談　話　室

固有値問題—Power method—について*

萩　原　　博**

この数年の間に計算機向けのすぐれた数値計算の教科書が次々に出版された[1~4]など．計算機に関心をもつものにとって，大へんあり難いことである．

ここでは行列の固有値，固有ベクトルを求める方法の一つである Power Method をめぐって，これらの本を読んで気になったことを二，三述べてみたい．

普通 Power Method を説明するのに，考えている行列 $\boldsymbol{M}$ について，

（A）　行列 $\boldsymbol{M}$ の固有ベクトルが全空間を生成する．

という仮定をおいている．

ところで，これらの教科書の多くでは（文献 1）の p. 73, 3）の p. 64, 4）の p. 174），行列の一般論として，あたかも，任意の行列について（A）が成り立つと，受けとれるように書かれているが，如何なものであろうか．

周知のように，たとえば $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ については（A）は成り立たない．一般に（A）が成り立つための必要十分条件は

（B）　行列 $\boldsymbol{M}$ の Jordan 標準形が対角行列になる，ことである（たとえば文献 5）p. 109）．

次にどの本でも具体的な Power Method の説明では行列 $\boldsymbol{M}$ を実対称行列にとったり，固有値 λ について，$|\lambda_1|>|\lambda_2|>\cdots|\lambda_n|$ という条件をつけたりしているので，（A）を使うことに心配はないわけであるが（もっとも文献 3）ではそうなっていない），逆にいえば，（A）したがって（B）が成り立たない場合についてはほとんど何も触れられていないことになる．紙面の関係とか，他の項目とのかねあいもあるのであろうが，全然無視したり，重根の場合は困難であるとか，重根がないことが基本的制約であるとかと，かたずけてしまうのはどんなものであろうか（なお文献 6）でも（A）は当然としているようである）．しかし，実際上は（A）が成り立たない行列に対しても，Power Method を機械的に適用してうまくいく場合が多いらしい．理論的にも古典的な結果かも知れないが，たとえば

$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$　$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$　$(\boldsymbol{M}^k X)_i$: $\boldsymbol{M}^k X$ の第 k 成分

とすれば

$$\frac{(\boldsymbol{M}^m X)_1}{(\boldsymbol{M}^{m-1}X)_1}=\frac{\lambda^m x_1+m\lambda^{m-1}x_2}{\lambda^{m-1}x_1+(m-1)\lambda^{m-2}x_2}\to\lambda$$

$(m\to+\infty)$

であるから Power Method の適用は可能である．少なくとも最大固有値（絶対値で）のみを求めるのであれば，一般に行列 $\boldsymbol{M}$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ が $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k$，$|\lambda_k|>|\lambda_{k+1}|\geqq\cdots\geqq|\lambda_n|$ である場合には

（B）の条件に関係なく Power Method を適用可能である，

ことが上とほぼ同様に示される．もっとうるさくいえば Power Method の使える行列 $\boldsymbol{M}$ のクラスはさらに拡げられるはずである（もっとも実際の応用上では，桁落ちやなにかで，理論上の適用可能性と一致しない例があるらしいが）．

以上この方面の専門家には自明のことかも知れませんが，話題を提供したことにでもなれば幸いです．

参考文献

1）森口繁一編：ALGOL 入門，日科技連，昭和 37 年．
2）一松　信著：数値計算，至文堂，昭和 38 年．
3）宇野利雄著：計算機のための数値計算，朝倉書店，昭和 38 年．
4）山内二郎他編：電子計算機のための数値計算法 I，培風館，1965．
5）古屋　茂著：行列と行列式，培風館，1957．
6）永坂　秀子：最大固有値の種類による累乗法解法ならびに，その取扱い上の注意，第 5 回情報処理学会予稿集，昭和 39 年．

（昭和41年2月2日受付）

* On the Eigen-value Problem —Power Method—, by Hiroshi Hagiwara (Otani College of Technology of Toyama)

** 富山県立大谷技術短期大学