06 折紙ファブリケーションとコンピュテーション

応
般

舘　知宏（東京大学）

折紙研究の現在

折紙は紙を折ることでさまざまなかたちを作る伝統的な遊び・創作活動であるが，近年ではORIGAMIとして国際的な広がりを見せている．また，数学，情報科学，材料科学，構造工学，建築，デザイン，芸術，教育，歴史などの多様な側面からも研究されており，表現としての折紙が工学的に応用される一方で，逆に数理的手法によってさまざまな作品表現が生まれるなど，折紙研究は領域横断的・統合的な発展を遂げている．折紙の工学的応用も発展中の分野で，これらの研究の入門書としては文献1）が挙げられる．

折紙研究の発展では，コンピュテーショナル・オリガミ，すなわち折紙の幾何学とアルゴリズムにかかわる研究が重要な役割を担っている．コンピュテーショナル・オリガミの研究は，デザインに直接利用される実用的なものから，それらの基礎となる，折紙にかかわる問題の構成的証明や計算量理論などの理論的研究を含む．特に理論研究や未解決問題に興味のある読者は文献2）を参照されたい．

本稿では，折紙のファブリケーションへの応用について，その可能性とデザインの基礎となるコンピュテーショナルな手法について概観する．応用を「かたち」と「うごき」に分けて解説する．「かたち」の利用では1枚のシート材からの成形とそれを可能とする可展面の幾何学，曲線折り，デザインのためのアルゴリズムを概観する．「うごき」の応用では，立体形状の折り畳みと変形機構に関連した，平坦折り可能性，剛体折紙という折紙の数理モデルについて解説する．最後に関連するソフトウェア・ツールを紹介する．

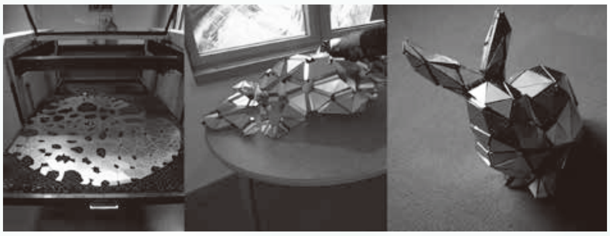

図-1　スチール板のレーザカッティングと，折り曲げによるStanford Bunny　(T. Tachi, K. Cheung, E. Demaine, M. Demaine)

かたちの利用：1枚から成形する

空間デザインやパーソナル・ファブリケーションなどの，一品ごとに個別的な適応性が求められるものづくりにおいて，折ることで2次元の平面から3次元の曲面を作る折紙は有用な手法である．バキュームフォーミングなどの塑性加工を用いた加工は，3次元の型が必要で一品生産のデザインには向かない．かといって3Dプリンタのような3次元ラピッドプロトタイピング技術では，加工時間が長くなり，加工範囲がマシンサイズによって限定されるなどの問題がある．この点で，塑性変形を含まず比較的少ない加工で2次元から3次元を構築できる折紙は，有利である．シートに2軸のルータやレーザカッター，ウォータージェットカッターなどの2次元CNC加工で折り線パターンを作成し，それに沿って折れば1つ1つ異なる形状を得られる．折紙は，曲面をパーツに切り分けず，互いに連動する幾何的な折りが組み立ての役割も担う．金属シートの成形に折紙を利用した例を図-1に示す．金属シートにCNC加工で溝を掘れば，精度の低い手作業でも比

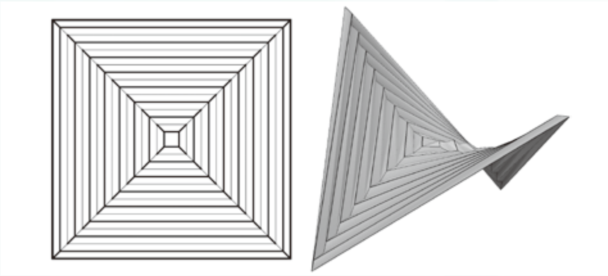

図 -2　折紙による鞍型曲面 (Pleated Hypar)

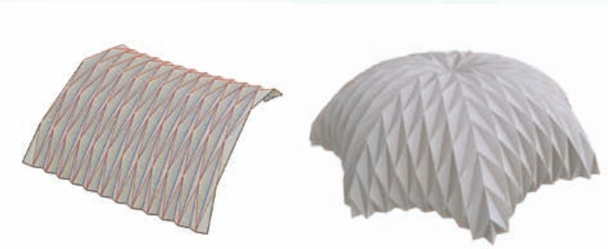

図 -3　折紙による円筒型形状（吉村パターン：左）とそれを応用した椀型曲面（右）

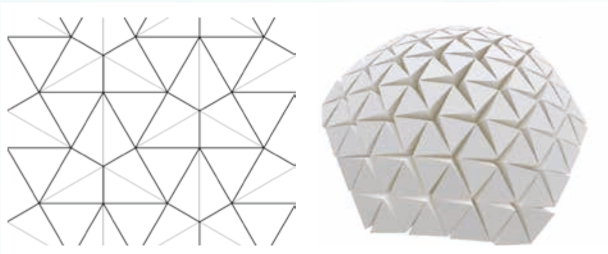

図 -4　折紙による椀型曲面（Resch によるパターン）

較的精度の高い 3 次元的な構築が可能となる．

折ったかたちが欲しい 3 次元形状となる折りパターンすなわち「展開図」が得られるならば，展開図に沿って加工したシートは，材料と設計図面を兼ねたものとなる．3 次元形状を 2 次元パターンとして焼き付け，それを再現するものの作り方である．ただし「折る」という方法では，強い幾何的な制限があるので，欲しいかたちを折ることは自明ではない．これをどのように解決するかが問題となる．

■ 可展面

1 枚の紙を伸び縮みさせずにできる曲面を「可展面」と呼ぶ．すなわち折紙は可展面である．可展面は，表面がなめらかである場合，柱面，錐面，接線曲面という単曲面に限定され，鞍型，椀型の複曲面は作ることはできない．しかし，ここになめらかさを壊して折りを導入すると図 -2 ～ 6 に示すように，全体としては鞍型や椀型の形状が自然に生まれる．ここに折りによる形状デザインの本質がある．

図 -5　椀型にも鞍型にもなる折紙（藤本修三「なまこ」）

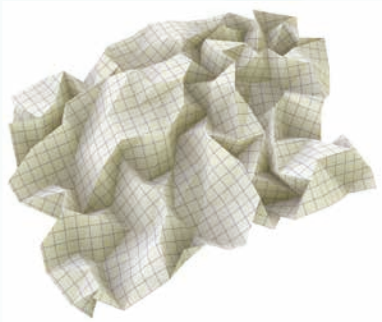

図 -6　自由な折紙形状（クシャクシャの紙）

通常の折紙では折り線を直線と考えることが多いが，折り線を曲線とすると曲面を含んだ表現豊かな折紙も作れる．これは「曲線折り」と呼ばれている．曲線折りは次章にて解説し，ここでは，折り線が直線のみで構成され，全体が多面体メッシュで表される単純なモデルを考える．

このような折紙の可展性は，3 次元形状の表面上の距離と展開図上の距離が等しくなるような等長変換として表せるが，局所的な解釈では，すべての頂点周りの角度の和が 360° となることとして表現できる（図 -7）．

■ デザイン法：円領域法／木構造法

アートにおける折紙では，1 枚の正方形用紙を使い，切ったり貼ったりせず，折るだけでかたちを作りあげるという目標が好まれる．このような創作において，欲しいかたちを先に想定し，そのかたちに至るための，折り線の構造・配置を決定することを「折紙設計」と呼ぶ．

現代の折紙作家が最も頻繁に用いる折紙設計のア

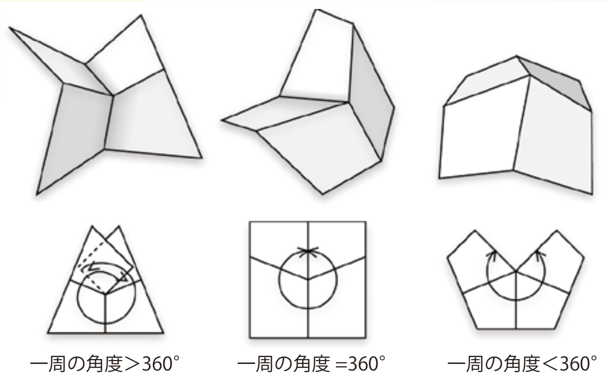

図 -7　頂点に集まる角度の和

図 -8　簡略化した Stanford Bunny の展開図（左）と折りあがり（右）．折りは筆者による

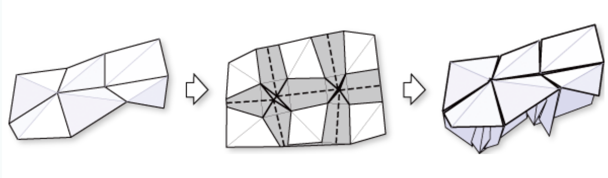

図 -9　ヒダを折ることで元の 3 次元形状が再現される

図 -10　同心円状の折りによる鞍型曲面．古くは 1927 年美術・建築学校 Bauhaus の学生作品として見られる．写真は筆者によるステンレス板を使って折ったもの

ルゴリズムは，目黒俊幸による円領域法，あるいは Robert Lang による木構造法（文献 2）16 章）である．細く折り畳んだとき任意の樹状となるような折紙を設計する問題を，平面上で円をパッキングする問題に置き換えることで解く．この問題の置き換えは，閉じた傘を開いて円形とするイメージを持つと理解しやすい．これは，数値的に解くこともできるが，実際には図的に解く折紙作家が多い．

■ デザイン法：ヒダによる折紙化

3 次元的なシェルを作ることができると成形技術への応用へ繋がる．任意に与えたポリゴンメッシュを折紙で実現する方法はあるだろうか．これが理論的に可能であることはまだ数学的な予想であるが，筆者は，実用的なレベルで図 -8 のような自由形状を 1 枚の紙から折って作れるようなデザイン手法を提案している [3]．考え方は，メッシュを構成する面を一度すべてバラバラに平面に配置し，それらが再び元の多面体を構成するようなヒダ状の折り線を構築するというものである（図 -9）．そのためには対称性や干渉回避などの多くの非線形の問題を数値計算で解く．図 -1 はこの手法で得られるパターンのバリエーションである．ここでは，製作のために板に複数の穴を開けているので従来の意味での「折紙」ではないが，ペーパークラフトのようにバラバラのピースにしてしまうのではなく，折り線がそれぞれ連動し合うことで，最終形状まで導かれる点に折紙利用の特徴がある．

■ 曲線折り（Curved Folding）

曲線折りは，微分幾何学と微分不可能な折りが組み合わさる取り扱いの難しい分野である．デザインの例は古くからある（図 -10）が，この同心円状に山谷の折り線を配置しただけのパターンでも，この形状が数学的に正しいかどうかは現在でも未解決問題である．3D スキャン等による実測値を元に曲線折りを再構築する研究 [4] はあるが，シミュレーションとデザインための統合的な手法は得られていない．

それでもいくつかの対称性を仮定すると，曲線折りのうち，簡単に扱える種類のものがある．(1) 可

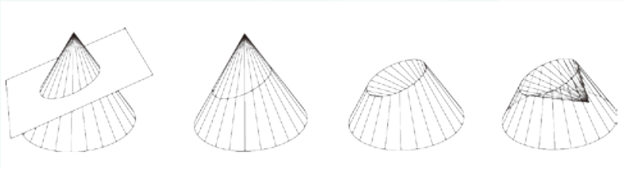

図 -11　可展面の鏡映反転による曲線折りの作成

図 -12　可展面の鏡映反転を繰り返した形状

図 -13　空間曲線からの曲線折りの生成

図 -14　Resch による曲線折りの CG レンダリング．空間曲線を元に生成したと考えられる（出典：文献 5））©1974 IEEE Inc. Included here by permission.

図 -15　Huffman による "Hexagonal column with cusps" の再現モデル．折り・写真提供：D. Koschitz

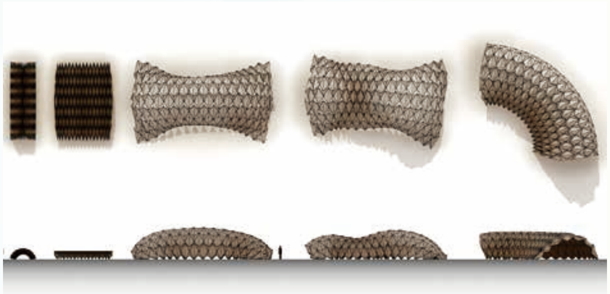

図 -16　ポータブルな建築のイメージ．「なまこ」のバリエーションによる多自由度機構（T. Tachi, M. Masubuchi, M. Iwamoto）

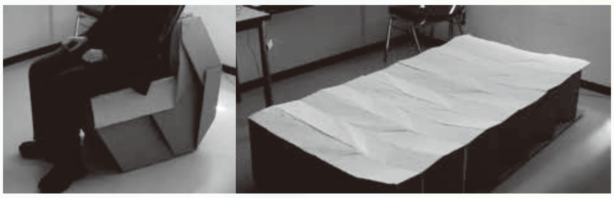

図 -17　折紙の応用で椅子からベッドに変化する家具．製作：筆者

展面を平面で切断し，その平面で鏡映反転させると，やはり曲線折りを含んだ可展面になることを利用する．ここでデザインできるのは，折られた折り線が平面上に置かれた平面曲線となるものに限定される（図 -11, 12）．（2）1 つの空間曲線を与えると，これを折り線とする曲線折りを導くことができる．ただし，独立に設定できる折り線は 1 種類のみ（図 -13）．この 2 つのデザインアプローチは，1970 年代における Ron Resch による作品においても見ることがでる（図 -14[5]）．同時代の曲線折りの研究者としては，Huffman 符号化で知られる David Huffman がおり，多くの優れた作品を残している（図 -15）．しかし，この不思議な形状も幾何的に未解決である．曲線折りのデザインや数理に関するレビューとしては文献 6）がある．

うごきの利用：折り畳み

立体形状を折り畳む，折紙のうごきの応用は，折紙応用のもう 1 つの柱である．折り畳める容器や，ポータブルな日用品，コンパクトに折り畳んで搬送し，必要な場所で展開できる仮設空間や（図 -16），用途に合わせてかたちを変えるような家具のデザインを考えることができる（図 -17）．

ここで，折り畳めるというのは，2 種類の性質を含意している．1 つ目は，折り線をぴったり 180° に折った状態で完全に平坦になった状態が存在するか

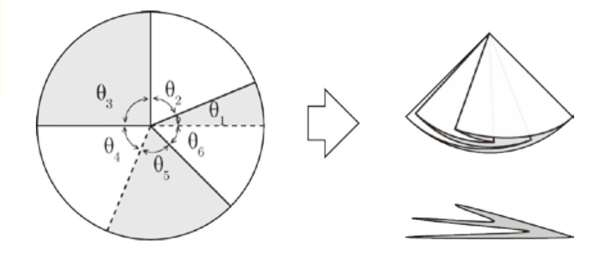

図 -18　折り畳める頂点の条件．灰色に塗った角の符号を反転させて角度をたすと 0 となる．また, 山折り（実線）と谷折り（破線）の数の差は 2 である

どうかという問題である．これは，小さいスケールの柔らかい材料をコンパクトに畳むパッケージングなどの用途に関連し，幾何的には，平坦折り可能性として表現される．2 つ目は，折れた状態と広がった状態の間を連続的に変形できるかどうかという問題であり，大きいスケールで硬い材料や厚みのある材料を必要とする建築構造などで必須となる性質である．1 枚のシート材ではなく，いくつもの剛体パネルを回転ヒンジでつなぎ合わせるようなメカニズムを想定しており，このようなモデルは剛体折紙と呼ぶ．

平坦折り可能性

曲線折りは折り畳みできないため，必然的に直線のみで構成される折紙になる．折紙の平坦折り可能性は，(1) 幾何的条件，(2) 重なり順の条件の 2 つの条件で表される．

幾何的条件は，それぞれの折り線で面を反転させた 2 次元図形が矛盾なく存在できることを条件とし，局所的には，それぞれの頂点に対して，折り角の交代和が 0 となること（川崎定理）として表される．また一点に集まる折り線は必ず偶数で，山折り線と谷折り線の数の差は必ず 2 になる（前川定理）(図 -18)．

一方，重なり順の条件は組合せ問題を解く必要がある．この判定問題は，それぞれの頂点が独立であれば線形時間で解けるが，一般的な折紙のパターンの場合は NP 困難となることが Bern と Hayes によって証明されている（文献 2）13 章)．

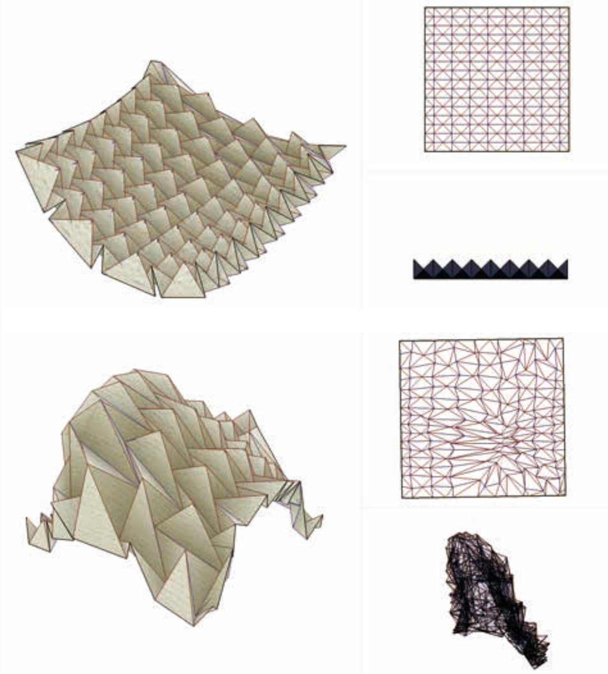

図 -19　折り畳み条件を満たした自由変形．上：「なまこ」．下：自由変形．右画面は展開図と，平坦に折られたときの形を示す

パターンを自由に変化させる

折紙の可展性，平坦折り可能性を満たした折紙パターンは繰り返しやタイリングによる，平坦折り模様がよく知られる．一部分の構造が全体と連動するので，平行移動，回転，拡大縮小などの対称性を用いることで，パターンを生成することができる．

しかしこのようなアプローチで自由な形状を得ようとするのは難しい問題である．1 つのアプローチとして，筆者は，可展性，平坦折り可能性を繰り返し数値的に解くことで，インタラクティブに 3 次元形状を自由に編集できるツールを通したデザイン手法を提案している [7]（図 -19）．

剛体折り（Rigid Origami）

剛体折紙は，折紙の面を剛体のパネル，折り線を回転ヒンジとしてモデル化した幾何的な機構のモデルである．このモデルで変形を許すパターンを剛体折り可能と呼ぶ．剛体折り可能であれば，図 -20 のように厚みを持ったパネルを使うことができる．このモデルが重要なのは，紙で折ると一見動くように見えても，これを大きなスケールで実現すると，機

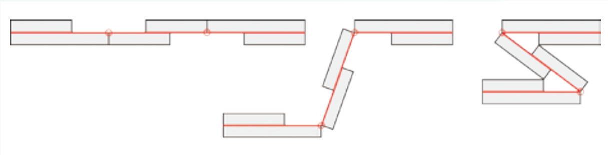

図 -20　厚みのあるパネルで機構を作る[6)]

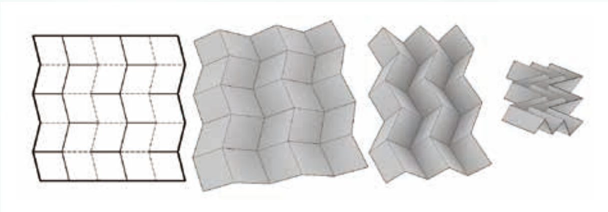

図 -21　ミウラ折り

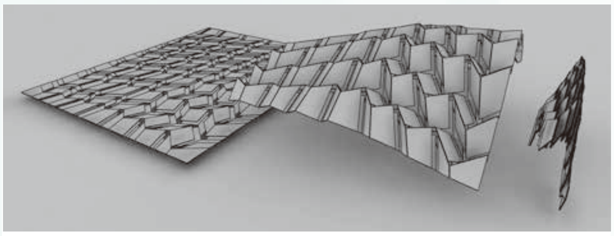

図 -22　剛体折り可能なミウラ折りの一般化

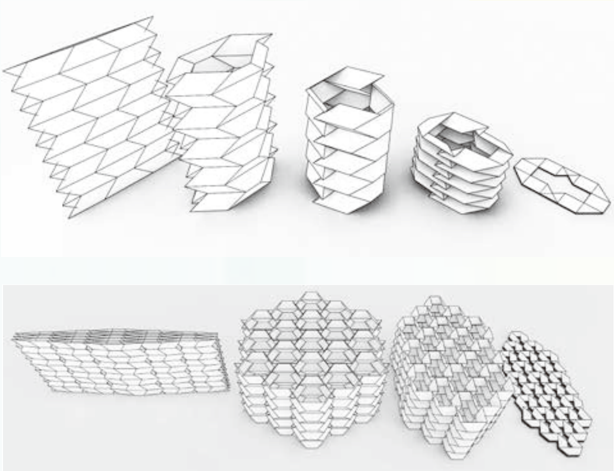

図 -23　剛体折り可能な折り畳み筒（上）とセル構造（下）（K. Miura, T. Tachi）

構によってパネルの歪みが発生し致命的になりかねないからである．

パネルが曲面を覆うように連なる折紙においては，関節がシリアルに繋がるロボットアームとは異なり，至るところに閉じたループのあるパラレルな機構となる．このような複雑な機構が，剛体折紙の動きの面白さであり，扱いの難しさでもある．折り角の微小変化を変数としてループごとに発生する拘束を数値計算で解けば，折りのシミュレーションが可能となる．

「なまこ」のように三角形パネルを基本とした折紙は通常剛体折り可能で，多自由度でさまざまな形に変形する（図 -16）．一方でミウラ折り（図 -21）のような四角形ベースの折紙は，変数の数に比べ拘束の数が多い冗長なシステムなので，通常は剛体折り不可能で，特殊な対称性が存在するときのみ一自由度のメカニズムになる．一自由度であることは，1 カ所の折りを変化させると全体形状が変化するという非常に良い性質である．このようなパターンの形態バリエーションを探るには，折りパターンの機構に寄与する内在的な特異性を探す必要がある．文献 1）第 5 章では，剛体折紙のデザイン方法をまとめている．最後に，図 -22，23 にトポロジの異なる剛体折紙の形態デザイン例を示す．

コンピュテーショナル・ツール

最後に，折紙のデザインのためのアルゴリズムに関係したコンピュテーショナル・ツールを紹介する．すべて無償で公開されている．

- Origami Simulation[☆1]（宮崎慎也）：対話的なステップバイステップの折紙シミュレータ．
- Tree Maker[☆2]（Robert Lang）：木構造法を元にしたグラフ上の折紙が設計できるツール．
- Tess[☆3]（Alex Bateman）：平坦折り模様の生成ツール．タイリングパターンを元にパラメトリックに調整可能な織り模様を作成する．
- ORIPA[☆4]（三谷純）：折紙の展開図専用ドローイングソフト．展開図からの折り畳みの重なり順の計算が実装されている．
- ORI-REVO / ORI-Ref[☆4]（三谷純）：可展面の鏡映反転を利用したインタラクティブな立体折紙・

☆1 http://www.om.sist.chukyo-u.ac.jp/main/research/origami/
☆2 http://www.langorigami.com/treemaker.htm
☆3 http://www.papermosaics.co.uk/software.html
☆4 http://mitani.cs.tsukuba.ac.jp/origami_application/

曲線折紙生成ツール．

- Rigid Origami Simulator ☆5（舘知宏）：剛体折紙のシミュレーションツール．展開図から連続的な折りの動きをシミュレーションする．
- Origamizer ☆5（舘知宏）：入力メッシュ形状をヒダの折り生成アルゴリズムで折紙化するツール．
- Freeform Origami ☆5（舘知宏）：幾何的拘束下で折紙パターンを自由に変形させるインタラクティブ・ツール．可展性，平坦折り可能性，剛体折り可能性などの条件を満たすような数値計算をバックグラウンドで行う．

温故知新

本稿では，折紙をファブリケーションの観点から考え，成形技術，折り畳み，機構の生成についてそれぞれかかわりのある数理とアルゴリズム，関連するコンピュテーショナル・ツールを簡単に紹介した．

現在，さまざまな分野でデザイナーが折紙に着目しているが，闇雲にツールを使ってデザインするのではなく，基本の幾何学的性質を理解すること，また再発見の多い領域でもあるので，過去の作家の作品や研究を知り，適切に参照することが，本当の意味での創作活動に繋がると考える．

☆5 http://www.tsg.ne.jp/TT/software/

参考文献

1) Demaine, E. and O'Rouke, J. : Geometric Folding Algorithm : Linkages, Origami, Polyhedra, Cambridge University Press (2007).
2) 日本応用数理学会（監修），野島武敏，萩原一郎（編集）：折紙の数理とその応用，共立出版（2012）．
3) Tachi, T. : Origamizing Polyhedral Surfaces, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 16 (2), pp.298-311 (2010).
4) Kilian, M., Flöry, S., Chen, Z., Mitra, N. J., Sheffer, A. and Pottmann, H. : Curved Folding, ACM Transactions on Graphics, 27-3, Article No.75 (2008).
5) Resch, R. : Portfolio of Shaded Computer Images, Proc. IEEE, Vol.62, No.4, pp.496-502 (1974).
6) Demaine, E., Demaine, M., Koschitz, D. and Tachi, T. : Curved Crease Folding - a Review on Art, Design and Mathematics, in Proceedings of the IABSE-IASS Symposium 2011, London, UK, September 20-23 (2011).
7) Tachi, T. : Freeform Variations of Origami, Journal for Geometry and Graphics, 14 (2), pp.203-215 (2010).

（2012 年 10 月 19 日受付）

舘　知宏　tachi@idea.c.u-tokyo.ac.jp

東京大学大学院総合文化研究科広域システム科学系助教．JST さきがけ研究者．研究対象は折紙工学と建築のコンピュテーショナル・デザインなど．