

計数形電子計算機によるフーリエ形積分の 数値計算法について*

上 村 勝 彦**

1. はじめに

フーリエ形積分とは一般に $\int_A^B f(x) \cos u x dx$, $\int_A^B f(x) \sin u x dx$ の形をした積分のことをいうのは周知のとおりである。かかる積分計算の必要性は電気工学全般、とくにスペクトル分析、周波数応答、波の分析などには欠くことのできないものである。また OR におけるウイナ、ポップの最適予測問題にもフーリエ解析の手法が用いられる。したがって、フーリエ解析における種々計算を計数形電子計算機で行なう要請は大なるものであるといわねばならない。ところが、フーリエ解析の基本計算であるフーリエ形積分の計算は $\int_A^B f(x) \cos u x dx$ において u が大きくなると三角関数の振動が大きくなり困難である。これらの積分法について種々の手法適用し、かかるフーリエ形積分の計数形電子計算機による計算の参考にしていただければ幸いである。

2. フーリエ形積分の近似公式 (1)

与えられた $f(x)$ を折線近似して近似式を作る。(B-A) を n 等分して各等分点において元の関数 $f(x)$ と一致する折線を $f(x)$ の代用として用いようというわけである。しかる時、次の近似式が成立する。

$$(B-A)=2nh, \theta=hu \text{ とすると}$$

$$\begin{aligned} \int_A^B f(x) \sin u x dx &\cong h[\alpha\{f(A) \cos uA - f(B) \cos uB\} \\ &\quad + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \beta \cdot f(A+hk) \cdot \sin u(A+hk)] \\ \int_A^B f(x) \cos u x dx &\cong h[-\alpha\{f(A) \sin uA - f(B) \sin uB\} \\ &\quad + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \beta \cdot f(A+hk) \cdot \cos u(A+hk)] \end{aligned}$$

ここに

* On the Computation of Fourier Type Integral with Digital Computer, by Katsuhiko Uemura (Mitsubishi Electric Manufacturing Company)

** 三菱電機企画部計算管理課

$$\alpha = \left(-\frac{1}{\theta} + \frac{\sin \theta}{\theta^2}\right)$$

$$\beta = \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{\cos \theta}{\theta^2}\right)$$

である。この式の導き方は 5. で述べる。

3. フーリエ形積分近似公式 (Filon の方法) (2)

フーリエ形積分の積分近似式として Simpson などの近似公式は、振動が大きくなる時には、積分ステップをこまかくとらねばいけないので不適當である。これに修正を加えたものとして Filon が考えた次の近似式は (B, A) を $2n$ 等分すると

$$\begin{aligned} \int_A^B f(x) \cdot \cos u x dx &\cong h[\alpha\{f(B) \sin uB - f(A) \cdot \sin uA\} \\ &\quad + \beta C_{2s} + \gamma C_{2s-1}] \\ \int_A^B f(x) \sin u x dx &\cong h[\alpha\{f(A) \cos uA - f(B) \cdot \cos uB\} \\ &\quad + \beta C_{2s} + \gamma C_{2s-1}] \end{aligned}$$

ここで

$$h = (b-a)/2n \text{ であり}$$

$$\theta = x \cdot h \text{ とすると}$$

$$\alpha = \theta^{-3}(\theta^2 + \theta \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - 2 \sin^2 \theta)$$

$$\beta = 2\theta^{-3}(\theta(1 + \cos^2 \theta) - 2 \sin \theta \cdot \cos \theta)$$

$$\gamma = 4\theta^{-3}(\sin \theta - \theta \cdot \cos \theta)$$

なお、 θ が小さい時の展開式として

$$\alpha = \frac{2}{45} \theta^3 - \frac{2}{315} \theta^5 + \frac{1}{4725} \theta^7 + \dots$$

$$\beta = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \theta^2 - \frac{2}{105} \theta^4 + \frac{1}{567} \theta^6 + \dots$$

$$\gamma = \frac{4}{3} - \frac{2}{15} \theta^2 + \frac{2}{270} \theta^4 - \frac{1}{11340} \theta^6 + \dots$$

$$\begin{aligned} C_{2s} &= \frac{1}{2} f(A) \cdot \cos uA + f(A+2h) \cdot \cos u(A+2h) \cdot u \\ &\quad + \dots + f(B-2h) \cdot \cos u(B-2h) \\ &\quad + \frac{1}{2} f(B) \cdot \cos uB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2s-1} &= f(A+h) \cdot \cos u(A+h) + f(A+3h) \cdot \cos u(A \\ &\quad + 3h) + \dots + f(B-h) \cdot \cos u(B-h) \end{aligned}$$

である。

この近似式の誘導法については cosine 変換の場合について 5. で誘導する。

4. フーリエ形積分の近似公式 (修正 Filon の方法) (3)

一般にある関数を数値積分する際、被積分関数 $g(x)$ だけの情報を元としてその積分を計算するより $g'(x)$ の情報をも入れて計算した方がより精密に計算できないかと考えるのは常識的な考え方であるが、この考え方をういて近似式を作ることができる。

2の方法は Simpson の積分公式より導かれたのであるが、この方法は Filon の公式が3点を通る放物線でもって近似した曲線を積分して、元の積分の近似値とするのに反し、6点を通る5次の式で近似し、この5次曲線を各区分について積分し、それを和して得られる。得られた公式は下記のものである。

$$\begin{aligned} \int_A^B f(x) \cdot \cos x u dx &= h \cdot [S[f(B) \sin uB - f(A) \sin uA] \\ &\quad + hP[f'(B) \cos uB - f'(A) \cos uA] \\ &\quad + RC_{2s-1} + h \cdot QC'_{2s-1} + NC_{2s} + hMC'_{2s}] \\ \int_A^B f(x) \sin x u dx &= h \cdot [S[f(B) \cos uA - f(A) \cos uB] \\ &\quad + hP[f'(B) \sin uB - f'(A) \sin uA] \\ &\quad + RC_{2s-1} + h \cdot Q \cdot C'_{2s-1} + NC_{2s} + hMC'_{2s}] \end{aligned}$$

ここに (A, B) の $2n$ 分割に対しての式である。それぞれの記号は

$$h = (B - A) / 2n, \text{ であり}$$

$$\theta = h \cdot u \text{ とすると}$$

$$M = \theta^{-6} \{ 16 \theta (15 - \theta^2) \cos \theta + 48 (2 \theta^2 - 5) \sin \theta \}$$

$$N = \theta^{-6} \{ 16 \theta (3 - \theta^2) \sin \theta - 48 \theta^2 \cos \theta \}$$

$$P = \theta^{-6} \{ 2 \theta (\theta^2 - 24) \sin \theta \cdot \cos \theta + 15 (\theta^2 - 4) \cos^2 \theta + \theta^4 - 27 \theta^2 + 60 \}$$

$$Q = \theta^{-6} \{ 2 [\theta (12 - 5 \theta^2) + 15 (\theta^2 - 4) \cos \theta \cdot \sin \theta + 2 \theta (24 - \theta^2) \cos^2 \theta] \}$$

$$R = \theta^{-6} \{ 2 [\theta (156 - 7 \theta^2) \sin \theta' \cdot \cos \theta + 3 (60 - 17 \theta^2) \cos \theta^2 - 15 (12 - 5 \theta^2)] \}$$

$$S = \theta^{-6} \{ \theta (\theta^4 + 8 \theta^2 - 24) + \theta (7 \theta^2 - 156) \cos^2 \theta + 3 (60 - 17 \theta^2) \sin \theta \cdot \cos \theta \}$$

なお $|\theta| < 0.9$ の時には展開した式

$$\begin{aligned} M = & -\frac{61}{105} \theta + \frac{8}{945} \theta^3 - \frac{2}{10395} \theta^5 + \frac{1}{405405} \theta^7 \\ & - \frac{1}{48648600} \theta^9 \end{aligned}$$

$$N = \frac{16}{15} - \frac{8}{105} \theta^2 + \frac{2}{945} \theta^4 - \frac{1}{31185} \theta^6 + \frac{1}{3243240} \theta^8$$

$$P = -\frac{1}{15} + \frac{2}{105} \theta^2 - \frac{1}{315} \theta^4 + \frac{2}{7425} \theta^6 - \frac{62}{4729725} \theta^8$$

$$Q = -\frac{8}{105} \theta + \frac{16}{945} \theta^3 - \frac{104}{51975} \theta^5 + \frac{256}{2027025} \theta^7$$

$$- \frac{62}{4729725} \theta^9$$

$$R = \frac{14}{15} - \frac{16}{105} \theta^2 + \frac{22}{945} \theta^4 - \frac{608}{311850} \theta^6 + \frac{268}{2837835} \theta^8$$

$$S = \frac{19}{105} \theta - \frac{2}{63} \theta^3 + \frac{1}{275} \theta^5 - \frac{2}{8775} \theta^7 + \frac{34}{3869775} \theta^9$$

5. フーリエ形積分の近似公式の一般的近似概念

今まで結論のみを述べてきたフーリエ形積分近似式作成の原理とその例について見よう。かかる原理より諸氏は式計算の労力のみによりフーリエ形積分の種々の近似式を作ることができる。

ここで述べる原理の第一歩は $\int_A^B f(x) \cdot \left(\frac{\sin ux}{\cos ux} \right) dx$ において与えられた $f(x)$ を多項式で近似し、その多項式と $\frac{\cos ux}{\sin ux}$ との積を数値積分するという単純な原理から出発している。

すなわち積分区間 (A, B) を m 等分し $n+1$ 個の分点において元の関数 $f(x)$ と一致する n 次の多項式

$$\begin{aligned} g(x) = & a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) \\ & + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ & + a_n(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

を考えると、 $a_0, a_1, \dots, a_n$ は $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ の1次式で表わされる。しかしてその微係数 $g'(x_0), g'(x_1), g'(x_n), g''(x_0), \dots, g''(x_n), \dots, g^{(n)}(x_0), \dots, g^{(n)}(x_n)$ はすべて $f(x_0), \dots, f(x_n)$ の1次式で係数は h の幅とその1次結合である。

したがって次の積分は部分積分をほどこして

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} g(x) \left(\frac{\cos ux}{\sin ux} \right) dx &= \left(g(x) \cdot \left(\frac{\sin ux}{u} \right) \right)_{x_0}^{x_n} - \frac{1}{u} \int_{x_0}^{x_n} g'(x) \left(\frac{\sin ux}{\cos ux} \right) dx \\ &= \left(g(x) \cdot \left(\frac{\sin ux}{u} \right) \right)_{x_0}^{x_n} - \frac{1}{u^2} \left(g'(x) \left(\frac{-\cos ux}{\sin ux} \right) \right)_{x_0}^{x_n} \\ &\quad - \frac{1}{u^3} \int_{x_0}^{x_n} g''(x) \left(\frac{-\cos ux}{\sin ux} \right) dx \end{aligned}$$

というように部分積分式で計算すると、最終的には

$$= \frac{1}{u} \left[g(x) \frac{(\sin ux)}{(-\cos ux)} \right]_{x_0}^{x_n} - \frac{1}{u^2} \left[g'(x) \frac{(-\cos ux)}{(-\sin ux)} \right]_{x_0}^{x_n} \\ + \dots + k \cdot \frac{1}{u^n} \int_{x_0}^{x_n} \frac{\sin ux}{\cos ux} dx$$

の形になる。k はそれぞれの場合に応じた符号である。

よって $\int_{x_0}^{x_n} g(x) \frac{\sin ux}{\cos ux} dx$ は $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ の 1 次結合で表わされ、三角関数の加法定理を用いると次のような形に表わされる。

$$\int_A^B g(x) \frac{\sin ux}{\cos ux} dx \\ = \sum_{k=0}^m (f(x_k) \cdot \varphi_1^k(h, \cos uh, \sin uh) \cdot \sin ux \\ + f(x_k) \varphi_2^k(h, \cos uh, \sin uh) \cdot \cos ux_k) \\ + \sum_{k=0}^m (f(x_k) \cdot \psi_1^k(h, \cos uh, \sin uh) \cdot \sin ux_k \\ + f(x_k) \psi_2^k(h, \cos uh, \sin uh) \cdot \cos ux_k)$$

上で一般的な話について述べたが、次に二つの例を具体的に取扱う。

5・1 $f(x)$ を折線で近似する場合

(B, A) を n 等分して各分割点を $A=x_0 < x_1 < \dots < x_n=B$ とするとき、各分点において $f(x)$ と一致する折線を $g(x)$ とする。

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k(x) \cdot B(x_k \leq x \leq x_{k+1})$$

ただし $B(x_k \leq x \leq x_{k+1})$ とは $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ の時 1 で他は 0 である。具体的には $g_k(x) = a_k x + b_k$ である。いま

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(x) \sin uxdx \\ = \left[g_k(x) \left(-\frac{\cos ux}{u} \right) \right]_{x_k}^{x_{k+1}} + \frac{a_k}{u} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos uxdx$$

$a_k = \frac{f_{k+1} - f_k}{h}$ であるから、上の積分は

$$-f_{k+1} \cdot \frac{\cos ux_{k+1}}{u} + f_k \frac{\cos ux_k}{u} \\ + \frac{1}{hu^2} (f_{k+1} - f_k) (\sin ux_{k+1} - \sin ux_k)$$

$\theta = hu$ とすると、さらに上の式は

$$f_{k+1} \cdot \left\{ \cos ux_{k+1} \left(-\frac{1}{\theta} + \frac{\sin \theta}{\theta^2} \right) + \sin ux_{k+1} \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{\cos \theta}{\theta^2} \right) \right\} \\ + f_k \cdot \left\{ \cos ux_k \left(\frac{1}{\theta} - \frac{\sin \theta}{\theta^2} \right) + \sin ux_k \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{\cos \theta}{\theta^2} \right) \right\}$$

これより h について和をとって 2. の内容の式を得る。cos 変換の場合も全く同様である。

5・2 シンプソン法の概念で $f(x)$ を近似する場合 (Filon の方法)

前に結論だけを述べた Filon の近似法を cos 変換の場合の誘導を行なう。

(A, B) を 2n 個の等区間にわけ、すなわち

$$(B-A)/2n = h$$

いま $uh = \theta$, $A + kh = x_k$, $f(A + kh) = f_k$ と置く。

区間 $(x_k - h, x_k + h)$ において $f(x)$ を放物線で近似する。すなわち

$$g_k(x) = a + b(x - x_k) + c(x - x_k)^2$$

を考え、 x_{k-1} , x_k , x_{k+1} で $f(x)$ に一致するように a, b, c を定めると

$$a = f_k$$

$$b = 1/2 h \cdot (f_{k+1} - f_{k-1})$$

$$c = 1/2 h \cdot (f_{k+1} + f_{k-1} - 2f_k)$$

また $g'_k(x) = b + 2c(x - x_k)$ より

$$g'_k(x_{k+1}) = \frac{1}{2h} (3f_{k+1} + f_{k-1} - 4f_k)$$

$$g'_k(x_{k-1}) = \frac{1}{2h} (4f_k - 3f_{k-1} - f_{k+1})$$

ここで

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x) \cos uxdx$$

の代りに

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} g_k(x) \cdot \cos uxdx \equiv I_k$$

を求めて k の Simpson によってもとの積分を近似するのである。

部分積分をほどこして

$$I_k = \left[g_k(x) u^{-1} \sin ux \right]_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} - \frac{1}{u} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} g'_k(x) \sin uxdx \\ = \frac{1}{u} \left[g_k(x) \sin ux + g'_k(x) \frac{1}{u} \cos ux \right]_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \\ - \frac{1}{u^2} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} g''_k(x) \cos uxdx$$

$g''_k(x) = 2C$ より

$$u \cdot I_k = \left[\{ g_k(x) - 2cu^{-2} \} \sin ux \right. \\ \left. + g'_k(x) u^{-1} \cos ux \right]_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}$$

ここに $\theta = hu$ として

$$C = \frac{1}{2h^2} (f_{k+1} + f_{k-1} - 2f_k)$$

を代入すると

$$\left[\{ g_k(x) - 2cu^{-2} \} \sin ux \right]_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \\ = (f_{k+1} - f_{k-1}) \sin ux_k \cdot \cos \theta + \{ (1 - 2\theta^{-2}) (f_{k+1} - f_{k-1}) + 4\theta^{-2} f_k \} \cos ux_k \cdot \sin \theta \\ \left[g_k(x) u^{-1} \cdot \cos ux \right]_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \\ = 2\theta^{-1} (f_{k+1} + f_{k-1} - 2f_k) \cos ux_k \cdot \cos \theta$$

$$-\theta^{-1}(f_{k+1}-f_{k-1})\sin ux_k\sin\theta$$

よって

$$\begin{aligned} u\cdot\theta\cdot I_k &= (f_{k+1}-f_{k-1})(\theta\cos\theta-\sin\theta)\sin ux_k \\ &+ (f_{k+1}+f_{k-1})(\theta\sin\theta-2\theta^{-1}\sin\theta+2\cos\theta)\cdot \\ &\cos ux_k + 4f_k(\theta^{-1}\sin\theta-\cos\theta)\cos ux_k \end{aligned}$$

$ux_k = ux_{k+1} - \theta$ であるから f_{k+1} の係数は三角関数の加法定理を用いて計算すると

$$\begin{aligned} &(1+\cos^2\theta-2\theta^{-1}\sin\theta\cos\theta)\cos ux_{k+1} \\ &+ (\theta+\sin\theta\cos\theta-2\theta^{-1}\sin^2\theta)\sin ux_{k+1} \end{aligned}$$

また $ux_k = ux_{k-1} + \theta$ より f_{k-1} の係数は

$$\begin{aligned} &(1+\cos^2\theta-2\theta^{-1}\sin\theta\cos\theta)\cos ux_{k-1} \\ &- (\theta+\sin\theta\cos\theta-2\theta^{-1}\sin^2\theta)\sin ux_{k-1} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \alpha &= \theta^{-3}(\theta^2 + \theta\sin\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta) \\ \beta &= 2\theta^{-3}(\theta(1+\cos^2\theta) - 2\sin\theta\cos\theta) \\ \gamma &= 4\theta^{-3}(\sin\theta - \theta\cos\theta) \end{aligned}$$

とおくと $h = \theta/u$ より

$$\begin{aligned} I_k &= h^3 \{ \alpha \{ f_{k+1} \sin ux_{k+1} + f_{k-1} \cos ux_{k-1} \} \\ &+ \gamma f_k \cos ux_k \} \end{aligned}$$

よって $h=0, \dots, 2n-2$ について加えると (3) の内

容の式) が出る。

6. 計算例

$f(x) = e^{-x}$ として、この $\sin$ 変換について計算した例についてその結果を述べる。

$$\int_0^\infty e^{-x} \sin ux dx = \frac{u}{1+u^2}$$
 を台形公式, Simpson,

Filon, 修正 Filon の方法を用いて比較した一例が第 1, 2 表である。これから近似誤差は積分上限の取り方にはあまり関係しない。ただ step の取り方のみが非常に大きく関係することである。この相対誤差特性は第 1, 2, 3 図に示すとおりである。

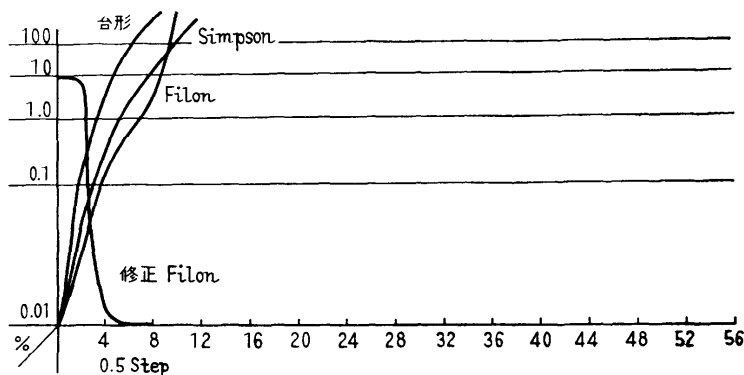
これより台形公式, Simpson 法などは周波数が大きくなるにつれて単調に増加する。また Filon 法はある値で変曲点を持っている。この変曲点に対応する周波数を Filon の方法の適応限界と認め、それより大きい周波数についてはこの方法を適応すべきでない。また修正 Filon の方法については第 1, 2, 3 図で見るごとく、一般的に低周波では誤差があるが高周波になるにしたがって、ほとんど相対誤差は 0 にな

第 1 表

$\int_0^\infty = \int_0^{20} e^{-x} \cdot \sin nx dx$	真 値	台形公式	Simpson	Fillon	修正 Filon	台 形	相対誤差 シンプソ ン	Filon	修 正 Filon
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.5000E 00	0.400000E-00	0.399615E-00	0.400029E-00	0.400029E-00	0.399174E-00	0.10	0.01	0.01	0.21
0.1000E 01	0.500000E-00	0.499199E-00	0.500030E-00	0.500030E-00	0.498963E-00	0.16	0.01	0.01	0.21
0.1500E 01	0.461538E-00	0.460294E-00	0.461544E-00	0.461544E-00	0.460561E-00	0.27	0.00	0.00	0.21
0.2000E 01	0.400000E-00	0.398315E-00	0.399985E-00	0.399984E-00	0.399134E-00	0.42	0.00	0.00	0.22
0.2500E 01	0.344828E-00	0.342729E-00	0.344817E-00	0.344812E-00	0.344083E-00	0.61	0.00	0.00	0.22
0.3000E 01	0.300000E-00	0.297502E-00	0.300012E-00	0.300002E-00	0.299371E-00	0.83	0.00	0.00	0.21
0.3500E 01	0.264151E-00	0.261243E-00	0.264181E-00	0.264163E-00	0.263610E-00	1.10	0.01	0.00	0.20
0.4000E 01	0.235294E-00	0.231957E-00	0.235328E-00	0.235299E-00	0.234810E-00	1.42	0.01	0.00	0.21
0.4500E 01	0.211765E-00	0.207995E-00	0.211801E-00	0.211757E-00	0.211321E-00	1.78	0.02	0.00	0.21
0.5000E 01	0.192308E-00	0.188118E-00	0.192362E-00	0.192299E-00	0.191907E-00	2.18	0.03	0.00	0.21
0.5500E 01	0.176000E-00	0.171399E-00	0.176087E-00	0.176001E-00	0.175646E-00	2.61	0.05	0.00	0.20
0.6000E 01	0.162162E-00	0.157142E-00	0.162283E-00	0.162170E-00	0.161846E-00	3.10	0.07	0.00	0.19
0.6500E 01	0.150289E-00	0.144837E-00	0.150440E-00	0.150292E-00	0.149997E-00	3.63	0.10	0.00	0.19
0.7000E 01	0.140000E-00	0.134115E-00	0.140183E-00	0.139996E-00	0.139725E-00	4.20	0.13	0.00	0.20
0.7500E 01	0.131004E-00	0.124694E-00	0.131235E-00	0.131000E-00	0.130751E-00	4.82	0.18	0.00	0.19
0.8000E 01	0.123077E-00	0.116345E-00	0.123369E-00	0.123080E-00	0.122850E-00	5.47	0.24	0.00	0.18
0.8500E 01	0.116041E-00	0.108880E-00	0.116400E-00	0.116049E-00	0.115837E-00	6.17	0.31	0.01	0.18
0.9000E 01	0.109756E-00	0.102156E-00	0.110185E-00	0.109761E-00	0.109565E-00	6.92	0.39	0.00	0.17
0.9500E 01	0.104110E-00	0.960703E-01	0.104616E-00	0.104111E-00	0.104105E-00	7.72	0.49	0.00	0.00
0.1000E 02	0.990099E-01	0.905366E-01	0.996106E-01	0.990132E-01	0.990061E-01	8.56	0.61	0.00	0.00
0.1050E 02	0.943820E-01	0.834752E-01	0.950946E-01	0.943931E-01	0.943833E-01	9.44	0.75	0.01	0.00
0.1100E 02	0.901639E-01	0.808157E-01	0.909994E-01	0.901810E-01	0.901630E-01	10.37	0.93	0.02	0.00
0.1150E 02	0.863039E-01	0.765064E-01	0.872713E-01	0.863221E-01	0.863048E-01	11.35	1.12	0.02	0.00
0.1200E 02	0.827586E-01	0.725115E-01	0.838729E-01	0.827777E-01	0.827553E-01	12.38	1.35	0.02	0.00
0.1250E 02	0.794913E-01	0.687978E-01	0.807751E-01	0.795171E-01	0.794885E-01	13.45	1.62	0.03	0.00
0.1300E 02	0.764706E-01	0.653290E-01	0.779472E-01	0.765080E-01	0.764721E-01	14.57	1.93	0.05	0.00
0.1350E 02	0.736898E-01	0.620717E-01	0.753583E-01	0.737175E-01	0.736731E-01	15.74	2.29	0.06	0.00
0.1400E 02	0.710660E-01	0.590044E-01	0.729851E-01	0.711204E-01	0.710664E-01	16.97	2.70	0.08	0.00
0.1450E 02	0.686391E-01	0.561136E-01	0.708144E-01	0.687007E-01	0.686362E-01	18.25	3.17	0.09	0.00
0.1500E 02	0.663717E-01	0.533839E-01	0.688361E-01	0.664453E-01	0.663697E-01	19.57	3.71	0.11	0.00

第 2 表

$\int_0^\infty = \int_0^{10} e^{-x} \sin ux dx$	真 値	台形公式	Simpson	Filon	修正 Filon	台 形	相対誤差 シンプソ	Filon	修 正 Filon
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.5000E 00	0.400000E-00	0.399583E-00	0.399999E-00	0.399999E-00	0.399144E-00	0.10	0.00	0.00	0.21
0.1000E 01	0.500000E-00	0.499166E-00	0.499999E-00	0.499999E-00	0.498932E-00	0.17	0.00	0.00	0.21
0.1500E 01	0.461538E-00	0.460288E-00	0.461537E-00	0.461537E-00	0.460555E-00	0.27	0.00	0.00	0.21
0.2000E 01	0.400000E-00	0.398333E-00	0.400001E-00	0.399999E-00	0.399150E-00	0.42	0.00	0.00	0.21
0.2500E 01	0.344828E-00	0.342743E-00	0.344832E-00	0.344827E-00	0.344098E-00	0.60	0.00	0.00	0.21
0.3000E 01	0.300000E-00	0.297497E-00	0.300010E-00	0.299999E-00	0.299368E-00	0.83	0.00	0.00	0.21
0.3500E 01	0.264151E-00	0.261229E-00	0.264169E-00	0.264150E-00	0.263598E-00	1.11	0.01	0.00	0.21
0.4000E 01	0.235294E-00	0.231953E-00	0.235323E-00	0.235294E-00	0.234805E-00	1.42	0.01	0.00	0.21
0.4500E 01	0.211765E-00	0.208004E-00	0.211808E-00	0.211764E-00	0.211328E-00	1.78	0.02	0.00	0.21
0.5000E 01	0.192308E-00	0.188126E-00	0.192370E-00	0.192307E-00	0.191915E-00	2.17	0.03	0.00	0.20
0.5500E 01	0.176000E-00	0.171396E-00	0.176085E-00	0.176000E-00	0.175645E-00	2.62	0.05	0.00	0.20
0.6000E 01	0.162162E-00	0.157134E-00	0.162276E-00	0.162162E-00	0.161839E-00	3.10	0.07	0.00	0.20
0.6500E 01	0.150289E-00	0.144836E-00	0.150437E-00	0.150289E-00	0.149994E-00	3.63	0.10	0.00	0.20
0.7000E 01	0.140000E-00	0.134121E-00	0.140188E-00	0.140000E-00	0.139730E-00	4.20	0.13	0.00	0.19
0.7500E 01	0.131004E-00	0.124698E-00	0.131240E-00	0.131005E-00	0.130756E-00	4.81	0.18	0.00	0.19
0.8000E 01	0.123077E-00	0.116341E-00	0.123367E-00	0.123078E-00	0.122849E-00	5.47	0.24	0.00	0.19
0.8500E 01	0.116041E-00	0.108874E-00	0.116395E-00	0.116043E-00	0.115831E-00	6.18	0.30	0.00	0.18
0.9000E 01	0.109756E-00	0.102157E-00	0.110183E-00	0.109759E-00	0.109564E-00	6.92	0.39	0.00	0.18
0.9500E 01	0.104110E-00	0.960754E-01	0.104620E-00	0.104114E-00	0.104109E-00	7.72	0.49	0.00	0.00
0.1000E 02	0.990099E-01	0.905387E-01	0.996143E-01	0.990169E-01	0.990097E-01	8.56	0.61	0.01	0.00
0.1050E 02	0.943820E-01	0.854716E-01	0.950931E-01	0.943916E-01	0.943819E-01	9.44	0.75	0.01	0.00
0.1100E 02	0.901639E-01	0.806119E-01	0.909952E-01	0.901769E-01	0.901638E-01	10.37	0.92	0.01	0.00
0.1150E 02	0.863039E-01	0.765077E-01	0.872702E-01	0.863211E-01	0.863038E-01	11.35	1.12	0.02	0.00
0.1200E 02	0.827586E-01	0.725156E-01	0.838762E-01	0.827809E-01	0.827586E-01	12.38	1.35	0.03	0.00
0.1250E 02	0.794913E-01	0.687987E-01	0.807778E-01	0.795198E-01	0.794912E-01	13.45	1.62	0.04	0.00
0.1300E 02	0.764706E-01	0.653254E-01	0.779457E-01	0.765065E-01	0.764705E-01	14.57	1.93	0.05	0.00
0.1350E 02	0.736698E-01	0.620691E-01	0.753549E-01	0.737142E-01	0.736698E-01	15.75	2.29	0.06	0.00
0.1400E 02	0.710660E-01	0.590063E-01	0.729846E-01	0.711199E-01	0.710660E-01	16.97	2.70	0.08	0.00
0.1450E 02	0.686391E-01	0.561170E-01	0.708172E-01	0.687035E-01	0.686390E-01	18.24	3.17	0.09	0.00
0.1500E 02	0.663717E-01	0.533839E-01	0.688381E-01	0.664473E-01	0.663717E-01	19.57	3.72	0.11	0.00



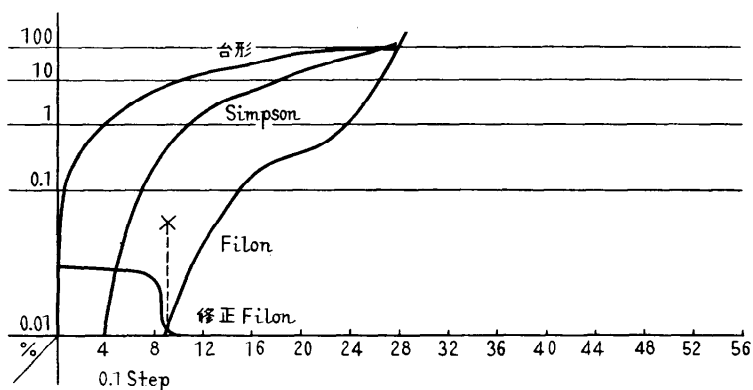
第 1 図

る。また、その誤差特性のグラフより急減少するところがある。この点は step 幅を h としたとき、だいたい $h \cdot u \equiv \text{const}$ の関係をみだしている。

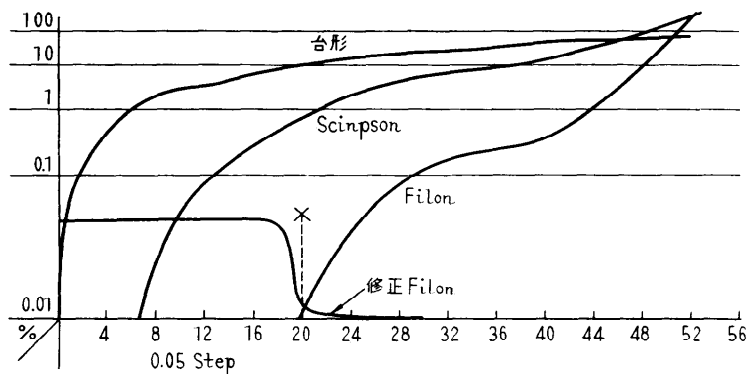
したがってフーリエ積分の数値計算には第 2, 3 図に示した $\times$ 点に相等する周波数を限界として、それより小さい周波数に対しては Filon の方法を用い、それより高い周波数に対しては修正 Filon の方法を用

いるのが最良の方法である。この限界点の特性は第 4 図である。

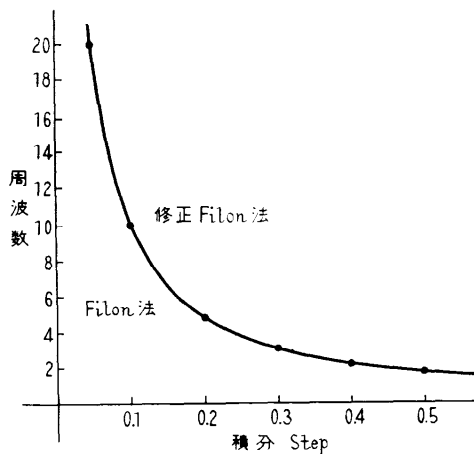
なお付記として本計算は IBM 社の 7090 電子計算機で行なったのであるが、計算時間は 0.5~0.05 step の間では 10 秒から 30 秒ぐらいである。



第 2 図



第 3 図



第 4 図

参考文献

- 1) Z. Kopal: Numerical Analysis
- 2) 河田竜夫: フーリエ変換とラプラス変換の応用 (岩波現代応用数学講座)
- 3) E.A. Flinn: Journal of association For computer machinery, Vol. 7, (1960)
- 4) 州之内源一郎: フーリエ解析 (共立現代数学講座)
- 5) A. Zygmund: Trigonometric Series
- 6) 藤原松三郎: 微分積分学 第1巻

(昭和 37 年 12 月 10 日受付)