

常微分方程式の数値解法における不安定現象に 対する一対策——平滑子の理論, 設計公式および使用例*

伊 理 正 夫**

1. ま え が き

常微分方程式の数値解法公式にも各種あるが、その中で簡単な割に精度がよいものに中点則 (mid-point rule; 改良オイラー法 modified Euler method と呼ばれることもある) や Milne 法などがある。ところが、これらの方法である種の微分方程式を解くと、得られる数値解にもとの方程式の解とは全然無縁な振動成分が現れ、徐々に拡大し、遂には数値解そのものをそれが完全に塗り潰してしまうようになる。このような異常振動現象 (あるいは不安定現象) は従来 Milne 法などの欠点とされていた [1]。そして、不安定現象を起さないような諸種の公式が提案されたり [2]、また Milne 法については W.E. Milne 自身および R.R. Reynolds によって不安定現象が起きたときそれを適当に抑える方法が考えられたりした [3]。一方、線型多段型公式 (linear multistep method) による数値解に含まれる誤差についての相当詳しい解析が P. Henrici によってなされた [4]。これに対して、移動平均により振動成分を除去するという着想が東京大学の森口繁一教授によって発表された [5]。

不安定現象を起す無縁成分を移動平均により除去する演算子を“平滑子 (filter)”と呼ぶことにする。

本論文では、一般の線型多段型公式に対して、任意の精度の平滑子が存在することを示し、その設計法を定式化し、この平滑子を利用する微分方程式の数値解法の具体的な算法を、中点則および Milne 法について提案し、それに従って二、三の線型および非線型の方程式を解いた結果を示すことによって平滑子の有用性を例証する。

2. 線型多段型公式

まず準備として、予測子 (predictor) や修正子

* A Stabilizing Device for Unstable Numerical Solutions of Ordinary Differential Equations—Design Principle and Applications of a “Filter”, by Masao Iri (University of Tokyo, Tokyo)

** 東京大学工学部計数工数教室

(corrector) としてよく用いられる線型多段型公式とそれによる数値解の性質について、Henrici [4] に述べられている結果をそれより少し一般化された形でまとめておく。

問題は m 元連立 1 階常微分方程式

$$\frac{dy^i}{dx} = f^i(x, y^j) \quad (i, j=1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

を初期条件

$$y^i(a) = \tau^i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (2)$$

のもとに解くこととする。この問題の真の解を $y^i(x)$, $x=a$ から刻み幅 h で解き進んで行ったときの

$$x_n = a + nh \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

における数値解を $y_n^i (y_0^i = \tau^i)$, 数値解に含まれる誤差を

$$e_n^i = y_n^i - y^i(x_n) \quad (i=1, 2, \dots, m; n=0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

とおく。また

$$f_n^i = f^i(x_n, y_n) \quad (5)$$

と書くことにする。

$y_0^i, y_1^i, \dots, y_n^i, \dots, y_{n+k-1}^i$ が求められているとき y_{n+k}^i を求める線型 k 段型公式の一般形は

$$\begin{aligned} \alpha_k y_{n+k}^i + \alpha_{k-1} y_{n+k-1}^i + \dots + \alpha_1 y_{n+1}^i + \alpha_0 y_n^i \\ = h(\beta_k f_{n+k}^i + \beta_{k-1} f_{n+k-1}^i + \dots \\ + \beta_1 f_{n+1}^i + \beta_0 f_n^i) \end{aligned} \quad (i=1, 2, \dots, m; n=0, 1, 2, \dots) \quad (6)$$

である。ここで、 $(\alpha_k, \dots, \alpha_0)$ および $(\beta_k, \dots, \beta_0)$ は公式 (6) を特徴づける定数で、関連したこの多項式 $\rho(\zeta)$ および $\sigma(\zeta)$ を

$$\left. \begin{aligned} \rho(\zeta) &= \alpha_k \zeta^k + \alpha_{k-1} \zeta^{k-1} + \dots + \alpha_1 \zeta + \alpha_0 \\ \sigma(\zeta) &= \beta_k \zeta^k + \beta_{k-1} \zeta^{k-1} + \dots + \beta_1 \zeta + \beta_0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

によって定義すると、(6) が (1) の近似式であるためには

$$\rho(1) = 0, \quad \rho'(1) = \sigma(1) \neq 0 \quad (8)$$

でなければならない。また、 ζ を n を 1 だけ増す演算子とみなせば、(7) を用いて (6) を

$$\rho(\zeta) y_n^i = h \sigma(\zeta) f_n^i$$

$$(i=1, \dots, m; n=0, 1, \dots) \quad (9)$$

と書くこともできる。

差分方程式 (6) の一般解は $(x_{n_0}, y_{n_0}^i)$ の近傍で $f^i(x, y^j)$ が十分穏かにふるまい、 e_n^i が十分小さく、また h も十分小さければ、次のように書ける。

$$y_{n_0+n}^i \sim [a_0^i + a_1^i(nh) + a_2^i(nh)^2 + \dots]_{(1)} \\ + \sum_{\mu=2}^s \zeta_\mu^n [b_{\mu 0}^i + b_{\mu 1}^i(nh) + b_{\mu 2}^i(nh)^2 + \dots]_{(\mu)} \quad (10)$$

$$(i=1, 2, \dots, m;$$

$$n=\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

ただし、 ζ_μ ($\mu=1, 2, \dots, s$) は $\rho(\zeta)=0$ の根 (多重度 p_μ) とする。(8) より

$$\zeta_1=1, \quad p_1=1 \quad (11)$$

なる根は必ず存在する。したがって、

$$\sum_{\mu=2}^s p_\mu = k-1 \quad (12)$$

である。

(10) の右辺の $[\dots]_{(1)}$ は、 ζ_1 なる根に対応する成分で、求める近似解である。そして、 $z^i(x)$ を $(x_{n_0}, y_{n_0}^i)$ を通る (1) の解、すなわち、

$$\frac{dz^i(x)}{dx} = f^i(x, z^i(x)), \quad z^i(x_{n_0}) = y_{n_0}^i \quad (13)$$

を満足するものとする、

$$\left. \begin{aligned} [\dots]_{(1)} - z^i(x_{n_0+n}) &\sim h^p e_1^i(x_{n_0+n}), \\ \frac{de_1^i(x)}{dx} &= \sum_{j=1}^m g_j^i(x) e_j^i(x) \\ &\quad - C \left(\frac{d}{dx} \right)^p z^i(x), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$e_1^i(x_{n_0}) = 0$$

で近似的に評価できる。ここで、 x の関数 $g_j^i(x)$ 、定数 C 、 p (p は自然数) は

$$\left. \begin{aligned} g_j^i(x) &= \left[\frac{\partial f^i(x, z^l)}{\partial z^j} \right]_{z^l=z^i(x)}, \\ \{\rho(e^h) - h\sigma(e^h)\} / \sigma(1) &= Ch^{p+1} + O(h^{p+2}) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

で定義される。

(10) の右辺の $\zeta_\mu^n [\dots]_{(\mu)}$ という項は、 ζ_μ ($\mu \neq 1$) なる根に対応する成分で、求める近似解とは無縁な成分である。この項から ζ_μ^n を除いた残りの因子は次の関係式 (16) を近似的に満足している。ただし、 ζ_μ は $\rho(\zeta)=0$ の p_μ (≥ 1) 重根で、 $\sigma(\zeta)=0$ の q_μ ($\geq p_\mu - 1$) 重根であるとする。

$$\left. \begin{aligned} [\dots]_{(\mu)} \sim e_\mu^i(x_{n_0+n}), \\ \left(\frac{d}{dx} \right)^{p_\mu} e_\mu^i(x) = 0 \quad (p_\mu \leq q_\mu \text{ のとき}), \\ \left(\frac{d}{dx} \right)^{p_\mu} e_\mu^i(x) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$= \lambda_\mu \left(\frac{d}{dx} \right)^{q_\mu} \left(\sum_{j=1}^m g_j^i(x) e_\mu^j(x) \right) \quad \left| \begin{array}{l} (p_\mu = q_\mu + 1 \text{ のとき}). \end{array} \right.$$

(16) 式中の λ_μ は根 ζ_μ に対応する“成長係数 (growth parameter)”と呼ばれ、

$$\lambda_\mu = \{\sigma^{(q_\mu)}(\zeta_\mu) / q_\mu!\} / \{\zeta_\mu^{p_\mu - q_\mu} \sigma^{(p_\mu)}(\zeta_\mu) / p_\mu!\} \quad (17)$$

で定義される。(必ず $\lambda_1=1$ である。)

これらの無縁成分が発生する原因としては、

- (1) y_n^i の出発値にすでにその成分が存在した;
 - (2) 丸め誤差によってその成分が励起された;
 - (3) (14), (16) などの近似評価では省略した項の影響によって各成分間に相互作用が生じた;
- などが考えられる。

3. 不安定現象

公式 (6) による解 (10) は次のような場合不安定現象を呈する。(1) $|\zeta_\mu| < 1$ なる根については対応する無縁成分はたとえ出現しても忽ち減衰してしまうから問題ない。

(a) $|\zeta_\mu| > 1$ なる根があるとき: —(10) の右辺の $\zeta_\mu^n [\dots]_{(\mu)}$ という項はいったん励起されると略 ζ_μ^n の程度で急激に増大する。

(b) $|\zeta_\mu|=1$, $p_\mu \geq 2$ なる根があるとき: —(10) の右辺の $\zeta_\mu^n [\dots]_{(\mu)}$ という項の $[\dots]_{(\mu)} \sim e_\mu^i(x)$ という因子の中に $x^{p_\mu-1}$ の程度で増大する成分が励起されうる ((16) 参照; $p_\mu > q_\mu + 1$ のときにも同様)。

(c) $|\zeta_\mu|=1$, $p_\mu=1$, $q_\mu=0$ (これが普通の場合) で、行列 $[\lambda_\mu g_j^i(x)]$ の固有値の中に実部が正になるものがあるとき: —(10) の右辺の $\zeta_\mu^n [\dots]_{(\mu)}$ という項が励起されると $[\dots]_{(\mu)} \sim e_\mu^i(x)$ という因子がその付近では

$$\frac{de_\mu^i(x)}{dx} = \lambda_\mu \sum_{j=1}^m g_j^i(x) e_\mu^j(x) \quad (18)$$

に従って増大する。

以上の中、(a), (b) は解こうとする方程式の性質とは無関係に現れうる (そして実際問題としては必ず現れる) 不安定現象であって“強い不安定 (strong instability)”と呼ばれる。これに対して (c) は解くべき方程式の右辺の関数の性質 ($g_j^i(x) = \frac{\partial f^i}{\partial y^j}$ の固有値の偏角) に依存するので“条件付不安定”あるいは“数値的不安定 (numerical instability)”と呼ばれる。

中点則:

$$y_{n+2}^i - y_n^i = 2hf_{n+1}^i \quad (19)$$

では

$$\left. \begin{aligned} \rho(\zeta) &= \zeta^2 - 1, & \sigma(\zeta) &= 2\zeta; \\ \zeta_1 &= 1, & p_1 &= 1, & q_1 &= 0, & \lambda_1 &= 1; \\ \zeta_2 &= -1, & p_2 &= 1, & q_2 &= 0, & \lambda_2 &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

であり, Milne 法 (の修正子):

$$y_{n+2}^i - y_n^i = \frac{h}{3}(f_{n+2}^i + 4f_{n+1}^i + f_n^i) \quad (21)$$

では

$$\left. \begin{aligned} \rho(\zeta) &= \zeta^2 - 1, & \sigma(\zeta) &= \frac{1}{3}(\zeta^2 + 4\zeta + 1); \\ \zeta_1 &= 1, & p_1 &= 1, & q_1 &= 0, & \lambda_1 &= 1; \\ \zeta_2 &= -1, & p_2 &= 1, & q_2 &= 0, & \lambda_2 &= -\frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

であるから, 両者共負の成長係数 λ_2 をもつ $\rho(\zeta)=0$ の根 $\zeta_2=-1$ がある. そこで, これらの方法にしたがって数値積分を行なうとき, $g_j^i(x)$ の固有値の中に実部が負になるものとするとその付近では数値的に不安定となる. (一方, よく知られているように, $g_j^i(x)$ の固有値の中に実部が正になるものとすると, その付近では微分方程式の解自体が不安定になることにも注意すべきである.)

4. 平滑子の設計理論および設計公式

(10) のような成分に分解される数列 $\{y_n\}$ が与えられたとき, ある演算子をそれに作用させてその中の無縁成分を所望のオーダーまで除去し, 有効な成分は所望のオーダーまで損わずに保存するようにすることを考えてみる. そのようにして得られる新しい数列を $\{y_n^{i*}\}$ とする. ここでは線型変換

$$Y: \{y_n^i\} \longrightarrow \{y_n^{i*}\} \quad (23)$$

のみを考える. さらに, 一つの y_n^{i*} を定めるためには有限個の y_n^i の値だけしか必要でないとする. つまり, ζ を n を 1 だけ増す演算子 (したがって ζ^{-1} は n を 1 だけ減ずる演算子) とし, $P(\zeta)$ を ζ の適当な多項式とすると, 変換 (23) を表わす演算子 (これを“平滑子 (filter)”と呼ぶことにする) は, K をある整数として,

$$Y(\zeta) = \zeta^{-K} P(\zeta) \quad (24)$$

という形に書かれるとする.

平滑子 $Y(\zeta)$ を設計するに際して, 次の条件を与える ((10) 参照).

1. y_n^i の中の無縁成分 $\zeta_\mu^n [\cdots]_{(\mu)}$ ($\mu \neq 1$) はそれぞれ $h^{M_\mu-1}$ のオーダーまで除去され, y_n^{i*} の中には $O(h^{M_\mu})$ が残るだけである.

2. y_n^i の中の有効成分 $[\cdots]_{(1)}$ は h^N のオーダーまで保存され, 損われるのは $O(h^{N+1})$ である.
3. 整数 K はあらかじめ定めておく.

上記3条件より $Y(\zeta)$ の形を決定するために差分学でよく知られた次の定理 (およびその系) を用いる.

定理: ζ を n を 1 だけ増す演算子, λ をある複素数, $P(\zeta)$ を ζ のある多項式とする. このとき, 整数 $M \geq 2$ に対して,

$$\begin{aligned} P(\zeta)[n(n-1)\cdots(n-M+2)\lambda^n] \\ = P(\lambda)[n(n-1)\cdots(n-M+2)\lambda^n] \\ + \lambda P'(\lambda) \left[\binom{M-1}{1} n(n-1)\cdots(n-M+3)\lambda^n \right] \\ + \lambda^2 P''(\lambda) \left[\binom{M-1}{2} n(n-1)\cdots(n-M+4)\lambda^n \right] \\ \cdots \cdots \cdots \\ + \lambda^l P^{(l)}(\lambda) \left[\binom{M-1}{l} n\cdots(n-M+l+2)\lambda^n \right] \\ \cdots \cdots \cdots \\ + \lambda^{M-1} P^{(M-1)}(\lambda) \lambda^n. \end{aligned} \quad (25)$$

特に, $M=1$ に対しては,

$$P(\zeta)\lambda^n = P(\lambda)\lambda^n. \quad (26)$$

系: K をある整数, 他の記号は上の定理のままとすると,

$$Y(\zeta) = \zeta^{-K} P(\lambda) \quad (27)$$

が

$$\begin{aligned} Y(\zeta)[n^l \lambda^n] &= 0 \\ (\lambda \neq 0; l=0, 1, \cdots, M-1) \end{aligned} \quad (28)$$

を満足するための必要十分条件は

$$Y(\lambda) = Y'(\lambda) = \cdots = Y^{(M-1)}(\lambda) = 0, \quad (29)$$

すなわち, $Q(\zeta)$ を ζ の適当な多項式として,

$$Y(\zeta) = \zeta^{-K} (\zeta - \lambda)^M Q(\zeta) \quad (30)$$

と書けることである.

上の定理の系および条件 1 により, 平滑子 $Y(\zeta)$ は

$$\left. \begin{aligned} Y(\zeta) &= \zeta^{-K} \tau(\zeta) \omega(\zeta), \\ \tau(\zeta) &= \prod_{\mu=2}^M (\zeta - \zeta_\mu)^{M_\mu}, \\ \omega(\zeta) &= \zeta \text{ のある多項式} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

という形でなければならないこと, またこのとき

$$\begin{aligned} Y(\zeta) y_{n_0+n}^i &\sim Y(\zeta) [\cdots]_{(1)} \\ &+ \sum_{\mu=2}^M [b_{\mu M_\mu} \zeta_\mu^{n+M_\mu} Y^{(M_\mu)}(\zeta_\mu) h^{M_\mu} + O(h^{M_\mu+1})] \end{aligned} \quad (32)$$

となることがわかる. $\tau(1) \neq 0$ であることに注意すべきである. また (32) 式中の $b_{\mu M_\mu}^i$ は大略

$$b_{\mu} M_{\mu}^i \sim \frac{1}{M_{\mu}!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{M_{\mu}} e_{\mu}^i(x) \quad (33)$$

程度の大きさと考えてよい。

条件2が成り立つためには、 $Y(\zeta)-1$ が $(\zeta-1)^{N+1}$ という因子を含むことが必要にして十分であることも上の定理の系からわかる。すなわち、 $Y(\zeta)$ は $\zeta=1$ で正則な適当な有理関数 $\psi(\zeta)$ を選んで、

$$Y(\zeta)=1+\zeta^{-K}(\zeta-1)^{N+1}\psi(\zeta) \quad (34)$$

という形に表わされなければならない。 $(K \geq 0)$ のときは $\psi(\zeta)$ は多項式である。

(31) および (34) より関係式

$$\omega(\zeta)=\frac{\zeta^K}{\tau(\zeta)}+\frac{(\zeta-1)^{N+1}\psi(\zeta)}{\tau(\zeta)} \quad (35)$$

が得られるが、(35)の左辺は多項式、右辺は両項とも $\zeta=1$ で正則で第1項は既知である。そこで、

$$J=\zeta-1 \quad (36)$$

という変数変換によって変数を ζ から J に変え、

(35)の右辺を J について Maclaurin 展開した形を

$$\left. \begin{aligned} \frac{\zeta^K}{\tau(\zeta)} &= \frac{(1+J)^K}{\tau(1+J)} = \tau_0 + \frac{\tau_1}{1!}J + \dots \\ &\dots + \frac{\tau_N}{N!}J^N + \frac{\tau_{N+1}}{(N+1)!}J^{N+1} \\ &\quad + O(J^{N+2}), \\ \frac{(\zeta-1)^{N+1}\psi(\zeta)}{\tau(\zeta)} &= \frac{J^{N+1}\psi(1+J)}{\tau(1+J)} \\ &= \frac{\psi(1)}{\tau(1)}J^{N+1} + O(J^{N+2}) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

とすると、 $\omega(\zeta)=\omega(1+J)$ は J の多項式として少くとも J^N のオーダーまでは $\zeta^K/\tau(\zeta)=(1+J)^K/\tau(1+J)$ の展開と一致しなければならないことになる。また、そうならいば(35)を満足するように $\psi(\zeta)$ を選ぶことができる。もちろん、 $\omega(\zeta)$ としては J (あるいは ζ)の N 次式を選ぶのが最も簡単であるから以後そのようにする。

$$\omega(\zeta)=\omega(1+J)$$

$$= \tau_0 + \frac{\tau_1}{1!}J + \frac{\tau_2}{2!}J^2 + \dots + \frac{\tau_N}{N!}J^N. \quad (38)$$

そしてこのとき

$$\psi(1)=\frac{\tau_{N+1}}{(N+1)!}\tau(1) \quad (39)$$

であるから、結局

$$Y(\zeta)y_{n_0+n}^i$$

$$\begin{aligned} &\sim [a_0^i + a_1^i(nh) + a_2^i(nh)^2 + \dots + a_N^i(nh)^N \\ &\quad + (1+\tau_{N+1}\tau(1))a_{N+1}^i(nh)^{N+1} + O(h^{N+2})] \\ &\quad + \sum_{\mu=2}^s [b_{\mu} M_{\mu}^i \zeta_{\mu}^{n+M_{\mu}} Y^{(M_{\mu})}(\zeta_{\mu}) h^{M_{\mu}} + O(h^{M_{\mu}+1})] \end{aligned} \quad (40)$$

を得る。(40)の右辺の下線を施した部分が、それぞれ、平滑子 $Y(\zeta)$ による“有効成分の乱れ”および“残留無縁成分”の主要項を表わす。

このようにして、 K, N, M_{μ} ($\mu=2, \dots, s$)を与えて平滑子 $Y(\zeta)$ を設計する公式(31)、(38)(および(37)の前半)が求められた。 $\tau(\zeta)$ の次数は $\sum_{\mu=2}^s M_{\mu}$ 、 $\omega(\zeta)$ の次数は N (特別の場合 ζ^N の係数が0になることもありうる)であるから $Y(\zeta)$ は一般に ζ^{-K} より始まって $\zeta^{N+\sum_{\mu=2}^s M_{\mu}-K}$ まで含む。そこで $Y(\zeta)$ は

$K \leq 0$ であれば前進差分のみで表わされ、

$K \geq N + \sum_{\mu=2}^s M_{\mu}$ であれば後退差分のみで表わされ、

$K = \frac{1}{2}(N + \sum_{\mu=2}^s M_{\mu})$ にとれば中心差分のみで表わされる。

$K > N + \sum_{\mu=2}^s M_{\mu}$ にとると、一種の外挿公式が得られることも明らかである。

最も実用性があると思われる中点則および Milne 法を特殊な場合として含む $\rho(\zeta)=\zeta^2-1$ について、 K, N, M_2 のいくつかの組み合わせに対する平滑子の設計例を以下に示す((19)~(22)参照)。

$$\rho(\zeta)=\zeta^2-1, \quad \zeta_1=1, \quad \zeta_2=-1.$$

$$M_2=M \text{ とおく.}$$

○ $M=1, N=1$: —

$$\left\{ \begin{aligned} \tau(\zeta) &= \zeta - \zeta_2 = \zeta + 1 = 2 + J = 2\left(1 + \frac{J}{2}\right), \\ [\tau(\zeta)]^{-1} &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{J}{2} + \frac{J^2}{4} + \dots\right); \end{aligned} \right.$$

$K=0$:

$$\begin{aligned} Y(\zeta) &= \frac{1}{4}(3-\zeta)(\zeta+1) = \frac{1}{4}(-\zeta^2+2\zeta+3) \\ &= 1 - \frac{J^2}{4}; \end{aligned}$$

$K=1(M=2)$ に相当する結果が得られる:

$$Y(\zeta) = \frac{1}{4\zeta}(\zeta+1)^2 = \frac{1}{4}(\zeta+2+\zeta^{-1}) = 1 + \frac{1}{4}\delta^2;$$

$K=2$:

$$\begin{aligned} Y(\zeta) &= \frac{1}{4\zeta^2}(3\zeta+1)(\zeta+1) = \frac{1}{4}(3+4\zeta^{-1}+\zeta^{-2}) \\ &= 1 - \frac{J^2}{4}. \end{aligned}$$

○ $M=2, N=2$: —

$$\left\{ \begin{aligned} \tau(\zeta) &= (\zeta - \zeta_2)^2 = (\zeta + 1)^2 = 4\left(1 + J + \frac{J^2}{4}\right), \\ [\tau(\zeta)]^{-1} &= \frac{1}{4}\left(1 - J + \frac{3}{4}J^2 - \frac{1}{2}J^3 + \frac{5}{16}J^4 + \dots\right); \end{aligned} \right.$$

$K=0$:

$$\begin{aligned} Y(\zeta) &= \frac{1}{16}(3\zeta^4 - 4\zeta^3 - 6\zeta^2 + 12\zeta + 11) \\ &= 1 + \frac{1}{2}J^3 + \frac{3}{16}J^4; \end{aligned}$$

$K=1$ ($M=3$ に相当する結果が得られる):

$$\begin{aligned} Y(\zeta) &= \frac{1}{16\zeta}(3-\zeta)(\zeta+1)^3 \\ &= \frac{1}{16}(-\zeta^3 + 6\zeta + 8 + 3\zeta^{-1}) \\ &= 1 - \frac{1}{\zeta}\left(\frac{1}{4}J^3 + \frac{1}{16}J^4\right); \end{aligned}$$

$K=2$ ($N=3$ に相当する結果が得られる):

$$\begin{aligned} Y(\zeta) &= \frac{1}{16}(-\zeta^2 + 4\zeta + 10 + 4\zeta^{-1} - \zeta^{-3}) \\ &= 1 - \frac{1}{16}J^4 \end{aligned}$$

$K=3$ ($M=3$ に相当する結果が得られる):

$$\begin{aligned} Y(\zeta) &= \frac{1}{16}(3\zeta + 8 + 6\zeta^{-1} - \zeta^{-3}) \\ &= 1 + \frac{1}{16\zeta^3}(4J^3 + 3J^4); \end{aligned}$$

$K=4$:

$$\begin{aligned} Y(\zeta) &= \frac{1}{16}(11 + 12\zeta^{-1} - 6\zeta^{-2} - 4\zeta^{-3} + 3\zeta^{-4}) \\ &= 1 - \frac{1}{2}J^3 + \frac{3}{16}J^4. \end{aligned} \quad (41)$$

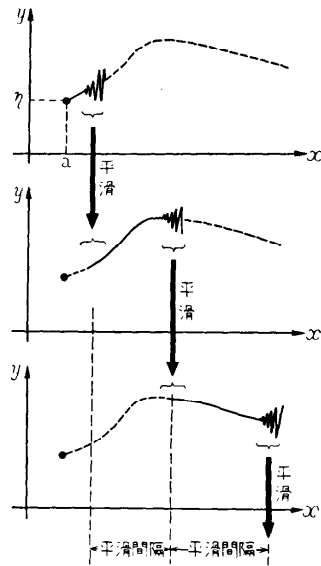
○ $M=2, N=4, K=6$: —

$$\begin{aligned} Y(\zeta) &= \frac{1}{64}(57 + 30\zeta^{-1} - 45\zeta^{-2} + 20\zeta^{-3} \\ &\quad + 15\zeta^{-4} - 18\zeta^{-5} + 5\zeta^{-6}). \end{aligned} \quad (42)$$

5. 平滑子の使用法

前節で設計法が確立された平滑子の利用し方は種々考えられることと思うが、次のようなやり方はその最も効果的なものの一つであろう。

まず通常行なわれているやり方で方程式 (1) の積分を初期値 (2) のもとに公式 (6) を用いてしばらく進行させる。平滑を行なうのに十分な数の y_n^i が得られたら、平滑を行なって新しい ($k-1$) 組の相続く y_n^{i*} を作る。この y_n^{i*} を出発値として公式 (6) を用いて積分を進める。積分が進行するにつれて無縁成分がある程度増大して来たら再び平滑を行なってそれを洗い落とし、その結果を出発値として積分を進行させる、……、ということを繰り返す。この手順を象徴的に描いたのが第 1 図である (もちろん無縁成分は図にみられるより遙かに小さいうちに除去しなければなら



第 1 図

ない)。

このような方法で平滑子を使用する際の K, N, M_μ ($\mu=2, \dots, s$) の選び方は、たとえば次のようにすればよいであろう。まず、平滑子を作動させたときの有効成分の乱れが打ち切り誤差より小さければ、その乱れの悪影響はないとみてよいから、 N は用いる数値積分公式の打ち切り誤差のオーダー ((15) 式中の p) に等しくとればよい。 M_μ は、 $|\zeta_\mu| < 1$ に対しては $M_\mu = 0$ にしておいて差支えないが、 $|\zeta_\mu| \geq 1$ に対しては $M_\mu = 2$ くらいが適当ではないかと思われる。また、 $Y(\zeta)$ が後退差分のみで表わされていた方が計算手順を考える上で楽である (すなわち y_n^i まで求められているとき平滑によって y_n^{i*} まで得られる) から、 $K=N+\sum_{\mu=2}^s M_\mu$ に選ぶのが実用的であろう。このような方針で、中点則および Milne 法に対する平滑子を設計すると、それぞれ、(41) および (42) が得られる。

次に問題となるのは平滑間隔である。ある大きさをもつ無縁成分が平滑により縮小されたとして、それがまた積分進行とともに次第に成長して、もとの大きさにまで達する以前に次の平滑が行なわれるようにしておかなければならない。(10), (32), (33) からわかるように、平滑によって第 μ 番目の無縁成分は

$$\zeta_\mu^n e_\mu^i(x) \longrightarrow$$

$$\zeta_\mu^n \zeta_\mu^{M_\mu} Y^{(M_\mu)}(\zeta_\mu) \frac{h^{M_\mu}}{M_\mu!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{M_\mu} e_\mu^i(x) \quad (43)$$

のように減少する。また、平滑間隔を n_f とすると、その間の無縁成分の成長し方は

$$e_\mu^i(x) \rightarrow \zeta_\mu^n e_\mu^i(x + n_f h) \quad (44)$$

程度であるが、局所丸め誤差によってさらにいくらかの増加が一般にはある。特に $p_\mu=1, q_\mu=0$ という通常の場合について考えると、(16) により

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^{M_\mu} e_\mu^i(x) &= \sum_{j=1}^m \binom{M_\mu}{j} G_j^i(x) e_\mu^j(x), \\ G_j^i(x) &= \frac{d}{dx} \binom{M_\mu-1}{j-1} G_j^i(x) + \lambda_\mu \sum_{v=1}^m \binom{M_\mu-1}{v-1} G_v^i(x) g_j^v(x), \\ G_j^i(x) &= \delta_j^i \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

であるから、平滑による無縁成分の減衰率は

$$\frac{|\zeta_\mu h|^{M_\mu}}{M_\mu!} |Y^{(M_\mu)}(\zeta_\mu)| \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^m \binom{M_\mu}{j} |G_j^i(x)|, \quad (46)$$

n_f ステップ間の成長率は

$$\exp \left\{ |n_f h| \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^m |\lambda_\mu g_j^i(x)| \right\} \quad (47)$$

で見積もっておけば安全であり、その間発生する丸め誤差の無縁成分への寄与は、局所丸め誤差の大きさが ε 程度として、

$$\frac{\varepsilon}{|h|} \left[\exp \left\{ |n_f h| \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^m |\lambda_\mu g_j^i(x)| \right\} - 1 \right] \quad (48)$$

程度とみてよい。そこでこの場合いったん発生した無縁成分が平滑により十分抑えられるためには、(46) および (47) より、

$$\frac{|\zeta_\mu h|^{M_\mu}}{M_\mu!} Y^{(M_\mu)}(\zeta_\mu) \cdot G \cdot \exp \{ |n_f h| g \} \leq 1,$$

すなわち

$$n_f \leq \frac{1}{|h|g} \log_e \left\{ \frac{M_\mu!}{Y^{(M_\mu)}(\zeta_\mu) \cdot G \cdot |\zeta_\mu h|^{M_\mu}} \right\} \quad (49)$$

であればよい。ここで

$$g = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^m |\lambda_\mu g_j^i(x)|, \quad (50)$$

$$G = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^m \binom{M_\mu}{j} |G_j^i(x)| \quad (51)$$

とおいた。また、この途中で無縁成分の大きさの程度が δ を超えないようにするには、(48) より

$$\frac{\varepsilon}{|h|} \{ \exp(g n_f |h|) - 1 \} \leq \delta$$

すなわち

$$n_f \leq \frac{1}{|h|g} \log_e \left\{ \frac{|h|\delta + 1}{\varepsilon} \right\} \quad (52)$$

であればよい。(49) では $|h|$ が十分小さければ

$\log_e \{ \dots \}$ は 1 より大になるし、(52) でも ε が $|h|\delta$ に比べて十分小さければ $\log_e \{ \dots \}$ が 1 より大になる。そこで、刻み幅が十分小さく、丸め誤差もそれに比べて十分小さいときには、平滑間隔 n_f は

$$n_f \leq \frac{1}{|h|g} \quad (53)$$

程度に選んでおけば安全であることがわかる。

6. 例 題

<例 1> 中点則への応用例(線型方程式): — 前節で提案した方法を中点則による数値積分に適用した結果を述べる。まず、

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = 1 - y, \quad y(0) = 0 \quad (54)$$

を中点則

$$y_{n+1} - y_{n-1} = 2 h f_n, \quad y_0 = 0 \quad (55)$$

を用いて解くことを試みた。(正確解は $y(x) = 1 - e^{-x}$ である。)

$$g(x) = \frac{\partial f}{\partial y} = -1 \quad (56)$$

であるから、通常のやり方では不安定振動が起こる。 $h=0.1$ として通常の方法で求めた数値解およびその誤差を第 2 図および第 3 図に y_A および e_A で示す(出発値 y_1 は梯形則で求めた)。振動の激しい部分はその包絡線のみを描いた。これに対して、 $n_f=10$ ステップごとに平滑を行なって前節の方法に従って積分した結果得られた数値解およびその誤差を第 2 図および第 3 図に y_B および e_B で示す。不安定はよく抑えられている。後者の計算の algorithm を ALGOL で記すと <プログラム 1> のようになる(大略 JUSE ALGOL [6] の形式に従って記した)。<プログラム 1> 中の記号の意味は次のとおりである。

XINIT, H, XFIN=積分の始点, 刻み幅, 終点。

YINIT= y の初期値。

F(X, Y)=右辺の関数。

D, DD=無縁成分の大きさ。

EPS=出発値を梯形則で求めるときの収束判定用の数。

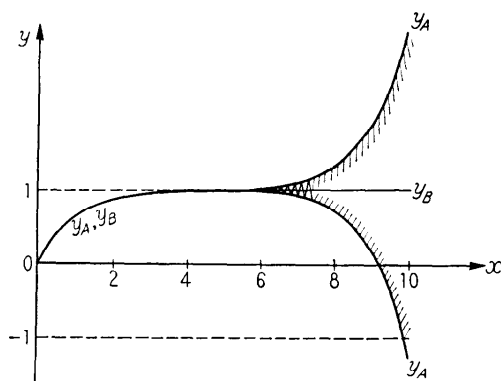
M=平滑間隔 n_f 。

A[0]~A[6]=平滑子係数(無縁成分計算用)。

データは XINIT, YINIT, H, XFIN, M, EPS の順に並べておく。

<プログラム 1>

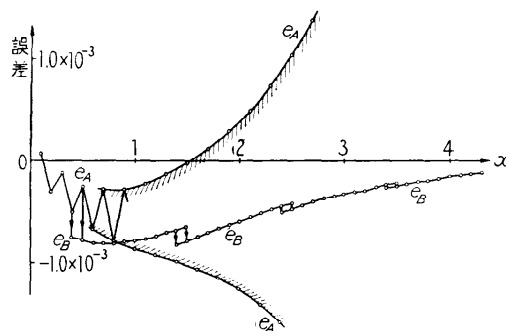
```
begin real XINIT, YINIT, H, XFIN, X, Y, YY,
      D, DD, EPS;
```



$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1-y, \quad y(0)=0 \\ y_{n+1} &= y_n + 2hf_n, \quad f_n = 1-y_n, \quad y_0=0 \\ h &= 0.1 \\ \{y_A: \text{平滑せず} \\ y_B: 10 \text{ ステップごとに平滑} \end{aligned}$$

第 2 図

```
integer M, I, N;
array A [0:6];
real procedure F(X, Y);
  value X, Y; real X, Y;
  begin ..... end;
INITIALIZATION:
  READREAL(XINIT); READREAL(YINIT);
  READREAL(H); READREAL(XFIN);
  READINTEGER(M); READREAL(EPS);
  CRLF;
  PRINTSTRING(' X Y CORRECTION');
  CRLF; CRLF; PRINTREAL(XINIT);
  PRINTREAL(YINIT);
  if H*(XFIN-XINIT) ≤ 0.0 then go to END;
  A[0]:=0.0; A[1]:=-5.0/16.0;
  A[2]:=3.0/4.0; A[3]:=-3.0/8.0;
  A[4]:=-1.0/4.0; A[5]:=3.0/16.0;
  A[6]:=0.0;
  X:=XINIT+H;
  D:=F(XINIT, YINIT);
  YY:=YINIT+H*D;
  LOOP: Y:=YINIT+H/2.0*(D+F(X, YY));
    if ABS(Y-YY) > EPS then begin YY:=Y;
      go to LOOP end;
  YY:=YINIT;
  DD:=YY*A[5];
  I:=1;
  N:=4;
INSIGNIFICANTCOMPONENT:
```

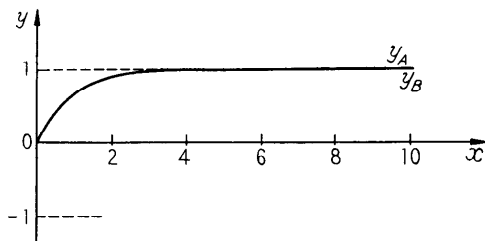


$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1-y, \quad y(0)=0, \quad y(x)=1-e^{-x} \\ y_{n+1} &= y_n + 2hf_n, \quad f_n = 1-y_n, \quad y_0=0 \\ e_n &= y_n - y(x_n) \\ h &= 0.1 \\ \{e_A: \text{平滑せず} \\ e_B: 10 \text{ ステップごとに平滑} \end{aligned}$$

第 3 図

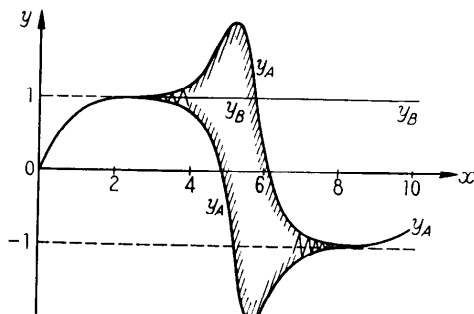
```
if N ≥ 6 then go to RESULT;
D:=D+Y*A[N+1];
DD:=DD+Y*A[N];
RESULT:
  if N ≥ 2 then begin CRLF; PRINTREAL(X);
    PRINTREAL(Y); go to NEXT end;
  if N=0 then
    begin YY:=YY+DD;
      Y:=Y+D;
      CRLF; PRINTREAL(X-H);
      PRINTREAL(YY);
      PRINTREAL(DD); CRLF;
      PRINTREAL(X);
      PRINTREAL(Y);
      PRINTREAL(D);
      N:=M; D:=DD:=0.0
    end;
NEXT:
  YINIT:=YY+2.0*H*F(X, Y);
  YY:=Y;
  Y:=YINIT;
  I:=I+1; N:=N-1;
  X:=XINIT+H*FLOAT(I);
  if H*(XFIN-XINIT) ≥ 0.0 then
    go to INSIGNIFICANTCOMPONENT;
END:
end
```

この計算例では $F(X, Y)$ という real procedure の部分は次のように書かれる。



$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1-y, \quad y(0)=0 \\ y_{n+1} &= y_n + 2hf_n, \quad f_n = 1-y_n, \quad y_0=0 \\ h &= 0.01 \\ \{y_A: &\text{平滑せず} \\ y_B: &150 \text{ ステップごとに平滑} \end{aligned}$$

第 4 図



$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1-y^2, \quad y(0)=0 \\ y_{n+1} &= y_n + 2hf_n, \quad f_n = 1-y_n^2, \quad y_0=0 \\ h &= 0.1 \\ \{y_A: &\text{平滑せず} \\ y_B: &10 \text{ ステップごとに平滑} \end{aligned}$$

第 6 図

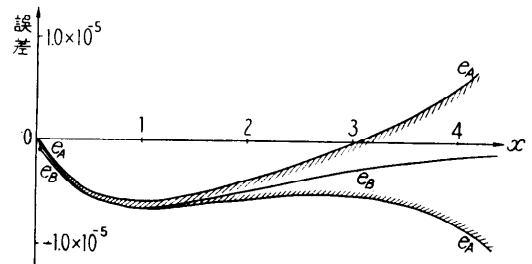
```
real procedure F(X, Y);
  value X, Y; real X, Y;
  F:=1.0-Y;
```

同じことを $h=0.01$, $n_f=150$ として試みた結果を第 4 図, 第 5 図に示す。

＜例 2＞ 中点則への応用例(非線型方程式): — 前例のような定数係数線型方程式に対して, 平滑子が有効であるのは, ある意味で当然であるので, 非線型方程式に対しても有効であることを示す例として次の問題を扱ってみた。

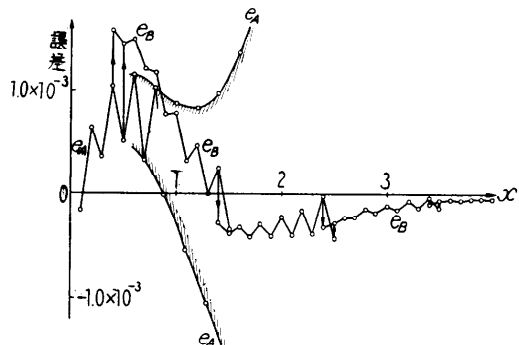
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = 1-y^2, \quad y(0)=0. \quad (57)$$

正確解は $y(x) = \tanh x$ である。上掲＜プログラム 1＞中の real procedure F(X, Y) は今度は



$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1-y, \quad y(0)=0, \quad y(x)=1-e^{-x} \\ y_{n+1} &= y_n + 2hf_n, \quad f_n = 1-y_n, \quad y_0=0 \\ e_n &= y_n - y(x_n) \\ h &= 0.01 \\ \{e_A: &\text{平滑せず} \\ e_B: &150 \text{ ステップごとに平滑} \end{aligned}$$

第 5 図



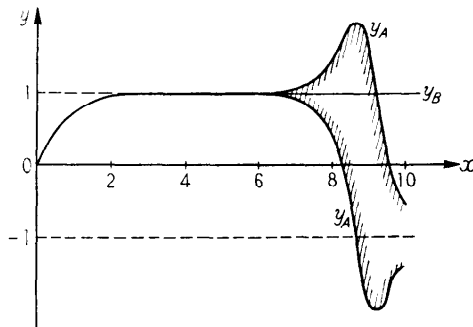
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1-y^2, \quad y(0)=0, \quad y(x)=\tanh x \\ y_{n+1} &= y_n + 2hf_n, \quad f_n = 1-y_n^2, \quad y_0=0 \\ e_n &= y_n - y(x_n) \\ h &= 0.1 \\ \{e_A: &\text{平滑せず} \\ e_B: &10 \text{ ステップごとに平滑} \end{aligned}$$

第 7 図

```
real procedure F(X, Y);
  value X, Y; real X, Y;
  F:=1.0-Y↑2;
```

と書かれる。この方程式も $g(x) = \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ であっ

て, 解は $y(0)=0$ から次第に増加するので $g < 0$ であり, 通常の方法では振動を起こす。第 6 図, 第 7 図は $h=0.1$ で平滑子を用いない場合 (解 y_A , 誤差 e_A), および $n_f=10$ ステップごとに用いた場合 (解 y_B , 誤差 e_B) の比較を示す。第 8 図, 第 9 図は同じことを $h=0.01$ について行なった例である (平滑は $n_f=$



$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1 - y^2, \quad y(0) = 0 \\ y_{n+1} &= y_{n-1} + 2hf_n, \quad f_n = 1 - y_n^2, \quad y_0 = 0 \\ h &= 0.01 \\ \begin{cases} y_A: \text{平滑せず} \\ y_B: 150 \text{ ステップごとに平滑} \end{cases} \end{aligned}$$

第 8 図

150 ステップごと). $h=0.1$ と $h=0.01$ とでは不安定振動の起る位置は異っているが, 発生してから後のふるまいはよく似ていることに注意しなければならない。

この例でも平滑子が有効に作用しているのがみられる。

<例 3> Milne 法への応用例(連立方程式): — 上記の例によって平滑子の有用性が確められたので, Milne 法で連立方程式 (一応 10 元まで解けるように array の次元をとってある) を解くという実用的な手順を <プログラム 2> に示す (やはり, ほぼ JUSE ALGOL [6] の形式に従っている). 出発値計算は全域 4 点近似, 平滑子は (42) を用いる. 記号の意味は次のとおりである。

XINIT, H, XFIN=積分の始点, 刻み幅, 終点.

N=連立方程式の元数.

YINIT [1]~YINIT [N]= y の初期値.

FILT [1]~FILT [6]=平滑子係数

(無縁成分計算用).

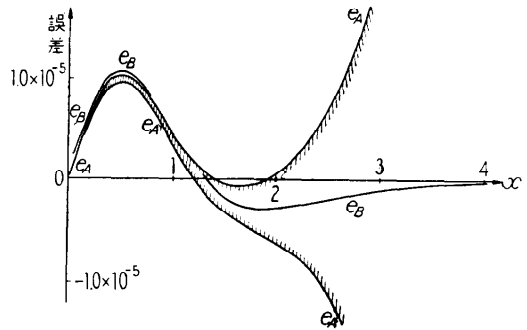
RHS (X, Y, F)=X, Y [1]~Y [N] を与えて右辺の関数値 F [1]~F [N] を計算する procedure.

D0, D1, D2, D3=無縁成分 (ベクトル).

NFILT=平滑間隔 n_f (NFILT ≤ 0 だと平滑を行なわない通常の方法になる; 平滑を行なうときは NFILT ≥ 7 でなければならない).

EPSREL, EPSABS=収束判定用の数 (それぞれ相対値, 絶対値).

C= y_n^i の |修正値-予測値| の最大のもの ($i=$



$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1 - y^2, \quad y(0) = 0, \quad y(x) = \tanh x \\ y_{n+1} &= y_{n-1} + 2hf_n, \quad f_n = 1 - y_n^2, \quad y_0 = 0 \\ e_n &= y_n - y(x_n) \\ h &= 0.01 \\ \begin{cases} e_A: \text{平滑せず} \\ e_B: 150 \text{ ステップごとに平滑} \end{cases} \end{aligned}$$

第 9 図

1, ..., N について) の値.

データは XINIT, H, XFIN, EPSREL, EPSABS, NFILT, N, Y [1]~Y [N] の順に並べてあるとする. 結果は $x_n, y_n^1, \dots, y_n^N, C$ の順に横に並べて出し, n が変るごとに改行する.

<プログラム 2>

```
begin integer NFILT, N, I, NF, K;
  real X, XINIT, H, XFIN, EPSREL,
    EPSABS, EPS, C, W;
  array Y, YINIT, Y0, Y1, Y2, Y3, D0,
    D1, D2, D3, F, F0, F1, F2 [1:10],
    FILT [1:6];
  procedure PRINTXYC (X, Y, N, C);
    value N, X, C; integer N; real X, C;
    array Y;
    begin integer I; CRLF; PRINTREAL (X);
      for I:=1 step 1 until N do
        PRINTREAL (Y [I]);
      PRINTREAL (C)
    end;
  procedure RHS (X, Y, F);
    value X; real X; array Y, F;
    begin .....; .....; .....; ..... end;
  real procedure MAX (X, Y);
    value X, Y; real X, Y;
    MAX:=if X>=Y then X else Y;
READDATA:
  READREAL (XINIT); READREAL (H);
  READREAL (XFIN); READREAL (EPSREL);
  READREAL (EPSABS);
  READINTEGER (NFILT);
  READINTEGER (N);
```

```

for I:=1 step 1 until N do
  READREAL(YINIT[I]);
if H*(XFIN-XINIT)≤0.0 then go to END;

```

INITIALIZATION:

```

for I:=1 step 1 until N do
  Y3[I]:=YINIT[I];
RHS(XINIT, Y3, F3);
for I:=1 step 1 until N do
  Y2[I]:=Y3[I]+H*F3[I];
RHS(XINIT+H, Y2, F2);
for I:=1 step 1 until N do
  Y2[I]:=Y3[I]+H/2.0*(F2[I]+F3[I]);
RHS(XINIT+H, Y2, F2);
for I:=1 step 1 until N do
  Y1[I]:=Y3[I]+2.0*H*F2[I];
RHS(XINIT+2.0*H, Y1, F1);
for I:=1 step 1 until N do
  Y0[I]:=Y2[I]+2.0*H*F1[I];
RHS(XINIT+3.0*H, Y0, F0);
LOOP: C:=0.0; EPS:=EPSABS;
  for I:=1 step 1 until N do
    begin W:=Y2[I];
      Y2[I]:=Y3[I]+H/24.0*(9.0*F3[I]+
        19.0*F2[I]-5.0*F1[I]+F0[I]);
      C:=MAX(C, ABS(W-Y2[I]));
      W:=Y1[I];
      Y1[I]:=Y3[I]+H/3.0*(F3[I]+4.0*
        F2[I]+F1[I]);
      C:=MAX(C, ABS(W-Y1[I]));
      W:=Y0[I];
      Y0[I]:=Y3[I]+3.0*H/8.0*(F3[I]+
        3.0*F2[I]+3.0*F1[I]+F0[I]);
      C:=MAX(C, ABS(W-Y0[I]));
      EPS:=
        MAX(EPS, EPSREL*ABS(Y0[I]));
    end;
  RHS(XINIT+H, Y2, F2);
  RHS(XINIT+2.0*H, Y1, F1);
  RHS(XINIT+3.0*H, Y0, F0);
if EPS<C then go to LOOP;
PRINTXYC(XINIT, Y3, N, 0.0);
PRINTXYC(XINIT+H, Y2, N, 0.0);
PRINTXYC(XINIT+2.0*H, Y1, N, 0.0);
PRINTXYC(XINIT+3.0*H, Y0, N, 0.0);
NF:=5; K:=4; X:=XINIT+4.0*H;
if NFILT≤0 then go to PREDICTION;
for I:=1 step 1 until N do
  begin D3[I]:=-5.0*Y3[I];
    D2[I]:=5.0*Y2[I]; D1[I]:=5.0*Y1[I];
    D0[I]:=5.0*Y0[I] end;
FILTERCOEFFICIENTS:
  FILT[1]:=30.0;
  FILT[2]:=-45.0;
  FILT[3]:=20.0;

```

```

  FILT[4]:=15.0;
  FILT[5]:=-18.0;
  FILT[6]:=5.0;

```

PREDICTION:

```

EPS:=EPSABS;
for I:=1 step 1 until N do
  begin W:=Y3[I]+4.0*H/3.0*(2.0*F0[I]
    -F1[I]+2.0*F2[I]);
    Y3[I]:=Y2[I]; Y2[I]:=Y1[I];
    Y1[I]:=Y0[I]; F2[I]:=F1[I];
    F1[I]:=F0[I]; F0[I]:=Y[I]:=W;
    EPS:=MAX(EPS, EPSREL*ABS(W))
  end;
CORRECTION:
  RHS(X, Y, F); C:=0.0;
  for I:=1 step 1 until N do
    begin Y0[I]:=Y2[I]+H/3.0*(F[I]+4.0*
      F1[I]+F2[I]);
      C:=MAX(C, ABS(Y0[I]-Y[I]));
    end;
  if EPS<C then
    begin for I:=1 step 1 until N do
      Y[I]:=Y0[I];
      go to CORRECTION
    end;
  C:=0.0;
  for I:=1 step 1 until N do
    C:=MAX(C, ABS(Y0[I]-F0[I]));
    RHS(X, Y0, F0);
    PRINTXYC(X, Y0, N, C);
  INSIGNIFICANT COMPONENTS:
  if NFILT=0 ∨ NF≥7 then go to NEXT;
  if NF>0 then
    begin for I:=1 step 1 until N do
      begin
        D0[I]:=D0[I]+FILT[NF]*Y0[I];
        D1[I]:=D1[I]+FILT[NF]*Y1[I];
        D2[I]:=D2[I]+FILT[NF]*Y2[I];
        D3[I]:=D3[I]+FILT[NF]*Y3[I]
      end;
      go to NEXT
    end;
  for I:=1 step 1 until N do
    begin
      Y0[I]:=(57.0*Y0[I]+D0[I])/64.0;
      Y1[I]:=(57.0*Y1[I]+D1[I])/64.0;
      Y2[I]:=(57.0*Y2[I]+D2[I])/64.0;
      Y3[I]:=(57.0*Y3[I]+D3[I])/64.0;
      D0[I]:=D1[I]:=D2[I]:=D3[I]:=0.0
    end;
  RHS(X, Y0, F0);
  RHS(X-H, Y1, F1);
  RHS(X-2.0*H, Y2, F2);
  NF:=NFILT;

```

NEXT:

if $H*(XFIN-X)<0.0$ then go to END;

K:=K+1; NF:=NF-1;

X:=XINIT+H*FLOAT(K);

go to PREDICTION;

END:

end

上のプログラムに従って方程式

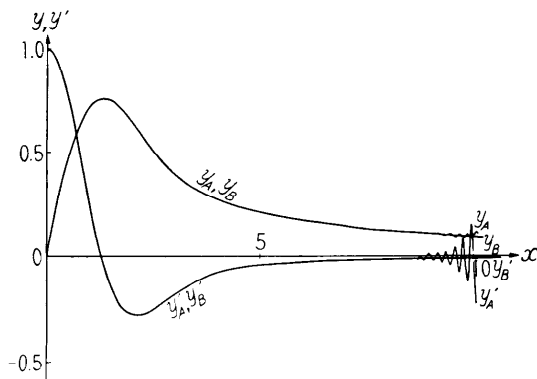
$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (58)$$

を

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy^1}{dx} &= y^2, & y^1(0) &= 0, \\ \frac{dy^2}{dx} &= -y^1 - xy^2, & y^2(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

という連立方程式に書き直して、 $x=0$ より $x=10$ ま
で刻み幅 $h=0.1$ で、平滑なしの場合 (解 y_A , 誤差
 e_A), 10 ステップごとに平滑した場合 (解 y_B , 誤差
 e_B) の二つの場合について解いた結果を第 10 図, 第
11 図に示す. (計算は上記 ALGOL プログラムを
FORTRAN に訳し IBM 7090 で実行したが, y_A の
計算にも, y_B の計算にも約 0.03 分要した. $h=0.01$
で $x=0 \sim 10$ の間積分してみた例では, 平滑しない場
合約 0.07 分, 150 ステップごとに平滑した場合約 0.06
分を要した.)

procedure RHS の部分は次のとおりである.



$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y &= 0, & y(0) &= 0, & y'(0) &= 1 \\ y^1 &\equiv y, & y^2 &\equiv y', & f^1 &= y^2, & f^2 &= -xy^2 - y^1 \\ y_{n+1}^i &= y_{n-1}^i + \frac{h}{3} (f_{n+1}^i + 4f_n^i + f_{n-1}^i), \\ y_0^1 &= 0, & y_0^2 &= 1 \\ h &= 0.1 \\ \{y_A, y_A'\} &: \text{平滑せず} \\ \{y_B, y_B'\} &: 10 \text{ ステップごとに平滑} \end{aligned}$$

第 10 図

procedure RHS (X, Y, F);

value X; real X; array Y, F;

begin F[1]:=Y[2];

F[2]:=-Y[1]-X*Y[2]

end;

この問題の正確解は

$$y(x) = y^1(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt \quad (60)$$

である. また

$$\left. \begin{aligned} f^1(x, y^1, y^2) &= y^2 \\ f^2(x, y^1, y^2) &= -y^1 - xy^2 \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

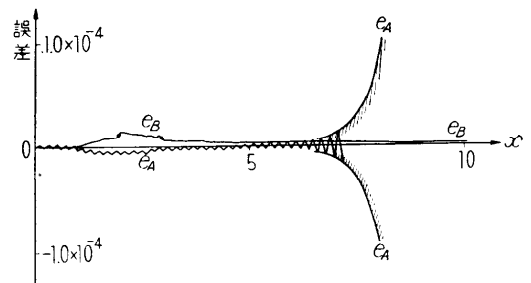
で, したがって

$$\begin{bmatrix} g_1^1(x) & g_2^1(x) \\ g_1^2(x) & g_2^2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1} & \frac{\partial f^1}{\partial y^2} \\ \frac{\partial f^2}{\partial y^1} & \frac{\partial f^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -x \end{bmatrix} \quad (62)$$

であるから $[g_j^i(x)]$ の固有値は

$$\left. \begin{aligned} -\frac{x}{2} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} i & \quad \left(\left|\frac{x}{2}\right| \leq 1 \text{ のとき} \right), \\ -\frac{x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1} & \quad \left(\left|\frac{x}{2}\right| \geq 1 \text{ のとき} \right) \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

で, $x>0$ に対してその実部は常に負になり, 通常の方法では不安定振動を起こす (第 10 図の y_A , y_A' , 第 11 図の e_A 参照) が, 平滑子を用いることによってこれが避けられているのがみられる (第 10 図の y_B , y_B' , 第 11 図の e_B 参照). なお, 計算に要する時間は平滑子を用いない普通の方法の方が (多分振動成分が大きくなると予測値と修正値の差も大きくなり修正に手間どるため) かえって長くかかる傾向が認められたが, このことは興味深く思われる.



$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y &= 0, & y(0) &= 0, & y'(0) &= 1, \\ y(x) &= e^{-(1/2)x^2} \int_0^x e^{(t^2/2)} dt \end{aligned}$$

Milne 法

 $e_n = y_n - y(x_n)$ $h=0.1$ $\{e_A\}$: 平滑せず $\{e_B\}$: 10 ステップごとに平滑

第 11 図

7. Milne-Reynolds の平滑法について

Milne および Reynolds が [3] で提案した安定化法を我々の立場から眺めてみると以下のようになる。彼らの方法はもちろん Milne 法に対してだけ適用できるものであって我々の方法のような一般性はない。[3] では

$$\frac{dy}{dx} = Gy \quad (G: \text{定数}) \quad (64)$$

という形の微分方程式についてだけ述べてあるが、容易に次のように一般化できる。彼らの方法は、

$$\frac{dy^i}{dx} = f^i(x, y^j) \quad (i, j=1, \dots, m) \quad (65)$$

を Milne 法で解き進み、 $y_0^i, y_1^i, \dots, y_n^i$ まで求められたとき、

$$y_n^{i*} = \frac{1}{2} y_n^i + \frac{1}{2} \left\{ y_{n-3}^i + \frac{3h}{8} (f_n^i + 3f_{n-1}^i + 3f_{n-2}^i + f_{n-3}^i) \right\} \quad (66)$$

で定められる y_n^{i*} (この中の無縁成分は y_n^i 中の h 倍のオーダーに減少し、有効成分は h^4 のオーダーまで保存されている) を定め、 y_{n-1}^i と y_n^{i*} とを新しい出発値として積分を進めるという方法である。このやり方だと、一回の平滑操作で無縁成分は約 $1/2$ にしか減少しない。なぜならば、無縁成分を含んだ y_{n-1}^i と、それを取り除いた y_n^{i*} とを出発値として用いるからである。つまり、彼らの方法は我々の $M=0, N=4$ 型の平滑子と同程度の効果しかもたない。ところで、せっかく (66) という平滑公式が発見されたのだから、それに従って y_{n-1}^{i*} と y_n^{i*} とを作って、これらを出発値として用いれば、ちょうど我々の平滑子の $M=1, N=4$ 型と同じ平滑効果が期待できるはずであるが、[3] ではなぜかそのことに触れられていない。また、我々の平滑子は y に関して線型であるため一般的な設計公式が容易に求められたが、Milne-Reynolds 選のは非線型である (y が f の中に含まれる) ので一般化が自明とはいえない。

8. あとがき

常微分方程式のある種の数値解法においてみられる不安定現象を避ける一方法を提案し、その具体的な成功例を報告した。現在までのところ、この方法が適用できない例は発見されていないが、さらによくこの方法の適用可能限界についても吟味してみる必要はあると思われる。また、本論文で述べた平滑子は線型平滑子であるが、非線型平滑子へと拡張すること (すなわち f_n の情報を利用すること) が果して有用であるか否かも検討の余地がある。本論文が Milne 法などの比較的簡単で精度のよい方法の実用価値を増すことの一助になれば幸である。

最後に、本研究に関して懇切な御指導と有益な多くの御助言とを賜った東京大学の森口繁一教授に心からなる感謝の意を表する次第です。

なお、本研究に関係した数値計算にはすべて日本 IBM 株式会社の御好意により IBM 7090 を使用させて頂いたことを記して謝辞にかえます。

参考文献

- [1] 森口繁一, 高田 勝: 数値計算法, II. 岩波講座“現代応用数学”, B. 13. II., 1958.
- [2] R.W. Hamming: Stable Predictor-Corrector Methods for Ordinary Differential Equations. Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 6 (1959), pp. 37~47.
- [3] W.E. Milne and R.R. Reynolds: Stability of a Numerical Solution of Differential Equations. Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 6 (1959), pp. 196~203.
- [4] P. Henrici: Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons, New York-London, 1962.
- [5] 森口繁一: 数値計算の理論と実験, IV. 科学, Vol. 33, No. 3 (March 1963), pp. 156~160.
- [6] 森口繁一 (編): ALGOL 入門. 日本科学技術連盟, 東京, 1962.

(昭和 38 年 11 月 8 日受付)