化を行った研究が存在する.[2]では数独においてこのような問題の知識を自動的に獲得するための手法の研究が行われている.

また,ペンシルパズルの解法としての別のアプローチとして問題を[6]制約充足問題や,[5]充足可能性問題として表現し,ソルバーによって解を求める方法の研究も行われている.

一方で,ペンシルパズルの難易度を測る研究も多く行われている.[3][7]は数独に対して,[9]はお絵かきロジックに対して解法中に登場する問題の知識の利用頻度と難易度の関係を求めている.[3]は問題集の難易度表記,[9]は人間に解かせたときの回答時間を評価対象としている.

また[10]では数独を対象として人間がどのような順番で問題を解いていくのかを問題の知識と結びつけ,人間の解いていく順番の予測などを行う研究がされている.

3.2 解き筋に関する研究

ペンシルパズルの研究ではペンシルパズルの解法として,解探索に問題の知識を利用した手法を組み合わせることで探索の効率化を図る研究が発表されてきた.これらの研究の成果によって,問題の知識を利用することで,もはや候補値の仮定を用いた探索は行われず,問題の知識による候補値の絞込みのみで問題が解けるものが多くなってくる.人間がペンシルパズルの問題を解く際には,問題の知識を活かして部分的に解答を確定できるような箇所を逐次的に記入していくような思考過程を踏むことが多い.問題の知識を利用した解法の研究はこういった人間の思考過程に近づいていっていると思われる.

問題の知識を用いて確定的な解法を行った場合,解探索のような候補値の仮定とバックトラックが行われないため,得られる探索経路は一本道になる.しかし問題の解答順序によって得られる途中局面が異なり,解答順序が問題の難易度などに影響を与えているのではないかという考えから進められているのが解き筋の研究である.

ペンシルパズルの今までの研究では解を求めることが目的であったため,問題の構造に関する研究はあまりされていなかった.しかしペンシルパズルには問題の局面によって容易に答えが推測できる箇所とそうでない箇所が存在する一方で,解状態までにすべての箇所を解答するため,解答に順序構造が生じる.[1]では解答手順のリストを解き筋として定義し,ペンシルパズルから抽出した解き筋の構造と難易度や良し悪しの評価と関連性があることを述べている.

3.3 本研究の位置づけ

本研究の目標はペンシルパズルを対象とした人間の思考過程の解明である.その為には計算機によって人間と同じような思考過程を用いた解法を実現する必要がある.もう一方で,その解法で得られた問題の特徴と人間の思考過程の関連性について調べる必要がある.

パズルに対する人間の思考過程を図る尺度として難易度がある.人間はどのようなときに問題を難しいと感じるのかの研究は

様々なアプローチによって取り組まれてきた.ペンシルパズルでは解法によって得られた解答経路の難しさを問題の知識を用いて計算する方法が多くとられている.本研究では,解法の問題の知識に加えて,解き筋モデルを用いて問題の構造から難易度に関係する特徴を得る.

本論文の 4 章では人間の思考過程に最も近いと思われる確定定理による解法について述べている.5 章ではペンシルパズルの問題から解答順序構造を抽出する方法とそれらの特徴と問題の難易度の関連性について述べている.

4　ペンシルパズルの解法

4.1 ペンシルパズルの探索による解法

ペンシルパズルは様々なパズルと同様に解答候補をしらみつぶしに探索していく方法で解を得ることができる.全列挙された解局面から成立したものを探すような方法よりも,ペンシルパズルを部分解答の最小単位に分割し,局面を各解答箇所の状態の集合として表現し,この局面の解答箇所に入りうる解答候補を部分的に仮定することで局面を変化させ,ペンシルパズルの解答になる条件に矛盾した場合にバックトラックすることで解探索を実現できる.ペンシルパズルは考えられる局面数が多いことと,解局面が現れる深さが一定であることから,深さ優先探索の手法を用いて解探索するのがポピュラーである.

ペンシルパズルの局面に対して解答の候補をペンシルパズルの知識を用いて制限することでペンシルパズルの探索を効率化する手法がある.この方法では問題の知識を元にした推論を用いることで解答の候補を減らし探索量を大きく削減している.人間がペンシルパズルを解く際にも無駄な考えを減らすためにこのような知識が使われていると考えられる.このようなパズルの知識を用いた推論を用いることで局面中のある解答箇所における解答の候補を一通りに制限できるような場合が存在する.このような箇所を優先的に決定していくことでさらに効率がよい探索を行うことができる.

4.2 確定定理による解法

人間が計算機のような探索によってペンシルパズルを解いているかというと,そうではない場合が多い.人間はペンシルパズルの知識を使って,解答の決定できる箇所を探す方法を取ることが多い.このような知識は問題の種類ごとに手法としてまとめられ,解説として問題に添えられている.本研究ではこのような問題毎の知識による推論手法を,問題の制約を用いて局面における変数の一部を決定する確定定理として定義し,この定理を用いて問題の解答を得る解法を紹介する.

4.2.1 確定定理の定義

ペンシルパズルの問題を各解答箇所の状態を表す変数と,問題の答えを制限するための制約によって記述する.紙に記述してある問題であるというペンシルパズルの特徴から,解答箇所の数は有限であり,また各解答箇所の解答候補の数も有限である.

ペンシルパズルの問題の状態を記述する一般的な方法として,各解答箇所とその解答候補の全ての組合せを変数として網羅したものの集合で表現することができる.問題の全解答箇所の集合 P とその要素である解答箇所 p があるとき,p に対して解答候補の集合 X_p を定義することができる.このとき各々$x(x \in X_p)$について,「解答箇所 p の値は x である」という命題の真偽値を表す変数 S_{px} を定義する.全ての p とそれに対する x の組合せによる S_{px} でペンシルパズルの一つの状態を表現できる.

この方法でペンシルパズルの問題の状態を記述したとき,ペンシルパズルが満たすべき状態を制限する制約式は,この変数による論理式で示すことが出来る.問題の解が一つだ

け存在するというペンシルパズルの特徴から,この制約式の条件を満たすような変数の組合せが一つだけ存在することになる.

全てのペンシルパズルに共通して存在する制約として,以下のような２つの論理式が真になる.

$$\bigwedge_{p}^{P} \bigvee_{x}^{X_p} S_{px} \qquad \text{——式 I}$$

$$\bigwedge_{p}^{P} \bigwedge_{x}^{X_p} \bigwedge_{x'\{x' \neq x\}}^{X_p} (\neg S_{px} \vee \neg S_{px'}) \qquad \text{——式 II}$$

これらはそれぞれ,「各解答箇所の変数のうち少なくとも一つは真である」「各解答箇所の変数二つはいずれかが偽である」という条件を表しており,二つ合わせる事で,「各解答箇所にはちょうど一つの解答候補に対応する変数が真になり,残りが偽である」という排他的な制約を持つことを表している.ペンシルパズルは問題の解答箇所にそれぞれ一つずつ答えを書き記していくため,解状態において各解答箇所はそれぞれ一つずつの解答状態を持つ.これらのことからも以上の制約が成り立つことが自明である.

この制約式を用いて,ペンシルパズルのある状態を表した局面のうちどこかの解答箇所について,どの変数が真になるか（どの解答が記入されるか）を推論するのに用いるのが確定定理である.局面中で真になることがわかった変数は制約式に変数の単項を追加する.

確定定理は問題の制約式から定められた範囲に該当する部分をとりだし,現在の局面を表す単項の変数を用いて推論を行い,この局面のある解答箇所が定理の条件を満たしている場合,その箇所の解答を決定することができることを示す.

①と②の制約式を用いてあるマスの変数を決定するための確定定理を具体例として示す.

局面中のあるマス p を選択する.そのマスの解答候補に対応する変数について,その変数が関連する制約式と現在の状態から変数の絞込みを行う.この絞込みによって,以下の命題が成り立つとき,p の変数のうち S_{px} が真であり,残りの変数は偽であることが分かる.

> $X_p' = X_p - S_{px}$ のとき, $\bigvee_{x'}^{X_p'} S_{px'}$ が偽であるならば,S_{px} は真である.

この定理は,命題の対偶を取って,S_{px} が偽であるとき,X_p'のいずれかの変数は真でなければ式 I を満たすことができないことから求められる.

この定理を用いることによって解答候補の変数のうち一つのみが候補として成立する場合,その変数を真として確定することができる.引いては,この定理はある解答箇所について,推論の結果解答候補が一つしかない状態になった場合はその部分解答が正解であることを保証する.

上記の確定定理はペンシルパズルに一般的に存在する制約を用いて作られているが,様々なペンシルパズルにおいてその問題の種類に固有の確定定理が存在している.

問題の種類によって,制約の特徴から推論を用いて変数を確定する手法が知られている.これらは問題の知識として人間によって発見され,問題を解く際に利用されている.これらの手法が問題によって複数存在するように,確定定理も問題によって複数定義することができる.問題の知識からこのような推論手法を得る研究が盛んに行われている.

4.2.2 確定定理による解法の特徴

ペンシルパズルを確定定理によってのみ解く解法について考える.ペンシルパズルの初期局面から確定定理で確定可能な箇所を探し,その箇所の変数を決定することで局面を遷移させる.これを解局面が得られるまで繰り返す.

確定定理はペンシルパズルの問題の種類ごとに複数定義できるが,定理の一部のみを用いて解局面を得られる問題や,知られてい

る定理を用いても確定可能な箇所が存在しない局面を含む問題が存在する.全ての問題を解くには適切な確定定理を用いて解法を実行する必要がある.

確定定理のみを用いるこの解法での最大の特徴は,初期局面から解局面までの間で誤答が書き込まれた局面が存在しないということである.誤答が書き込まれないため,解探索でいうバックトラックを行うべき局面へたどり着くことはない.つまりこの解法では初期局面から解局面までの一本道の探索経路を得ることが出来るということである.

この解法は複数の解答箇所から確定定理を適用する箇所を選択する必要があるため,選択の方法が異なると,解答の順序が変わり,途中で辿る局面も異なることになる.一方で解答の順序がどのように変化しても,解法は最終的に同じ解局面（ないし,問題が解けなくなる同じ最後の局面）を得るのである.

4.3 数独の確定定理

ここでは数独に定義される確定定理について述べる.数独は行,列,ブロック内の各数字が排他的に存在する制約がある.マスには数字が一つだけ入ると言うことも含めると,問題の全ての制約が「同じグループの特徴をもつ変数のうち、一つだけが真である」という制約で記述できる.具体的には「同じ行に所属する変数のうち、各数字の変数が一つだけ真である。」や「同じ行に所属する変数のうち、各列において所属する変数が一つだけ真である。」などがあげられる。

数独の問題において決定している変数は、その単項が制約式に存在している状態である。この単項と同じ変数が所属しているグループでは同じ特徴を持つ他の変数が偽であることが分かる.

4.3.1　1次のユニーク定理

数独の確定定理は着目する制約の範囲として局面の変数のうち行,列,ブロック,そしてマスのいずれかを選択する.選択されたグループにはいくつかの他の種類のグループが交差する.交差したグループの制約によって選択されたグループ内の変数が制限されることになる.

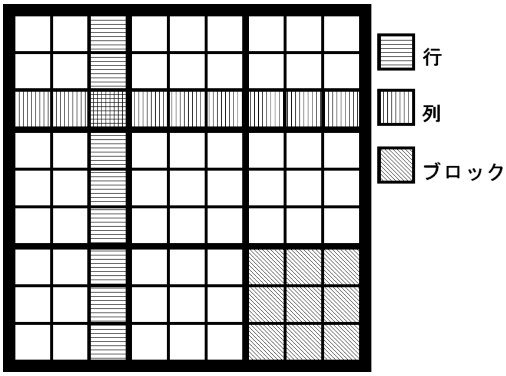

図 4-1　行,列,ブロックの交差

例えばブロックには所属する９つのマスと,それぞれ３つの行と列が交差する.この交差する行,列,マスの変数によってブロック内の変数のうち偽であるものを推論する.図 4-2 ではいくつかの７の数字において、それが所属している行か列には同じ数が入らないという制約を線で図示した。

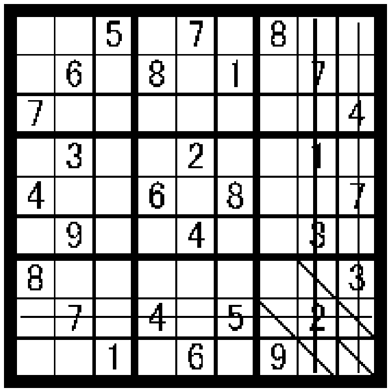

図 4-2　ブロックユニークの例

このようにして変数のうち偽であるものの絞込みを行ったうえで,そのグループ内で,変数が一つを残して偽になったものを探す.この条件を満たしたグループがあった場合,

このグループの制約式が成り立つためには残った一つの変数が真である必要がある.このようなときに数独の確定定理を用いてその箇所の変数を真に決定することが出来る.図 4-2 では右下のブロックのグループにおいて、7 の数字にあたる変数が真になりうる箇所は左上の一箇所である。この図は条件を満たしているため、ブロックの左上のマスの変数は数字が 7 であるものが真になる。

この確定定理はブロックに着目するものならブロックユニーク,行や列に着目するのがタテヨコユニーク,マスに着目するのがセルユニークと呼ばれている.図 4-2 で用いられたものはブロックユニークである。

4.3.2 高次のユニーク定理

上記の確定定理は一つの数字,ないしグループに着目して適用されている.数独のより高度な確定定理では,二つ以上の数字や制約グループを用いて適用するものも存在する.

排他的な変数の絞込みは複数の変数によっても可能である.同一グループ内の複数の解答箇所の集合 P'があるとする.P'内の解答箇所 p'はそれぞれ交差するグループからの制約を受けて,いくつかの変数が偽であることが判明している.このとき P'内の解答候補の和集合 X'をとる.以下の条件を満たすとき,このグループの残りの解答箇所に解答候補 X'の変数が入ることはなく,残りの解答箇所で X'に含まれる候補値の変数は偽であることが分かる.

|P'|=|X'|
（集合 S に対して|S|は S の要素の数を表す）

この条件は|P'|=|X'|が成立するとき,候補集合 X'内で P'の解答について排他的な制約が成立するため,同一グループ内の他の箇所において X'内の候補値が真になることがないことを利用している.

このような高次の確定定理は,候補値の絞込みに利用され,先述のような一次の確定定理と組み合わせて利用される.この確定定理は変数の真偽値が逆でも成り立つため,そのどちらかを利用することで,9 × 9 の数独は最大で四次までの確定定理を持つことが分かっている.

7		9				6		
6	1		5		7	2/9	3	2/8
5				1		2/8		7
3								9
4		2	3		1	8		6
1						3		4
2				8				3
8	5		7		9		6	
9		6				4		

図 4-3　二次のユニークの例

図 4-3 では右上のブロックに着目すると 2 か 9 が候補値である二つのマスと 2 か 9 が候補値である二つのマスに対して二つの数字が候補値になっているので先述の手法によってこの二つのマスのいずれかが 2 で残りが 9 であることが確定する。これを利用すると、同じブロックの 2 か 8 が候補値である右のマスにおいて、数字の 2 が入らないことがわかるため、この箇所の解答は 8 であることが確定する。高次の確定定理は単体では変数を減らす効果しかないが、他のグループに影響を与えて、変数を決定することができる場合がある。

また高次の確定定理は複数のグループに重複して利用可能でもある.高次の確定定理を二つ以上並列か直列に適用した後に確定可能になるような場合も存在する.そのため高次の確定定理では非常に複雑な計算を必要とする場合が多い.

5　解き筋

ペンシルパズルは先述のような確定定理による解法によって解局面を得るプロセスにおいて,誤答の局面を辿らず一本道の解答

経路を得ることが出来る.

しかし一方で,確定定理は局面中の複数の箇所に適用可能である場合があり,解法の途中で適用する箇所を選択することになる.この選択方法によっては解答経路中の局面は全く違うものになる.

確定定理が適用可能な箇所は局面によって異なる.そのため違う局面を辿った解答経路はそれぞれ違う思考過程によって解答が行われている場合があると考えられる.

解き筋とはこのようなペンシルパズルの解答の順序を表現し,問題の解答順序が作る構造をラティス構造として構築し,問題の解答順序構造が持つ特徴を表現する.この構造には解法による一本道の経路以上に問題を解いていく思考過程に関する情報が含まれていると考えられる.

5.1 解き筋の定義

ペンシルパズルの問題において初期局面から確定定理によってのみ局面の遷移を行うとき,初期局面から現局面までの解答手順を解き筋と定義する.

一つの問題から解き筋を集めると,問題の部分解答に論理的な順序関係が存在することが分かる.

E		9				6		
A	1		5		7		3	
5				1				7
3								9
4		2	3		1	8		6
1						B		4
2				8				3
C	5		7		9		6	
D		6				4		

図 5-1　数独の初期局面からの解き筋

図 5-1 の問題において,一次のユニークを用いて解答を決定できる場所は A-D の 4 箇所である.このあと E の箇所に解答を記入すると,一次のユニークで解ける箇所は無くなり,一次のユニークしか知らないような解法モデルであればそこで手詰まりとなる.A-D の解答箇所は初期局面からでも解答可能だが,E の箇所は初期局面では一次ユニークによって解答を決定することが出来ない.E の箇所の解答を決定するには少なくとも C か D のいずれかが解答済みの局面でなければならない.

終局面が同じため,解き筋中には全ての部分解答が等しい頻度で出現する.しかし,E の解答箇所は他の A-D と比べて深いところで出現する.（表 5-1）逆に C-D は浅いところで多く出現する.この問題の特徴としては,E は C-D の解答箇所の難易度や良し悪しの影響を受けやすいと考えられる.

表 5-1　図 5-1 の解答手順の深さ別頻度

	A	B	C	D	E
1	16	16	24	24	0
2	16	16	18	18	12
3	16	16	14	14	20
4	16	16	12	12	24
5	16	16	12	12	24

このような 5 つの解答箇所を持つ問題として捉えたとき,通常 5 つの解答手順を自由に並べ替えたものは 120 通り存在するが,5 つの解答箇所を解答済みにした局面までの解き筋は 80 通り存在することとなる.全ての箇所が最初から解けるような問題よりも,問題の制約が影響しあって解答の順序に制限があるような問題の方がより難易度が高いと考えられる.解答の順序に制限があるほうがある局面までの解き筋の数が減る.この問題でも全箇所が解けるような問題に比べて解き筋が減少していることから少し難易度が高いと考えられる.

6　考察

6.1　解き筋の有用性

図 5-1 の問題に対して,今回は一次ユニークのみを用いた場合の解き筋を得た.小さな問題の中でも解答順序が問題の特徴を表していると言える.解答箇所の深度や解き筋の数などから問題の解答手法によらず難易度の推察が可能である.

このような問題構造と難易度の考察は今まで行われてきたような問題の知識による解法を用いた難易度推定では得ることの出来ない問題の特徴を捉えることができる.

また解き筋による問題の特徴はペンシルパズルならば共通で持っている問題構造であるため,問題の種類に依存しない難易度の考察を行うことが出来る点で有用である.

また今回使用した一次ユニークのみなどの解答者のモデルを指定することで違った解き筋を得ることも出来る.高度な確定定理を使うことの出来る人間のモデルとそうでない人間のモデルでは解き筋に大きな違いがでると考えられる.

6.2　解き筋の問題点

一方で解き筋は問題に対して非常に膨大なサイズになるため計算量の観点からそれらを得ることが困難である.小さなサイズのペンシルパズルや,局所的な解き筋を得ることはできるが,問題全体の解き筋を得ることはできていない.

これらの問題を解決する方法として,解き筋の改良に関する研究が行われている.[1]問題から解き筋全体を得るのではなく,解き筋から必要な情報をできるだけ漏らさず,より計算量の少ないモデルとして取り出す方法が提案されている.局面に対してトランスポジションを行ったり,同型の解き筋を一つにまとめる方法などを用いたりして,よりコンパクトな解き筋構造を実現する.また解き筋が局面に結び付けられる情報だったものを,解答箇所に結びつけるなどの工夫が行われる.局面は解答経路毎に全く異なるものになるのに対して,各解答箇所は全ての解答経路に１度ずつ登場するため扱いやすいからである.手法の改良によって問題全体の解き筋を得ることやより大きなサイズの問題に適用できるようになると考えられる.

7　おわりに

ペンシルパズルの一種である数独を対象に,確定定理を用いた解法を提案した.それを用いて解き筋の抽出による問題の特徴を挙げ,問題の局所的な難易度との関連性を示した.今後は解き筋抽出手法の改良によりより大きなサイズの解き筋を得ることで問題の評価との関連を得る.

参考文献

[1] 是川　空, 五十嵐 力, 柴原 一友, 但馬 康宏, 小谷 善行：ペンシルパズルにおける「解き筋」の概念の提案,Game Programming Workshop 2007 pp.99-106,2007.

[2] 是川　空, 白井　裕己, 柴原　一友, 小谷　善行：ペンシルパズルにおける確定定理の自動獲得, Game Programming Workshop 2008 pp.112-115,2008.

[3] 乾　伸雄, 小谷　善行：ナンプレの解法，難易度の算出，問題の作成,Game Programming Workshop 2002,pp.163-169,2002

[4] 白井　裕己, 五十嵐　力, 但馬　康宏, 小谷　善行：スリザーリンクの解答システムと問題作成システム,Game Programming Workshop 2006,pp.32-39,2006.

[5] Inês Lynce, Jöel Ouaknine：Sudoku as a SAT Problem, Proceedings of AIMATH 06, 2006

[6] Helmut Simonis, : Sudoku as a Constraint Problem, In CP Workshop on Modeling and Reformulating Constraint Satisfaction Problems,pp.13-28,2005

[7] 松原　康夫：数独の推論規則と難易度に関する考察,情報処理学会研究報告 2006-EC-5

(1),pp.1-6,2006
[8] Bertram Felgenhauer, Frazer Jarvis：Enumerating possible Sudoku grids, http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudoku.pdf, 2005.
[9] 伊藤　毅志：ヒューリスティックスを用いたイラストロジックの難易度自動評価,Game Programming Workshop 2005,pp.146-149,2005.
[10] Reijer Grimbergen, Akihiro Nakamura：Analysis of the Behavior of People Solving Sudoku Puzzles, Game Programming Workshop 2009,pp.79-82,2009.
[11] Shi-Jim Yen, Shih-Yuan Chiu：　A simple and rapid Lights-up solver, Game Programming Workshop 2009,pp.67-70,2009.
[12] Shi-Jim Yen, Jr-Chang Chen, Tzu-Der Chuang, Shih-Yuan Chiu：　Nurikabe, heuristic search, puzzle, Game Programming Workshop 2009,pp.83-86,2009.
[13] Shi-Jim Yen,Tsan-Cheng Su, Shih-Yuan Chiu：　Hitori Solver, Game Programming Workshop 2009,pp.83-86,2009.