

ある種の三項方程式にをける誤差伝播*

永坂秀子**

連立一次方程式の数値解法において、解の精度を悪くする原因は二つある。第1は問題自身の性質の悪いいわゆる ill-condition といわれている場合で、理論的には種々の判定基準が考えられている。第2は途中の丸めの誤差が解に影響したときである。

通例連立一次方程式の解の不安定性については、もっぱら第1の原因だけが指摘されているが、第1の原因がないときでも、ある種の規則性のある問題では、第2の種類の誤差が規則的に働いて、似ても似つかぬ解がでてくることがある。その顕著な例が三項方程式の中に現われるので、三項方程式についてその現象を検討する。

ここでは次の型の三項方程式を消去法（前進、逆進法）によって解いたときのことにについて論ずる。

誤差伝播の様子を調べるために pivot 選択はしなかった。

$$\begin{cases} bx_1 + cx_2 & = k_1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 & = k \\ ax_2 + bx_3 + cx_4 & = k \\ \dots\dots\dots \\ ax_{n-1} + bx_n & = k_l \end{cases} \quad (1)$$

ただし $k_1 = b + c$, $k = a + b + c$, $k_l = a + b$

正解 $x_1 = x_2 = \dots\dots\dots = x_n = 1$

1. 例題

a, b, c の組み合わせにより起こる 特異な現象を例によって示す。

i) pivot が桁落ちしない場合 (ill-condition ではない)

ill-condition でないのに、Case I では x_n は正しくでているが x_1 はデタラメである。それに反して Case II では x_n はデタラメなのに x_1 は正しい値に

第 1 表

Case	I	I'	II	II'	III	III'
(a, b, c)	(1,6,8)	x_{100} を置きかえ	(8,6,1)	x_{48} を置きかえ	(12,25,12)	x_{100} を置きかえ
a/a, c/a	1/4, 2		2, 1/4		3/4, 3/4	
x_1	7.8532415 -01	-3.1691204 +22	1.0000000 +00	1.0000000 +00	1.0000000 +00	9.9999996 -01
x_2	1.1610069 +00	2.3768403 +22	9.9999988 -01	9.9999988 -01	1.0000000 +00	1.0000001 +00
x_3	9.0607937 -01	-1.3864901 +22	1.0000002 +00	1.0000002 +00	1.0000000 +00	9.9999995 -01
x_4	1.0503146 +00	7.4276254 +21	9.9999970 -01	9.9999970 -01	1.0000000 +00	1.0000001 +00
:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:
x_{46}	:	:	-1.2022295 +06	6.2499995 +14	:	:
x_{47}	:	:	2.0610703 +06	-2.4999999 +15	:	:
x_{48}	:	:	-2.7480914 +06	1.0000000 +16	:	:
:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:
x_{97}	9.9999996 -01	9.9999916 -01			1.0000000 +00	9.9999994 -01
x_{98}	1.0000000 +00	1.0000004 +00			1.0000000 +00	1.0000001 +00
x_{99}	9.9999996 -01	9.9999976 -01			1.0000000 +00	9.9999987 -01
x_{100}	1.0000000 +00	1.0000001 +00			1.0000000 +00	1.0000002 +00

* Error Propagation in the Solution of some Tri-diagonal Linear Equations, by Hideko Nagasaka. (College of Science and Technology, Nihon University)

** 日本大学理工学部

なってしまった。ところが Case III ではこれらの特異な現象は起らず、正解が得られている。なお試みに Case I', II', III' では、それぞれ Case I, II, III の x_n にさらに誤差を加えて、逆代入させてみた。I' で

は 1×10^{-7} の誤差が x_1 では -3×10^{22} まで拡大され、II' では 1×10^{16} の誤差が x_1 にもどらないうちに消滅している。III' では最後の桁での誤差は x_1 まで同程度の誤差で変動している。

ii) Pivot の桁落ちが起こる場合 (ill-condition の場合を含む)

$$\lambda_i = b - 2\sqrt{ac} \cos \frac{i\pi}{n+1} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2)$$

ゆえに

$$P = \frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|} = \frac{|b| + 2\sqrt{ac} \cos \frac{i\pi}{n+1}}{|b| - 2\sqrt{ac} \cos \frac{i\pi}{n+1}} \quad (2.1)$$

第 2 表

Case (a, b, c)	IV-1 (3, 4, 5)	IV-2 (3, 4, 5)	V-1 (5, 4, 3)	V-2 (5, 4, 3)	Case IV, V のときの Pivot		VI (4, 3, 4)
a/c	3/5	3/5	5/3	5/3			1
x_1	7.3886100 +03	-5.1674815 +08	1.0000000 +00	9.9952240 -01	b_1	4.0000000 +00	1.0000023 +00
x_2	-5.9090880 +03	4.1339852 +08	1.0000000 +00	1.0006368 +00	b_2	2.5000000 -01	9.9999828 -01
x_3	2.9650440 +02	-2.0669923 +07	1.0000000 +00	9.9994694 -01	b_3	-5.6000000 +01	9.9999903 -01
x_4	3.3106492 +03	-2.3150316 +08	9.9999983 -01	9.9900920 -01	b_4	4.2678572 +00	1.0000023 +00
:	:	:	:	:	:	:	:
x_{53}	9.8698509 -01	9.1137673 +02	1.0124134 +00	2.9025149 +02	b_{53}	3.7500861 +00	9.9999960 -01
x_{54}	1.0097614 +00	-6.8179827 +02	1.0010882 +00	-3.6055605 +02	b_{54}	9.1900000 -05	9.9999961 -01
x_{55}	9.9999982 -01	1.0125908 +00	9.7786007 -01	9.8893576 -01	b_{55}	-1.6321690 +05	1.0000007 +00
x_{56}	9.9342091 -01	4.1067064 +02	1.0295193 +00	6.0361107 +02	b_{56}	4.0000919 +00	9.9999991 -01
:	:	:	:	:	:	:	:
x_{105}	1.0000000 +00	9.9840291 -01	-7.5055566 +03	-1.7439803 +08	b_{105}	3.5148074 +00	9.9999952 -01
x_{106}	9.9999999 -01	1.0011227 +00	-6.6923138 +02	2.0431570 +08	b_{106}	-2.6765930 -01	1.0000006 +00
x_{107}	9.9999999 -01	1.0000601 +00	1.3405570 +04	1.8242464 +07	b_{107}	6.0041395 +01	9.9999981 -01
x_{108}	1.0000000 +00	9.9927816 -01	-1.6754713 +04	-3.6484947 +08	b_{108}	3.7501724 +00	9.9999956 -01
x_{109}		1.0005414 +00		4.5606188 +08	b_{109}	1.8370000 -04	1.0000005 +00

ill-condition でない Case IV-1, V-1, VI では、 x_i の変化はそれぞれ Case I, II, III と同じような増減を起こしている。

ところが Case IV-2, V-2 はともに Pivot $b_n = b_{109}$ が桁落ちしている。いわゆる ill-condition の場合である。Case IV-1, V-1 とそれぞれ比較してみると、 x_n では b_n の桁落ち分 (4 桁) 精度が悪くなっている。しかも x_1 までもどっても、その精度の比は変わらない。この 4 桁の精度落ちが ill-condition によるもので、それ以外の誤差の増減は Case IV-1, V-1 と全く同じ現象を起こす。

2. ill-condition との関係

2. 1.

一般に ill-condition といわれている問題は係数行列 A の $|A|$ が 0 に近い場合、くわしくは A の固有値の絶対値最大、最小の比 P が大きいときである。

ここで扱う問題においてはどうかであろうかまず調べてみる。(1) の係数行列の固有値は次式で与えられる。¹⁾

i) $b^2 - 4ac > 0$ のとき

$$n \text{ がいくら大きくなっても } P < \frac{|b| + 2\sqrt{ac}}{|b| - 2\sqrt{ac}}$$

ii) $b^2 - 4ac = 0$ のとき

n が大きく $\cos \frac{\pi}{n+1} \rightarrow 1$ となると (2.1) 式の分母は 0 に近づき、 P は大きくなる。

iii) $b^2 - 4ac < 0$ のとき

n が大きくなれば $|b| - 2\sqrt{ac} \cos \frac{i\pi}{n+1} \rightarrow 0$ となる i が必ず存在し、このとき P は大きくなる。

以上のことから ii), iii) では n が十分大きくなると ill-condition となるが、i) の場合はその恐れはない。しかし例題の Case I, II では i) の場合であるのに解は不安定である。すなわち今までいわれていた ill-condition 以外の事柄によって解が不安定になっている。

2.2 ill-condition と Pivot との関係

理論的に ill-condition になる場合はわかったが、消去過程の pivot は、それらとどのような関連を持つかを調べてみる。

三項方程式においては、0 要素が多いため、消去過

程で $(m-1)$ 段階から m 段階へ移るとき変化する要素は b_m と k_m だけである。

$$\begin{array}{cccc|c} b_{m-1} & c & & & k_{m-1} \\ a & b & c & & k \\ & a & b & c & k \\ & & \dots & & \vdots \\ & b_m & c & & k_m \\ & a & b & c & k \\ & \dots & & & \vdots \end{array}$$

ゆえに pivot b_m , 常数項 k_m , また逆進による x_m はそれぞれ次式で与えられる。

$$b_m = b - \frac{ac}{b_{m-1}} \quad (2.3)$$

$$k_m = k - \frac{a}{b_{m-1}} k_{m-1} \quad (2.4)$$

$$x_m = \frac{k_m}{b_m} - \frac{c}{b_m} x_{m+1} \quad (2.5)$$

ここで pivot の様子を調べてるために (2.3) 式を少し変形してみる。

(2.3) 式を b_{m-1} から b_m にうつる一次変換と考え、その不動点を z とすると、 z は次の二次方程式の根となる。

$$z^2 - bz + ac = 0 \quad \text{二根 } \alpha, \beta \quad (2.6)$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき

この α, β により (2.3) 式は次式でおきかえられる。

$$\frac{b_m - \alpha}{b_m - \beta} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{b_{m-1} - \alpha}{b_{m-1} - \beta}$$

b_{m-1} から順次 b_1 まで落していくと、 $b_1 = b = \alpha + \beta$ から

$$\frac{b_m - \alpha}{b_m - \beta} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{m-1} \frac{b_1 - \alpha}{b_1 - \beta} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m$$

$$\text{となり } b_m = \frac{\alpha \left\{ 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{m+1} \right\}}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m} \quad (2.7)$$

(1) α, β が実根で $|\alpha| > |\beta|$ なら ($b^2 - 4ac > 0$)

(2.7) 式より $m \rightarrow \infty$ となると $b_m \rightarrow \alpha$ (2.8)

ところで $b = \alpha + \beta$, $|\alpha| > |\beta|$ ゆえに $b \cdot \alpha > 0$ であるから $b_m \rightarrow 0$ となることはない。すなわち pivot の桁落ちはおこらない。

(2) α, β が虚根のとき ($b^2 - 4ac < 0$)

$$\alpha = re^{i\theta}, \quad \beta = re^{-i\theta}$$

とおくと

$$\beta/\alpha = e^{-2i\theta} \quad (2.9.1)$$

$$|r| = \sqrt{ac} \quad (2.9.2)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{b} \quad (2.9.3)$$

となる。ゆえに (2.7) 式は

$$b_m = \frac{r \sin(m+1)\theta}{\sin m\theta} = \frac{\sqrt{ac} \sin(m+1)\theta}{\sin m\theta} \quad (2.10)$$

ここで b_m の変動を考えてみる。

$\frac{\theta}{\pi}$ が有理数のとき

$(m+1)\theta = i\pi$ となる i が存在し、このとき $b_m = 0$ となるので完全に $|A| = 0$ となり、不定形となる。

$\frac{\theta}{\pi}$ が無理数のとき

$k\theta \equiv \pi$ (の整数倍) となる k は無限にたくさんあらわれる。たとえば $|k\theta - i\pi| < \varepsilon$ となるとき、 $m+1 = k$ とすると、

$$(m+1)\theta \equiv i\pi \text{ となり } \begin{cases} b_m \div 0 \\ b_{m+1} \div \infty \end{cases} \text{ となる。}$$

この m がちょうど元数 n のとき、 b_n は大きく桁落ちするので pivot の積である $|A|$ は小さくなり ill-condition となる。

$(n+1)\theta \equiv i\pi$ と (2.9.3) 式を用いれば $\cos \frac{i\pi}{n+1} \div$

$\pm \frac{b}{2\sqrt{ac}}$ となり 2.1 節の iii) の関係になることから ill-condition であることがわかる。

ii) $\alpha = \beta$ のとき ($b^2 - 4ac = 0$)

(2.3) 式は $\alpha (= \beta)$ によって次式でおきかえられる。

$$\frac{1}{b_m - \alpha} = \frac{1}{b_{m-1} - \alpha} + \frac{1}{\alpha}$$

前節と同様にして、 b_{m-1} から b_1 まで落していくと、 $b_1 = b$ より

$$b_m = \alpha \cdot \frac{m+1}{m} \quad (2.11)$$

$\therefore m \rightarrow \infty$ となると $b_m \rightarrow \alpha$

となり $\alpha = b/2$ であることより、 b_m は 0 になることがないから、このときも pivot は桁落ちすることなく、(2.11) 式により絶対値で少しずつ小さくなっていく。

3. 常数項および x_i の誤差

前節で pivot の状態を調べたが、次に常数項、 x_i における誤差の変動を (2.4), (2.5) 式によって考察する。 $b^2 - 4ac$ の符号によって pivot の変化が違っているの、それぞれの場合に分けて考える。

3.1 $b^2 - 4ac > 0$ の場合 (例題 Cass I, II, III)

3.1.1 2.1 節で調べたとおり ill-condition ではなく、また pivot も桁落ちをおこさないから、 b_m は最

後の桁で丸めの誤差がある程度と考えられる。ゆえに以下の議論では b_m の誤差は考慮に入れない。

3.1.2 常数項の誤差

常数項 k_m ではじめて誤差がはいってきたときの m を $m=i$ とするとき、まず k_i での丸めの誤差を ε_i として、この ε_i が k_n にどのように変化して影響するかを調べる。

$$\bar{k}_i = k_i + \varepsilon_i$$

とすると、(2・4) 式により漸次 k_i を代入していくと

$$\bar{k}_n = k_n' + (-1)^{n-i} \frac{a}{b_i} \frac{a}{b_{i+1}} \cdots \frac{a}{b_{n-1}} \varepsilon_i \quad (3.1)$$

ただし k_n' には ε_i 以外の誤差を含む

ゆえに k_n における ε_i の影響は (2・7) 式により

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-i} \frac{a}{b_i} \frac{a}{b_{i+1}} \cdots \frac{a}{b_{n-1}} \varepsilon_i \\ &= \left(-\frac{a}{\alpha}\right)^{n-i} \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^i}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} \varepsilon_i \quad (3.2) \end{aligned}$$

ところで $\bar{k}_n$ の誤差を E とすれば、 E は $\bar{k}_i$ から $\bar{k}_{n-1}$ までの誤差を一応考慮に入ると

$$|\varepsilon_r| = \varepsilon = 0.5 \times 10^s \quad r = i, i+1, \dots, n-1$$

(ただし s は b の有効桁の最後の order)

とくと、 $n \rightarrow \infty$ のとき $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \rightarrow 0$ となるから、 n が十分大きいとき

$$E \doteq \sum_{r=i}^{n-1} \left(-\frac{a}{\alpha}\right)^{n-r} \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^r}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} \varepsilon_r$$

すなわち

$$\frac{a}{\alpha} \approx 1 \text{ のとき}$$

$$E \doteq \left[\frac{-\frac{a}{\alpha}}{1 + \frac{a}{\alpha}} - \left(-\frac{a}{\alpha}\right)^{n-i+1} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{a}{\alpha}} - \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{1 - \frac{c}{\alpha}} \right\} \right] \varepsilon \quad (3.3)$$

$$\frac{a}{\alpha} = 1 \text{ のとき}$$

$$E \doteq \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^i}{1 - \frac{\beta}{\alpha}} \right\} \varepsilon \quad (3.4)$$

ゆえに n が大きいとき k_n の誤差はだいたい (3・2) 式によって推定できるから、 k_n の誤差の絶対値 $|E|$ は k_i ではじめて丸めの誤差 ε_i が発生したとき

$$\left| \frac{a}{\alpha} \right| < 1 \text{ のとき}$$

$$\left. \begin{aligned} & |E| \text{ は } \varepsilon_i \text{ の縮小により小さくなる.} \\ & \left| \frac{a}{\alpha} \right| > 1 \text{ のとき} \\ & |E| \text{ は } \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{n-i} \text{ の order で } \varepsilon_i \text{ が拡大} \\ & \text{される.} \\ & \left| \frac{a}{\alpha} \right| = 1 \text{ のとき} \\ & |E| \text{ はたかだか } \varepsilon_i \text{ の order} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

ゆえに k_n は

$$\left. \begin{aligned} & \left| \frac{a}{\alpha} \right| \leq 1 \text{ のとき} \\ & |k_n| \text{ は } \varepsilon_i \text{ の拡大なく正しい値} \\ & \left| \frac{a}{\alpha} \right| > 1 \text{ のとき} \\ & |k_n| \text{ は } \varepsilon_i \text{ の拡大のため増大する.} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

3.1.3 x_n について

$$x_n = \frac{k_n}{b_n}$$

であるが、 k_n には (3・5) 式の誤差 E がはいってくるので

$$\bar{x}_n = \frac{\bar{k}_n}{b_n} = x_n + \frac{E}{b_n}$$

となるから、 n が十分大きいとき、 x_n は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \left| \frac{a}{\alpha} \right| < 1 \text{ のとき} \\ & x_n \text{ は正しい値} \\ & \left| \frac{a}{\alpha} \right| > 1 \text{ のとき} \\ & |x_n| \text{ は } \left| \frac{a}{\alpha} \right|^{n-i} \varepsilon_i \text{ の order まで増大} \\ & \left| \frac{a}{\alpha} \right| = 1 \text{ のとき} \\ & x_n \text{ は正しい値} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

3.1.4 逆進代入における x_i

前節(3・7)式でわかったことは、 n が大きいときは

$$\left| \frac{a}{\alpha} \right| \geq 1 \text{ によって、} x_n \text{ が誤差ばかりの解になったり、}$$

正しい値ででたりしている。ゆえに逆進過程では、これら三つの場合に分けて考える。

$$\text{i) } \left| \frac{a}{\alpha} \right| < 1 \text{ のとき}$$

x_n は一応正しい値がでているが、最後の桁での丸めの誤差は考えなければならない。いまこの誤差を δ_n とするとき、 x_1 までもどってきたときの状態は 3.1.2 で扱ったと同様にして (2・5) 式により

$$\bar{x}_1 = x_1' + (-1)^{n-1} \frac{c}{b_1} \frac{c}{b_2} \cdots \frac{c}{b_{n-1}} \delta_n \quad (3.8)$$

$$=x_1' + \left(-\frac{c}{\alpha}\right)^{n-1} \frac{1-\frac{\beta}{\alpha}}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} \delta_n \quad (3 \cdot 9)$$

ただし x_1' には δ_n 以外の誤差を含む
ゆえに δ_n の x_1 への影響は

$$\left. \begin{array}{l} \left|\frac{c}{\alpha}\right| < 1 \text{ のとき} \\ \delta_n \text{ は縮小され, } x_1 \text{ は正しい値} \\ \left|\frac{c}{\alpha}\right| > 1 \text{ のとき} \\ \delta_n \text{ は } \left(\frac{c}{\alpha}\right)^{n-1} \text{ により拡大, } |x_1| \text{ は} \\ \text{増大} \\ \left|\frac{c}{\alpha}\right| = 1 \text{ のとき} \\ \delta_n \text{ 程度の誤差で } x_1 \text{ は正しい値} \end{array} \right\} \quad (3 \cdot 10)$$

となる。

ここで例題 Case I', II', III' をみると, それぞれ Case I, II, III の x_n に δ_n を加えた値で置きかえ, 同じ b_i, k_i で逆進代入させたとき, δ_n が $\left(\frac{c}{\alpha}\right)^{n-1}$ で拡大されたり, 縮小されたり, また δ_n の order で誤差が変動している様子がよくわかる。

次に x_{n-1} 以後の x_i における誤差 δ_i について考えると, δ_i は (3・9) 式からわかるとおり, x_1 では

$$\left(-\frac{c}{\alpha}\right)^{i-1} \frac{1-\frac{\beta}{\alpha}}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^i} \delta_i$$

となって作用するが, $\left|\frac{c}{\alpha}\right| < 1$ のときは δ_i は縮小し,

$\left|\frac{c}{\alpha}\right| = 1$ のときでも δ_i は増大することがない。また $\left|\frac{c}{\alpha}\right| > 1$ では $i < j$ のときは δ_i の拡大率は δ_j の拡大率より小さいから, 前節の (3・2), (3・3) 式からもわかる

とおり, x_1 の誤差は逆進で k_m にはじめて丸めの誤差がはいってきたときを $m=j$ とすると, $\left(-\frac{c}{\alpha}\right)^{j-1} \times \delta_j$ に左右される。

[注] $\frac{a}{\alpha} < 1, \frac{c}{\alpha} > 1$ のときは x_n は正しく, $|x_1|$ は増大する。し

かし $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$ が小さいときは (2・7) 式より Pivot b_m が α に早く収束し, Pivot が安定し, 同時に k_m も安定するため, x_n は誤差を含まず, 完全に正しい値が得られる。逆進過程でもまた x_i に誤差がはいりにくくなるため, x_1 での誤差が $\left(\frac{c}{\alpha}\right)^{n-1}$ の order まで拡大されずに, 正しい値に近い解が得られる場合が多くなる (西野氏, 西原氏の例 [2] による)。

第3表は (a, b, c) の各組に対し, 50 元の方程式を解いたときの結果で, いずれも $\frac{a}{\alpha} < 1, \frac{c}{\alpha} > 1$ の場合であるが, どの組も x_{50} については $x_{50}=1$ と正解が得られた。しかし丸めの誤差がはいってくる x_i の場所が大きく異なっているため, x_1 の精度はまちまになっている。ところで一律に x_{50} で 1×10^{-7} の誤差を入れてやると, x_1 では $\left(\frac{c}{\alpha}\right)^{50}$ 程度に拡大されることが右に付け加えた欄で示されている。

$$\text{ii) } \left|\frac{a}{\alpha}\right| = 1 \text{ のとき}$$

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{a}{\alpha}\right| \cdot \left|\frac{c}{\alpha}\right| < 1$$

ゆえに $\left|\frac{c}{\alpha}\right| < 1$ となり, (3・10) 式より x_n の誤差 δ_n は縮小されるから, x_i は正しい値が得られる。

$$\text{iii) } \left|\frac{a}{\alpha}\right| > 1 \text{ のとき (例題 Case II)}$$

(3・7) 式で x_n は k_i の丸めの誤差の拡大により正しい解がでなかった。ところが例題 Case II でみるとおり x_1 では誤差は消失して正しい値がでている。そこで途中 k_j で丸めの誤差 ε_j が x_n で $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{n-j} \varepsilon_j$ まで拡大されたのが, 逆進代入してくるときに, どのように移り変わるかを調べてみる。

いま x_n から x_1 までもどしてきたとき, (2・5) 式により x_1 は x_n によって次式で表わされる。

第 3 表

a, b, c	d	丸めの誤差が はいってきた x_i	x_1	$x_{50}=1.0000001$ で逆 代入したときの x_1	$\log \left(\frac{c}{\alpha}\right)^{50}$
3, 23, 43	20	x_{28}	1.3196144 +12	-2.3906506 +17	25.48
3, 33, 63	30	x_{12}	1.0000027 +00	-8.3948732 +11	19.53
3, 43, 83	40	x_{49}	-9.4788951 +09	-5.0098575 +10	18.08
3, 53, 103	50	x_9	9.9992719 -01	-1.0593836 +10	17.35
3, 63, 123	60	x_6	9.9999477 -01	-2.5578786 +09	16.91
3, 73, 143	70	x_7	9.9999218 -01	-9.3235398 +08	16.61
3, 83, 163	80	x_8	1.0000027 +00	-1.4914663 +09	16.39
3, 93, 183	90	x_3	9.9999945 -01	-6.3923438 +08	16.23
3, 103, 203	100	x_{49}	-1.4847273 +08	-9.5428193 +08	16.10

ただし d は [2] によるもので, d により a, b, c を次のように決めている。 $a=3, b=a+d, c=b+d$

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{\bar{k}_i}{b_i} - \frac{c}{b_i} \frac{\bar{k}_{i+1}}{b_{i+1}} + \dots \\ &+ (-1)^{n-i-1} \frac{c}{b_i} \frac{c}{b_{i+1}} \dots \frac{c}{b_{n-1}} \frac{\bar{k}_{n-1}}{b_{n-1}} \\ &+ (-1)^{n-i} \frac{c}{b_i} \frac{c}{b_{i+1}} \dots \frac{c}{b_{n-1}} x_n \end{aligned} \quad (3 \cdot 11)$$

$\bar{k}_m$ での ε_j は (3・1) 式より

$$\bar{k}_m = k_m' + (-1)^{m-j} \frac{a}{b_j} \frac{a}{b_{j+1}} \dots \frac{a}{b_{m-1}} \varepsilon_j$$

となるから、これを (3・11) 式に代入すると

$$\bar{x}_i = x_i' + \varepsilon_j \sum_{m=i}^n \frac{c_m \cdot a_m}{b_m} \quad (3 \cdot 12)$$

ただし x_i' には ε_j 以外の誤差を含む

$$\left. \begin{aligned} c_m &= (-1)^{m-i} \frac{c}{b_i} \frac{c}{b_{i+1}} \dots \frac{c}{b_{m-1}} \\ &= \left(-\frac{c}{\alpha}\right)^{m-i} \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^i}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m} \\ a_m &= (-1)^{m-j} \frac{c}{b_j} \frac{c}{b_{j+1}} \dots \frac{c}{b_{m-1}} \\ &= \left(-\frac{a}{\alpha}\right)^{m-j} \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^j}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m} \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 13)$$

ゆえに k_j での誤差 ε_j が x_i にもどってきた時の誤差を $E_{i,j}$ とすると

$$E_{i,j} = \frac{\left\{ 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^j \right\} \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1-i} - 1 \right\} \left(-\frac{a}{\alpha}\right)^{i-j}}{\alpha \left\{ \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1} \right\}} \varepsilon_j$$

n が i にくらべて十分大きいとき

$$E_{i,j} = \left(-\frac{a}{\alpha}\right)^{i-j} \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^j}{\beta - \alpha} \varepsilon_j \quad (3 \cdot 14)$$

ゆえに $E_{i,j}$ は、 $i > j$ のとき $\left|\frac{a}{\alpha}\right| > 1$ によって ε_j は拡大されているが、 $i = j$ までくると ε_j の拡大はなくなり、 $i < j$ になると ε_j は逆に縮小されている。ゆえに x_n で $\left|\frac{a}{\alpha}\right| \varepsilon_j$ まで拡大された誤差も x_1 までもどってくると消滅して解には影響しなくなる。

この原因を考え直してみると、(3・12) 式で ε_j の係数、 c_m, a_m は (3・13) 式によれば、 c_m は $\frac{c}{\alpha}$ 、 a_m は $\frac{a}{\alpha}$ に関係して増減する。一方 $\left|\frac{a}{\alpha}\right| \cdot \left|\frac{c}{\alpha}\right| = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ であるから、 $\left|\frac{a}{\alpha}\right| > 1$ のときは $\left|\frac{c}{\alpha}\right| < 1$ となるので、 $|x_n|$ で $\left|\frac{a}{\alpha}\right|^{n-j}$ まで増加した誤差が $\left|\frac{c}{\alpha}\right|^{n-j}$ で縮小されたこ

とになる。

3.2 $b^2 - 4ac = 0$ の場合

2.1 節の ii) で調べたとおり n が大きくなると ill-condition となるが、(2・11) 式によれば pivot の桁落ちはおこらないから、 b_m は桁落ちによる精度落ちは考えなくてもよい。ゆえに 3.1 節の順に従って k_i での丸めの誤差の変動について調べてみる。

3.2.1 常数項、 x_n の誤差

(3・2) 式は (2・11) 式より

$$(-1)^{n-i} \frac{a}{b_i} \frac{a}{b_{i+1}} \dots \frac{a}{b_{n-1}} \varepsilon_i = \left(-\frac{a}{\alpha}\right)^{n-i} \frac{i}{n} \varepsilon_i \quad (3 \cdot 2)'$$

となるから、 k_n, x_n での誤差の状態は (3・6)、(3・7) 式と同じような変化をする。

3.2.2 逆進代入における x_i

i) $\left|\frac{a}{\alpha}\right| < 1$ のとき、 $\left|\frac{c}{\alpha}\right| < 1$ となり

(3・9) 式は (2・11) 式により次式になるから、 δ_n は縮小される。

$$\bar{x}_1 = x_1' + \left(-\frac{c}{\alpha}\right)^{n-1} \frac{\delta_n}{n} \quad (3 \cdot 9)'$$

ii) $\left|\frac{a}{\alpha}\right| = 1$ のとき、 $\left|\frac{c}{\alpha}\right| = 1$ となり

δ_n は (3・9)' 式より δ_n の order で振動するだけで拡大されることはない。

iii) $\left|\frac{a}{\alpha}\right| > 1$ のとき、 $\left|\frac{c}{\alpha}\right| < 1$ となり

(3・14) 式は次式になるから、3.1.4. の iii) と同様 $\frac{a}{\alpha}$ で増大した誤差が $\frac{c}{\alpha}$ で縮小される。

$$E_{i,j} = \left(-\frac{a}{\alpha}\right)^{i-j} \frac{j(n+1-i)}{\alpha(n+1)} \varepsilon_j \quad (3 \cdot 14)'$$

3.2.4 n が大きいときの $\frac{a}{\alpha}$ 、 $\frac{c}{\alpha}$ による誤差の変動は 3.1 節と同様であることはわかったが、この場合は 2.1 節によれば ill-condition となる。一方 b_m についてみると、(2・11) 式による α への収束は (2・7) 式による時よりも悪く、pivot がなかなか安定しないため b_m の丸めの誤差が作用して解の精度を悪くしている。
(a, b, c) = (2.4, 2) の 200 元の例では、 $a/\alpha = c/\alpha = 1$ であるから、 $\frac{a}{\alpha}$ 、 $\frac{c}{\alpha}$ による誤差の拡大、縮小は行なわれないのに、 $x_{200} = 1.0000000$ 、 $x_1 = 1.0000002$ で一番精度の悪い x_i が $x_{32} = 0.99999470$ となっている。なお (2) 式により、 $\max_i |\lambda_i| = 7.9995116$ 、 $\min_i |\lambda_i| = 4.884 \times 10^{-4}$ となり、(2・1) 式の P condition は $P = 1.64 \times 10^{-4}$ となっていることから、 x_{32} の誤

差が ill-condition によるものであることが推察できよう。

3.3 $b^2 - 4ac < 0$ の場合 (例題 Case IV, V, VI)

n が大きいときには pivot の大きな桁落ちがおこり得るが、まずこの場合を除いて考察する。

3.3.1 常数項の誤差

k_n での k_i の誤差 ε_i の影響は (3.2) 式で与えられていたが、(2.10) 式により (3.2) 式は次式でおきえられる。

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-i} \frac{a}{b_i} \frac{a}{b_{i+1}} \cdots \frac{a}{b_{n-1}} \varepsilon_i \\ &= \left(-\sqrt{\frac{a}{c}} \right)^{n-i} \frac{\sin i\theta}{\sin n\theta} \varepsilon_i \end{aligned} \quad (3.15)$$

ゆえに k_i で丸めの誤差 ε_i が発生したときの $\bar{k}_n$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{a}{c} < 1 \text{ のとき} \\ & \quad \bar{k}_n \text{ は } \varepsilon_i \text{ が縮小し, 正しい値} \\ & \frac{a}{c} > 1 \text{ のとき} \\ & \quad |\bar{k}_n| \text{ は } \left(\frac{a}{c} \right)^{\frac{n-i}{2}} \text{ により } \varepsilon_i \text{ が拡大され増大する。} \\ & \frac{a}{c} = 1 \text{ のとき} \\ & \quad \bar{k}_n \text{ は, } \varepsilon_i \text{ は振動するが拡大されず正しい値} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

3.3.2 x_n について

(3.16) 式の $\bar{k}_n$ によって、 k_i で丸めの誤差 ε_i が発生したときの $\bar{x}_n$ は次のようになる

$$\left. \begin{aligned} & \frac{a}{c} \leq 1 \text{ のとき } \bar{x}_n \text{ は正しい値} \\ & \frac{a}{c} > 1 \text{ のとき } |\bar{x}_n| \text{ は } \left(\frac{a}{c} \right)^{\frac{n-i}{2}} \varepsilon_i \text{ により増大} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

3.3.3 逆進代入における x_i

1) $\frac{a}{c} < 1$ のとき (例題 Case IV)

(3.17) 式より $\bar{x}_n$ は正しくでている。しかし $\bar{x}_n$ での丸めの誤差 δ_n は $\bar{x}_1$ までもどってきた時の状態を考えると、(3.8) 式は (2.10) 式により

$$\bar{x}_1 = x_1' + (-1)^{n-1} \left(\frac{c}{a} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin \theta}{\sin n\theta} \delta_n \quad (3.9)''$$

ただし x_1' には δ_n 以外の誤差を含む

ゆえに $\frac{c}{a} < 1$ より $|\bar{x}_1|$ は x_n での丸めの誤差 δ_n の拡大により増大する。

ii) $\frac{a}{c} = 1$ のとき (例題 Case VI)

この場合も $\bar{x}_n$ は正しい値が得られる。 $\bar{x}_n$ での丸めの誤差を考えると、(3.9)'' 式より $\frac{c}{a} = 1$ であり、

Pivot b_n の桁落ちもないことにより δ_n の拡大はなく、 $\bar{x}_1$ は正しい値が得られる。

iii) $\frac{a}{c} > 1$ のとき (例題 Case V)

(3.17) 式より $|\bar{x}_n|$ は $\left(\frac{a}{c} \right)^{\frac{n-i}{2}} \varepsilon_i$ により増大された。

3.1.4 の iii) の考察のように、 k_j での丸めの誤差 ε_j が x_n から x_i にもどってきたときの誤差 $E_{i,j}$ について考えると、(3.14) 式は (2.10) 式によって次式になる。

$$\begin{aligned} E_{i,j} &= \frac{\varepsilon_j}{\sqrt{ac}} (-1)^{i-j} \left(\frac{a}{c} \right)^{\frac{i-j}{2}} \\ &\quad \times \sum_{m=i}^n \frac{\sin i\theta \cdot \sin j\theta}{\sin m\theta \cdot \sin(m+1)\theta} \end{aligned}$$

ここで $\sum_{m=i}^n \frac{\sin i\theta \cdot \sin j\theta}{\sin m\theta \cdot \sin(m+1)\theta}$ は Pivot b_m の桁落ちがないから分母は小さくならないから有限値である。ゆえに 3.1.4 節の iii) と同様に、 k_i で発生した丸めの誤差 ε_i は x_n で $\left(\frac{a}{c} \right)^{\frac{n-i}{2}} \cdot \varepsilon_i$ まで拡大され

たのが、 x_i までもどってくると $\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{ac}} \sum_{m=i}^n \frac{\sin^2 i\theta}{\sin m\theta \cdot \sin(m+1)\theta}$ に縮小されたことになる。

3.3.4 以上をまとめてみると、 $b^2 - 4ac < 0$ のとき

$$\left. \begin{aligned} & \frac{a}{c} < 1 \text{ のとき} \\ & \quad \text{前進過程で誤差縮小, 逆進で増大} \\ & \frac{a}{c} > 1 \text{ のとき} \\ & \quad \text{前進過程で誤差増大, 逆進で縮小} \\ & \frac{a}{c} = 1 \text{ のとき} \\ & \quad \text{前進, 逆進とも誤差の増大, 縮小はない。} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

3.3.5 Pivot の桁落ちの影響

1) Pivot の桁落ちは (2.10) 式によりわかる。すなわち (2.10) 式は次式であるから

$$b_m = \frac{\sqrt{ac} \sin(m+1)\theta}{\sin m\theta}$$

$(m+1)\theta \doteq k\pi$ のとき b_m は桁落ちして小さくなる。かつ桁落ち分だけ精度が悪くなる。またこのとき b_{m+1} もまた同程度精度が悪くなるが、 b_m の桁落ち分 order が高くなり大きくなる。

ところが b_{m+2} は (2・3) 式より

$$b_{m+2} = b - \frac{ac}{b_{m+1}}$$

となるから、第2項は b_m の桁落ち分 order が下がるが、有効桁の減少は b_{m+2} の精度を悪くすることなく、 b_{m-1} 程度にもどってくる。

結局 Pivot b_m の桁落ちの影響が大きくひびくのは b_{m+1} だけであって、それ以外の b_i には大きくひびかない。

ii) 常数項での b_m, b_{m+1} の影響

$$k_{m+1} = k - \frac{a}{b_m} k_m = k - \sqrt{\frac{a}{c}} \frac{\sin m\theta}{\sin(m+1)\theta} k_m$$

より k_{m+1}, k_{m+2} は b_m の桁落ち分精度が悪くなり、 k_{m+1} は b_{m+1} と同程度の order となる。 k_{m+2} はもとの order にもどるが、 k_{m+1}, b_{m+1} の誤差がそのまま影響し、 b_{m+2} のときのように誤差の消滅がない。ゆえに常数項では b_m の桁落ちにより k_{m+1} 以後の k_i はその誤差の影響をうける。これらの誤差は他の丸めの誤差に加わって、(3・16) 式の法則に従って変動する。

iii) 逆進過程では x_{m+1}, x_m のとき b_m, b_{m+1} のため一時的な誤差の変動がある (例題 Case IV, V の x_{55}, x_{54})。これらの誤差も含めてすべての誤差は、3.3.3 節で示したとおり $\frac{a}{c} \leq 1$ により、縮小、拡大などが行なわれる。

3.3.6 ill-condition となる場合

i) ill-condition となる場合は、2.2 の i) (2) で調べたとおり b_n が桁落ちしたときで桁落ちしただけ x_n の精度が悪くなり、以後すべての x_i に及んでくる。Case IV, V の 109 元がちょうどこの場合になっている。108 元の解と比較してみると、ill-condition による4桁の精度落ちの様子がよくわかるとともに、特異な誤差拡大の方が大きく解に影響していることがわかる。

ii) n 元の方程式で Pivot b_n が桁落ちしたとき、 $|A|$ が小さくなり ill-condition となることは2.2節でのべたが、 $(n+1)$ 元になると、 b_{n+1} は b_n で桁落ちした分桁上がりするため、 $|A|$ は小さくならないので ill-condition ではなくなる。また (2・1) 式により $\min |z_i|$ も小さくならないことからわかる。

4. ま と め

以上のことから、 n が非常に大きくなると、誤差の一方的な拡大、縮小がいわゆる ill-condition の誤差

よりも優越し、次表のとおりになる。

第 4 表

	$ x_n $	$ x_1 $	備 考
$b^2-4ac \geq 0$	$\left \frac{a}{\alpha}\right < 1, \left \frac{c}{\alpha}\right > 1$	正しい値	増大する可能性あり Case I
	$\left \frac{a}{\alpha}\right < 1, \left \frac{c}{\alpha}\right \leq 1$	正しい値	正しい値 Case III
	$\left \frac{a}{\alpha}\right = 1, \left \frac{c}{\alpha}\right \leq 1$	正しい値	正しい値
	$\left \frac{a}{\alpha}\right > 1, \left \frac{c}{\alpha}\right < 1$	増 大	正しい値 Case II
$b^2-4ac < 0$	$\frac{a}{c} < 1$	正しい値	増 大 Case IV
	$\frac{a}{c} > 1$	増 大	正しい値 Case V
	$\frac{a}{c} = 1$	Pivotの桁落ち程度の誤差 Pivotの桁落ち程度の誤差 Case VI	

ただし“正しい値”には最後の桁での丸めの誤差を含む

[注意] $a=c$ の場合について

物理学、工学によく現われる型の偏微分方程式は、差分近似した場合 $a=c$ の型の三項方程式になることが多い。この場合は

$a=c, |b| \geq 2ac$ のとき

$\left|\frac{a}{\alpha}\right| = \left|\frac{c}{\alpha}\right| < 1$ となり、Case III に該当する。

$a=c, |b| < 2ac$ のとき

$\frac{a}{c} = 1$ となり、Case VI に該当する。

ゆえに $a=c$ では、Case III の場合は Pivot の桁落ちの心配もなく次元が高くなっても正しい解が得られる。

しかし Case VI の場合は n が大きくなると特異な誤差拡大はないが、Pivot の桁落ちがおこり、ill-condition となる場合がある。

参 考 文 献

- 1) 板垣芳雄：帯状連立一次方程式の安定性に関する考察 [航空技研, 研究資料]
- 2) 清野武, 西原宏：連立一次方程式の多段消去に関する実験 [情報処理学会講演予稿集 1963, 12., p 77~78]
- 3) 永坂秀子：帯状連立一次方程式のある性質について [情報処理学会講演予稿集 1963, 12., p 73~74]

(昭和39年5月14日受付)