

自由形状曲面の理論と設計*

穂 坂 衛**

1. ま え が き

いままでの計算機は、すでにプログラムされた数値計算などには、きわめて有力な機械であるが、プログラムを作るに至るまでの仕事や、処理していく過程において、つぎの行為を決定しなければならないような問題に対しては適用されにくく、その上入力是非常に形式化され、出力も必ずしも人にとって好ましい形にはなっていなかった、したがって人の創造力や気まぐれが、仕事の処理の途中で随時入り込んでくる種類の仕事は、たとえ多くの部分がルーティンの操作であっても、計算機が入り込む余地がなく仕事の合理化は手のつけようがなかった。

しかし計算機の入出力と仕事の処理の様式を人の習慣や思考の過程に合わせ、人が計算機に直結して、その場で自由に計算機に仕事をさせることができるならば、計算機のもつ高速、正確なデータ処理能力と、人のもつ創造能力と総合判断能力を結合させて、より合理的なシステムを作ることが可能であろう。われわれは人が推進と決定の主役を演ずる仕事として、創造的な設計の問題を取りあげ、計算機とどれだけ結合できるか考えてみることにした。対象として自由形状曲面の設計を取り上げる。これは工業製品として、いたる所に使用されるにも拘わらずその設計、製作は勘、熟練および複雑な手続が伴い、時間と費用がかかり、設計、製作の合理化が要望されているからである。この仕事に計算機を導入しても、設計者と直結して、実時間でしかも設計者が馴れた方法で計算機と通信し合うのでなければ、両者の十分な協力は得られるとは思えない。その理由は予め曲面の形が定められているのではなく、設計者の直観と試行の繰り返しの中から、決定が行なわれるからである。この問題における協力を完全にするためには、つぎに示す機能を計算機はもたなければならない。

(1) 計算機は(実用的な意味で)連続的な位置ベ

クトルを入出力として取り扱い、また内部でもその処理を行なわなければならない。

(2) 入出力装置の一つは、人の手にある道具(たとえばペン)の動きを計算機に入れるだけでなく、計算機は人の代わりにその道具を動かして、人の意図する仕事を実行する必要がある。また人が図面をかくのに用いる器具(定規、コンパスなど)は、人が用いるとき、主要なデータ(位置、角度、半径など)を自動的に計算機に供給できるようにすることが必要である。

(3) 空間の方向を示したとき、その方向余弦を自動的に計算機が算出できるデータを与える変換器が必要である。物体をある方向の軸まわりに回転させ、その回転角および回転レートを人の感覚に合わせて、図をみながら操作できることが望ましい。

(4) 空間曲線および曲面の理論を新しく作る必要があるであり、これは与えられた境界をもち滑らかに隣の曲面と接続でき、また一部の修正が全体の形に影響が及ぶものではない。

(5) 測定された曲線を *fairing* する操作の計算機で取り扱える数学モデルを考えること。

(6) 空間曲線および曲面の直観的表現の方法を考えること。

(7) 図学で取り扱う手法はすべて等価なものが含まれること、また複合された操作はマクロ命令として定義され実行され得ること。

(8) 物体の干渉(貫通や他にかぶさって見えなくなる部分の決定)を高速に算出できる方法を考えること。

以上の問題については大部分がわれわれの研究によって解決され、いくつかはすでに部分的に発表されている¹⁻⁹⁾。われわれの方法に対して、アメリカにおいては MIT における Computer Aided Design の研究¹⁰⁾、および General Motors の Design Augmented by Computer の研究がある¹¹⁾。これらは大形高速の計算機 TX-2, IBM 7094 などとディスクメモリおよび CRT, light pen の組み合わせを用い、費用をかけ真正面から取り組んでいる。かなりの成果

* Theory and Design of Free-formed Surface, by Mamoru Hosaka (Inst. of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo)

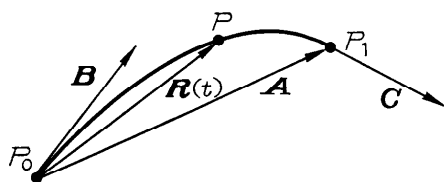
** 東大宇宙航空研究所

をあげているようにも見えるが、よく検討すると、われわれの分析したことはあまりやられていないか、ある部分は遙かに複雑な方法を用いているように見える。したがって物量と人の桁違いの相違にも拘わらず、われわれの仕事の存在理由はあり、さらに発展されるべきものと感じている。

この論文では、主として上述の(4),(5),(6)に関する曲面と曲線の理論とその応用、ならびに図を書くに用いる論理回路について説明する。

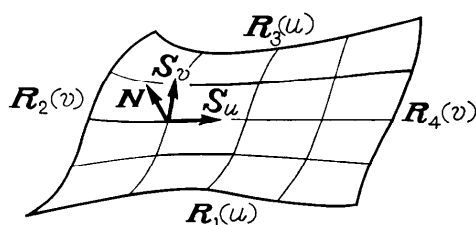
2. 曲面の方程式

第1図の空間曲線 $\widehat{P_0P_1}$ を考え、その上の一点 P をとり $\overrightarrow{P_0P}$ のベクトルを $\mathbf{R}(t)$ で表わす。 t はパラメ



第1図 曲線 $\mathbf{R}(t)$

タで0から1になると、曲線上の点は P_0 から P_1 に移動していく。このような曲線 $\mathbf{R}_1(t)$, $\mathbf{R}_2(t)$, $\mathbf{R}_3(t)$, $\mathbf{R}_4(t)$ が第2図のように、閉じているとき、この閉曲



第2図 与えられた曲線を縁とする曲面

線を縁とする曲面を考え、0から1に至るパラメタ、 u, v を用い、曲面上の点をベクトル $\mathbf{S}(u, v)$ で表わす。この原点は $\mathbf{R}_1(t)$ の原点と一致させる。 $\mathbf{S}(u, v)$ はつぎのように書ける。

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(u, v) = & \mathbf{R}_1(u) + \{ \mathbf{R}_3(u) - \mathbf{R}_1(u) \} \cdot \mathbf{F}(u, v) + \mathbf{R}_2(v) \\ & + \{ \mathbf{R}_4(v) - \mathbf{R}_2(v) \} \cdot \mathbf{G}(u, v) + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}(u, v) \cdot \mathbf{G}(u, v) \\ & + \mathbf{S}_0(u, v), \quad 0 \leq u, v \leq 1 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{F}(u, v)$, $\mathbf{G}(u, v)$ はつぎの関係を満たす関数であれば、曲面の周辺は与えられた曲線となる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}(u, 0) &= \mathbf{G}(0, v) = 0, \quad \mathbf{F}(u, 1) = \mathbf{G}(1, v) = 1 \\ \mathbf{F}(0, v) &= \mathbf{f}_2(v), \quad \mathbf{G}(u, 0) = \mathbf{f}_1(u), \\ \mathbf{F}(1, v) &= \mathbf{f}_4(v) \\ \mathbf{G}(u, 1) &= \mathbf{f}_3(u) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

さらに $\mathbf{f}_i(t)$ は i の如何に関係せず次の関係を満すとする。

$$\mathbf{f}_i(0) = 0, \quad \mathbf{f}_i(1) = 1 \quad (3)$$

$\mathbf{S}_0(u, v)$ は u あるいは v の、0 あるいは 1 で

$$\mathbf{S}_0(u, v) = 0 \quad (4)$$

$\mathbf{R}_i(1) = \mathbf{R}_{i1}$ とかいて、 $\mathbf{Q}$ はつぎの定数である。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \frac{1}{2}(\mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{21} - \mathbf{R}_{31} - \mathbf{R}_{41}) = (\mathbf{R}_{11} - \mathbf{R}_{31}) \\ &= (\mathbf{R}_{21} - \mathbf{R}_{41}) \end{aligned} \quad (5)$$

これは4辺が閉じていることにより求まる。また

$$\mathbf{R}_i(0) = 0 \quad (6)$$

である。

(1) 式で、 u あるいは v を0とおくと、(2)~(6)の関係を用いて

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S}(u, 0) &= \mathbf{R}_1(u), \quad \mathbf{S}(0, v) = \mathbf{R}_2(v) \\ \mathbf{S}(u, 1) &= \mathbf{R}_{21} + \mathbf{R}_3(u) \\ \mathbf{S}(1, v) &= \mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_4(v) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

これは四つの縁が与えられた曲線に一致していることを示している。 u, v が0と1の間では、曲面上の点であり、 $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ の曲線群は第2図のように曲面をおおう網目を作る。この曲面の境界の一边を共有する隣の曲面は、後者の曲面の他の3辺の曲線を定めれば作る事ができる。このようにして連続な曲面を拡張していくことができる。この場合、各面の境界では必ずしも、法線が一致するとは限らない。しかし境界線で作る網目の目を考え、その節点に集る境界線が与えられた平面内にある接線をもたせれば、網目をおおう全曲面は、網目の節点ごとに与えられた法線方向をもたすことはできる。だいたいこれで要求される形の曲面の近似とすることもできるが、さらに網目の境界線上でも、法線を共有する曲面を作ることを考える。

このときは(2)式の $\mathbf{F}(u, v)$, $\mathbf{G}(u, v)$ につぎの条件を追加させる。添字 u, v はそれぞれの偏微分を表わす。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_u(0, v) &= \mathbf{F}_u(1, v) \\ &= \mathbf{F}_v(u, 0) = \mathbf{F}_v(u, 1) = 0 \\ \mathbf{G}_u(0, v) &= \mathbf{G}_u(1, v) \\ &= \mathbf{G}_v(u, 0) = \mathbf{G}_v(u, 1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(1) および(8)より曲面の $u=0, 1$ における v 曲線の接線方向は

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S}_u(0, v) &= \dot{\mathbf{R}}_1(0) + \{ \dot{\mathbf{R}}_3(0) - \dot{\mathbf{R}}_1(0) \} \mathbf{f}_2(v) \\ &\quad + \mathbf{S}_{0u}(0, v) \\ \mathbf{S}_u(1, v) &= \dot{\mathbf{R}}_1(1) + \{ \dot{\mathbf{R}}_3(1) - \dot{\mathbf{R}}_1(1) \} \mathbf{f}_4(v) \\ &\quad + \mathbf{S}_{0u}(1, v) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで $R_i(t)$ の t での微係数を $\dot{R}_i(t)$ とかく。同じ点における u 曲線 すなわち 縁に沿うての接線方向は

$$S_v(0, v) = \dot{R}_2(v), \quad S_v(1, v) = \dot{R}_1(v) \quad (10)$$

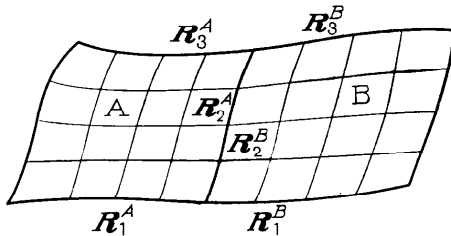
また曲面の法線方向 $N(u, v)$ は $S_u(u, v) \times S_v(u, v)$ で与えられる。×はベクトル積とする。

これより、 $S(0, v)$ 境界における法線ベクトルは、縁の切線ベクトル $\dot{R}_2(v)$ とその縁の両端の境界を作る縁の切線ベクトル $\dot{R}_1(0)$, $\dot{R}_3(0)$ と函数 $f_2(v)$ の値および $S_{0u}(0, v)$ だけで定まる。 $S_0(u, v)$ は考えなくても差支えないから以下

$$S_0(u, v) \equiv 0 \quad (11)$$

として議論を進める。重要なことは、曲面 $S(u, v)$ の一つの縁の法線ベクトルは、その縁に関する量だけで定まることである。

したがって、第3図のように2個の曲面 A, B を他の縁の形に無関係に一つの縁を共有し、法線も共有さ



第3図 曲面の接続 (1)

せることができる。以下これを滑らかに接続させるといふ。そのための条件はつぎのようになる。肩字で面を区別する。

$$\left. \begin{aligned} R_i^A(v) &= R_i^B(v) \\ \dot{R}_2(v) \cdot \{S_u^A(1, v) \times S_u^B(0, v)\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

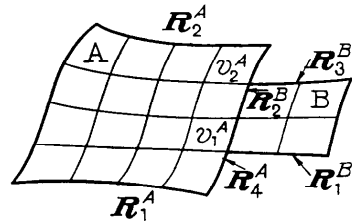
第1の式は、縁が一致すること、第2の式は $S_u^A(1, v)$, $S_u^B(0, v)$, $\dot{R}_2(v)$ の三つのベクトルが同一平面上にある条件である。この式が成立するためには、 v の如何にかかわらず一平面にある場合、 $S_u^A(1, v)$ と $S_u^B(0, v)$ が平行する場合、およびこれ以外にこの式が成立するように三つのベクトルが関係している場合である。第1の場合は境界線が平面内にあり、法線はその平面の法線と一致する場合、第3の場合は複雑で用いることは困難である。第2の場合も簡単のため $\dot{R}_1^A(1)$ と $\dot{R}_1^B(0)$, $\dot{R}_3^A(1)$ と $\dot{R}_3^B(0)$ とはそれぞれ平行行しているとする。(13), (15) を用いて

$$S_u^A(1, v) \times S_u^B(0, v) = 0 \quad (13)$$

の条件を計算すれば、つぎの関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{R}_i^A(0) &= k \dot{R}_i^B(1), \quad i=1, 3 \\ f_2(t) &= f_1(t) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

k は定数である。もし $R_1^A(1)$ と $R_3^A(1)$ が平行ならば、(18) 式の k は $i=1, 3$ に対して異なってよい。この関係があれば、両面の前後の縁も滑らかに接続し、かつ両面の接合部も滑らかに接続する。つぎに前後の縁が同一の点を通らない第4図のような場合の接続を考える。この場合接合する縁の曲線のパラメタは異なる。



第4図 曲面の接続 (2)

る。接合部においては

$$R_i^A(v^A) = R_i^B(v^B) \quad (15)$$

$$v^B = (v^A - v_1^A) / (v_2^A - v_1^A) \quad (16)$$

ここで $v_1^A \leq v^A \leq v_2^A$, $0 \leq v^B \leq 1$

$R_i^A(v^A)$ の上での $S_u^A(1, v^A)$ は、(9), (11) より

$$S_u^A(1, v^A) = \dot{R}_1^A + (\dot{R}_3^A - \dot{R}_1^A) \cdot f_1^A(v^A) \quad (17)$$

$R_i^B(v)$ の上での $S_u^B(0, v^B)$ は

$$S_u^B(0, v^B) = \dot{R}_1^B + (\dot{R}_3^B - \dot{R}_1^B) f_1^B(v^B) \quad (18)$$

ここで面Bの前後の縁は、A面の $v = \text{const}$ の曲線に滑らかに結合するものとすれば、 k を比例定数としてつぎのようにかける。

$$\dot{R}_1^B = k S_u^A(1, v_1^A), \quad \dot{R}_3^B = k S_u^A(1, v_2^A) \quad (19)$$

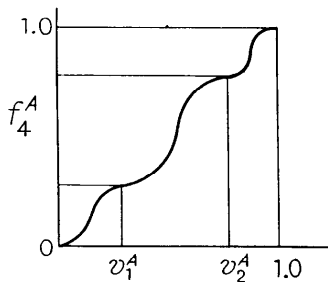
これらの式で $\dot{R}_{10}$ は $\dot{R}_1(0)$, $\dot{R}_{11}$ は $\dot{R}_1(1)$ を意味する。

これで中間点 $S_u^A(1, v^A)$ と $S_u^B(0, v^B)$ が同一点で滑らかに接合するためには

$$\begin{aligned} f_1^A(v^A) &= f_1^B(v_1^A) \\ &+ \{f_1^A(v_2^A) - f_1^A(v_1^A)\} \cdot f_1^B(v^B) \end{aligned} \quad (20)$$

でなければならぬ。(15), (19) 式は $f_1^A(v^A)$ と $f_1^B(v^B)$, v^A と v^B との関係を与える。このように $f_1^A(v^A)$ を、 v^A が v_1^A と v_2^A との間において $f_1^B(v^B)$ と関係づけられれば、曲面Aと曲面Bは滑らかに接続できる。第5図に $f_1^A(v^A)$ の一例をあげる。ここで用いた方法を他の縁にも適用して、滑らかに接続する曲面を拡大していくことができる。

最後に(2), (8) の条件を満たす $F(u, v)$, $G(u, v)$ の形を定める。 $f_i(t)$ に関しては連続な接続なら(3)の条件でよいが、もし滑らかな接続を必要とすれば

第5図 f_4^A の形

(12) の条件が $F(u, v)$, $G(u, v)$ につけ加わったため
(2) 式の $f_i(t)$ に対し

$$\dot{f}_i(0) = \dot{f}_i(1) = 0 \quad (21)$$

の条件が必要となる。いま i を 1~6 にとり、 $F(u, v)$, $G(u, v)$ をつぎのようにかく。

$$\left. \begin{aligned} F(u, v) &= f_2(v) + \{f_4(v) - f_2(v)\} \cdot f_6(v) \\ G(u, v) &= f_1(u) + \{f_3(u) - f_1(u)\} \cdot f_5(v) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

これは (2), (12) の条件をすべて満たしている。

$f_i(t)$ は $t=0$ で 0, $t=1$ で 1, $\dot{f}_i(t)$ は $t=0$ と $t=1$ で 0 である曲線なら差支えない。最も簡単な式の例をあげると

$$f_i(t) = t^2(3-2t) \quad (23)$$

$$f_i(t) = \sin^2 \pi t / 2 \quad (24)$$

である。(19) 式の $f_2(t)$ に (23) を用い、 $0 \leq v_1^A \leq v_2^A$, $v_2^A \leq v_1^A \leq 1$ の間も、(23) 式を採用したのが第5図である。

第4図のように左右の縁の途中から分岐の線が出ないならば $f_4(v) = f_2(v)$, 前後の縁の途中からも分岐がなければ $f_3(u) = f_1(u)$, 四辺全部途中からの分岐がなければさらに $f_1(t) = f_2(t)$ とおいてよい。このときは

$$F(u, v) = f_1(v), \quad G(u, v) = f_1(u) \quad (25)$$

となる。

曲面の接続で4辺の縁すべてにおいて滑らかでなく、4隅においてのみ接平面共有させる場合には、(28) 式の代わりに

$$f_i(t) = t \quad (26)$$

とすることができる。これでも実用上十分な場合も多い。この場合 $F(u, v) = v$, $G(u, v) = u$ であるから

$$\begin{aligned} S_u(u, c) &= \dot{R}_1(u) + \{\dot{R}_3(u) - \dot{R}_1(u)\}c \\ &\quad + \{R_1(c) - cR_{41}\} - \{R_2(c) - cR_{21}\} \end{aligned} \quad (27)$$

$u=0, 1$ において最後の2項が残る。これは対向する縁の曲線の形が似ていれば小さな量である。また接続する縁の $R(c) - cR(1)$ を両曲面の反対側の縁の $R(c) - cR(1)$ の平均値にえらべば、滑らかに接続で

きる。

$S_0(u, v)$ は 0 であるとしたが、これを 0 としなければ縁における法線方向を修正することができる。しかし4辺で任意の $S_{0u}(0, v)$, $S_{0u}(1, v)$, $S_{0v}(u, 0)$, $S_{0v}(u, 1)$ を与えて $S_0(u, v)$ を決定することは条件が余分のためできない。一般には条件をゆるめなければならないので $S_0(u, v)$ は余り役に立たない。 $S_0(u, v)$ は一般につぎの形にかける。

$$S_0(u, v) = u \cdot v(1-v) \cdot (1-v) \sum_i \sum_j s_{ij} u^i v^j \quad (28)$$

s_{ij} は定数ベクトルである。

以上の理論の結果をまとめると

4個の曲線 $R_i(t)$, $i=1 \sim 4$ が、縁となっている曲面は、 u, v を (0, 1) の間を動くパラメタとして次式で表わせる。

$$\begin{aligned} S(u, v) &= R_1(u) + \{R_2(u) - R_1(u)\} \cdot F(u, v) \\ &\quad + R_2(v) + \{R_4(v) - R_2(v)\} \cdot G(u, v) \\ &\quad + \frac{1}{2} (R_{11} + R_{21} - R_{31} - R_{41}) \\ &\quad \times F(u, v) \cdot G(u, v) \end{aligned} \quad (29)$$

$F(u, v)$, $G(u, v)$ は隣接する曲面と接続する条件によって異なる。一般的には

$$\left. \begin{aligned} F(u, v) &= f_2(v) + \{f_4(v) - f_2(v)\} \cdot f_6(u) \\ G(u, v) &= f_1(u) + \{f_3(u) - f_1(u)\} \cdot f_5(v) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

である。 $f_i(t)$ は $t=0, 1$ で 0 と 1 であればよい。またそこで $\dot{f}_i(t) = 0$ である関数を用いれば、容易に隣接する曲面を滑らかに接続できる。単純な場合は

$$\left. \begin{aligned} F(u, v) &= f_1(v), \quad G(u, v) = f_1(u) \\ f_1(t) &= t^2(3-2t) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

で与えられる。さらに必要な条件は (13) 式のように、その縁の前後の境界線の接線ベクトルが比例していることが要求される。接続が縁の一部分で行なわれているときは (15), (19) 式で $f_i(t)$ を定める。滑らかな接続にこだわらなければ、 $f_i(t) = t$ とおいてよい。

このほかにも特殊な場合は滑らかに接続できる場合はあるがここで述べた方法の特徴は、かなり一般的な曲面が作れ、必ずしも数式で境界が与えられなくても差支えないこと、曲面をつぎつぎに連続に接合し、接合面を滑らかにできること、曲面の形を修正してもその影響を局部にとどめることができること、また各座標値はパラメタ表示であるため、機械で図を画くに適した表現であること、法線方向も容易に計算できることなどがあげられる。

3. 空間曲線の表現

前節に用いた曲線のベクトル $R(t)$ は、数値や図で

表わされてもよいが、これらが方程式に変えられるならば、記憶や処理に都合がよい。ここではかなり一般的に用いることのできる曲線の表わし方とその性質について述べる。第1図の曲線で $\vec{P_0P_1}$ のベクトルを $\mathbf{A}$ 、 P_0 点におけるこの曲線の接線ベクトルを $\mathbf{B}$ 、 P_1 点における接線ベクトルを $\mathbf{C}$ とする。 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ の大きさは予め定めておかない。この曲線を $\mathbf{R}(t)$ とかき、つぎの近似式を用いる。

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{A} \cdot f(t) + \mathbf{B} \cdot g(t) + \mathbf{C} \cdot h(t) + \mathbf{D}(t) \quad (32)$$

$$0 \leq t \leq 1$$

$f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, およびベクトル $\mathbf{D}(t)$ は次の条件を満足するものとする。 $f(t)$ は前節の $f_i(t)$ と同じである。

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0, f(1) = 1, \dot{f}(0) = \dot{f}(1) = 0 \\ g(0) &= g(1) = h(0) = h(1) = 0 \\ \dot{g}(0) &= \dot{h}(1) = 1, \dot{g}(1) = \dot{h}(0) = 0 \\ D(0) &= D(1) = 0, \dot{D}(0) = \dot{D}(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

これより

$$\mathbf{R}(1) = \mathbf{A}, \dot{\mathbf{R}}(0) = \mathbf{B}, \dot{\mathbf{R}}(1) = \mathbf{C} \quad (34)$$

は直ちに求まる。以後しばらく $\mathbf{D}(t) = 0$ としておく。 $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ を t の代数式でわせば

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= t^2(3-2t), g(t) = t(t-1)^2 \\ h(t) &= t^2(t-1) \\ f(t) &= t - g(t) - h(t) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

(37) 式の性質をわかりやすくするために、 $\mathbf{A}$ の方向に x 軸、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の方向に z 軸、 x 軸と z 軸に直角に y 軸をとって、曲線上の点の座標を (x, y, z) とし、添字でベクトルの成分を表わすと、(37) 式は

$$\left. \begin{aligned} x &= R_x(t) = A f(t) + B_x g(t) + C_x h(t) \\ y &= R_y(t) = B_y g(t) + C_y h(t) \\ z &= R_z(t) = C_z h(t) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

となる。以下 (36) 式の性質を列記する。証明は紙面の都合で省略するが、それは複雑ではない。

(i) xy 面で x 軸を切る点では、パラメタ t は

$$t = B_y / (B_y + C_y) \quad (37)$$

となる。 B_y と C_y とが異符号なら x 軸を切らない。

(ii) $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = 0$ より x の極値は最大2個あるが存在しない場合が多い。 y の極値は1個か2個、 z の極値は2個で、 $t = 0$, $t = 2/3$ のところである。

(iii) xy 面で曲線はループを作ることがある。このときの t の値は、つぎの2次式の根で与えられる。

$$t^2 - (p - q + 1)t + (p - q)^2 - q = 0 \quad (38)$$

ここで $p = -(AC_y) / \{(A - B_x)C_y + (A - C_x)B_y\}$
 $q = -pB_y / C_y$

(iv) ある方向の軸について、 $\mathbf{R}(t)$ の成分が t の一次関数であるためには、その軸の単位ベクトルを λ とすると次の関係が必要である。

$$\lambda \cdot \mathbf{A} = \lambda \cdot \mathbf{B} = \lambda \cdot \mathbf{C} \quad (39)$$

(41) 式の y, z が x について3次式であるためには、 λ を x 軸方向にとると、 $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ の大きさは、

$$B = A / \cos \phi_0, C = A / \cos \phi \quad (40)$$

となる。 ϕ_0, ϕ は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ と $\mathbf{C}$ との間の角度である。

(v) 空間の曲線において、弦 $\mathbf{A}$ と、両端の接線ベクトルの方向がわかっているとき、中間の曲線上の点の座標 (x, y, z) が与えられれば、その点の t の値は (41) 式の根で与えられ、接線ベクトル $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ の大きさ B , C は (36) より求まる。

t の方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} A f(t) + \{y - z(\cos \gamma_y / \cos \gamma_z)\} \cdot (\cos \beta_x / \cos \beta_y) \\ + z \cdot (\cos \gamma_x / \cos \gamma_z) - x = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

$\beta_x, \beta_y, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ は x, y, z 軸と $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ との角度である。もし $z_{\max}$ の座標値がわかれば、このとき $t = 2/3$ であるから直ちに

$$\begin{aligned} C &= z_{\max} / -(2/3)^2 \cdot \cos \gamma_z \\ B &= 9/2 \cdot \{y + c \cdot \cos \gamma_y (4/9)\} \times (1 / \cos \beta_y) \end{aligned} \quad (42)$$

が得られる。

(vi) 平面曲線の場合は、中間の座標 (x, y) とその dy/dx がわかれば、 B , C を定めることができる。

$dy/dx = \tan \theta$, $x = r \cos \theta'$, $y = r \sin \theta'$, $\beta_x = \beta$, $\gamma_x = \gamma$ とかけば、この点の t はつぎの3次方程式の根である。

$$a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = 0 \quad (43)$$

ここで

$$\begin{aligned} a_3 &= \tan \theta \cdot \sin(\beta + \gamma) + 2 \sin \gamma \cdot \sin \beta \\ a_2 &= -3 \tan \theta (3 \sin \gamma \cdot \cos \beta - 4 \sin \beta \cdot \cos \gamma) \\ &\quad - 3 \sin \gamma \cdot \sin \beta \\ a_1 &= 3 r \{-\sin(\theta' - \gamma) \cdot \sin(\beta + \theta) + \sin(\theta' - \beta) \\ &\quad \cdot \sin(\gamma + \theta)\} / \cos \theta \\ a_0 &= r \{\sin(\theta' - \gamma) \cdot \sin(\beta + \theta) \\ &\quad - 2 \sin(\theta' - \beta) \cdot \sin(\gamma + \theta)\} / \cos \theta \end{aligned} \quad (44)$$

$\theta = 0$ の場合、すなわち y の極値の座標を (x, y) とすると、(42) は

$$\begin{aligned} 2 \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot t^3 - 3 \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot t^2 \\ - 3 y \cdot \sin(\beta - \gamma) \cdot t \\ + y(\cos \gamma \cdot \sin \beta - 2 \cos \beta \cdot \sin \gamma) \\ + x \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

この根が求まると、次式より B, C は定まる。

$$\left. \begin{aligned} B &= y \cdot (2-3t)/g(t) \cdot \sin \beta \\ C &= -y(1-3t)/h(t) \cdot \sin \gamma \end{aligned} \right\} (46)$$

(41), (43), (45) の3次方程式は、0と1との間に必ず根が一つあり、それは逐次近次法で容易に求められる。

(vii) 曲線の始点と終点および中間の点より、未知の B, C を定めてきたが、場合によると、他の条件から B, C の値はきめられてしまうことがある。そのときでも、中間の点の条件を入れるには、(32) 式の $D(t)$ を0としないで、(33) の条件を考えてつぎのようにおく。

$$D(t) = t^2(t-1)^2 \sum_i d_i t^i \quad (47)$$

d_i はベクトルであるから、一つつけ加えるごとに自由度は三つ増える。計算を簡単にするために適当な条件をつけてよい。たとえば、3次元曲線では d_0 だけを考え、 $d_{0z}=0$ とすれば、 $Z_{\max}$ の値では $t=2/3$ 、これを x, y の式に入れば d_{0x}, d_{0y} は求まる。また平面曲線では d_{0y} と d_{1y} だけ考え、 x, y, y' が指定されているから、 d_{0y}, d_{1y} は連立一次方程式の解として得られる。

(viii) (19) 式で指定されるように、一つの曲線の一部分が他の曲線と一致している場合、前者のパラメタで後者の式を表わす。曲線はそれぞれ $R^L(t^L)$, $R^M(t^M)$ で表わされているとする。

$$R^M(t^M) = A^M f(t^M) + B^M g(t^M) + C^M h(t^M) \quad (48)$$

$R^L(t^L)$ は肩字が変わるだけである。また共通の部分は $t_f^L \leq t^L \leq t_f^M$, $0 \leq t^M \leq 1$ であり

$$t^M = (t^L - t_f^L) / (t_f^M - t_f^L)$$

で関係つけられているとする。定義により次の関係があることは明らかである。

$$\left. \begin{aligned} A^M &= R^L(t_f^M) - R^L(t_f^L) \\ B^M &= (t_f^M - t_f^L) \dot{R}^L(t_f^L) \\ C^M &= (t_f^M - t_f^L) \ddot{R}^L(t_f^L) \end{aligned} \right\} (49)$$

$R^L(t^L)$ が定まっていれば、その一部が曲面の縁となるときの式である。

4. 曲線を発生する演算

曲面あるいは曲線を図にかくのに、離散した点を計算してプロットすることは、点が多いと時間がかかる。またその点の間を連続的に結ぶことも必要となってくる。筆者は連続的な関数発生に、インクレメンタルな計算回路を用い、高速に、連続的に曲線をかかせる。ここでは3次曲線を発生させる方法について、そ

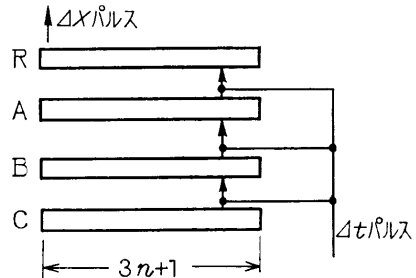
の原理を説明する。3節4節で述べた平面上の曲線や縁の曲線は、大部分パラメタについて3次式である。たとえば(37)式では一般に $D(t)=0$ であるから、(40)式を用いて

$$\begin{aligned} R(t) &= Bt + (3A - 2B - C)t^2 \\ &\quad + (-2A + B + C)t^3 \end{aligned} \quad (50)$$

となる。この式の一つの成分をとると

$$x = at + bt^2 + ct^3 \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (51)$$

という形である。いま Δt を 2^{-n} の大きさとし、これを1個のパルスで表わす。いまモデルとして第6図の



第6図 $\Delta(at+bt^2+ct^3) = \Delta X$ を作るブロック図

ように $3n$ ビットと符号1ビットの大きさをもつレジスタ、 A, B, C, R の4個を考える。 Δt に相当するパルス1個がくるたびに、 $A+R \rightarrow R, B+A \rightarrow A, C+B \rightarrow B$ の演算を行なう。 i 回目のパルスがきたあとのレジスタの内容を A_i, B_i, R_i で表わすと、つぎの関係が成立する。

$$\begin{aligned} R_i &= R_{i-1} + A_{i-1}, \quad A_i = A_{i-1} + B_{i-1}, \\ B_i &= B_{i-1} + C \end{aligned} \quad (52)$$

各レジスタの始めの内容を

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= 0, \quad A_0 = a \cdot 2^{-n} + b \cdot 2^{-2n} + c \cdot 2^{-3n} \\ B_0 &= 2b \cdot 2^{-2n} + 6c \cdot 2^{-3n}, \quad C_0 = 6c \cdot 2^{-3n} \end{aligned} \right\} (53)$$

とすると、 R_i は

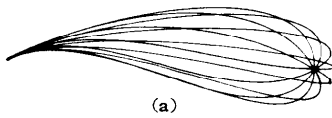
$$R_i = a \cdot i \cdot 2^{-n} + b(i \cdot 2^{-n})^2 + c(i \cdot 2^{-n})^3 \quad (54)$$

となる。(56)と比較して R レジスタの最高位の桁からの、正あるいは負のオーバ・フローは x の微量 ΔX の1単位だけ正あるいは負に動くことを表わす。このパルスによって、ペン駆動のパルス・モータを動かしたり、 R レジスタを延長して、 R_i を正しく出して DA 変換を行なって CRT 表示やアナログ XY プロッタの入力とする。 Δt パルスは 2^n 個であるから、普通は C レジスタの高位部や、 R レジスタの下位部を取り去っても結果に影響は生じない。第7図はこのようにして作った曲線群の一例である。いずれも A を

$$R(t) = Af(t) + Bg(t) + Ch(t)$$

$$|A| = |B| = |C| = 1$$

$$\angle B = \pi/6, \angle C = n \cdot \pi/6$$

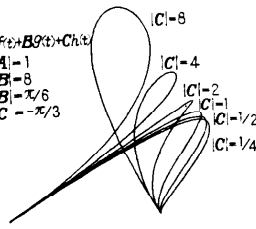


(a)

$$R(t) = Af(t) + Bg(t) + Ch(t)$$

$$|A| = 1, |B| = 8$$

$$\angle B = \pi/6, \angle C = -\pi/3$$

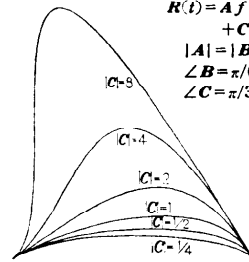


(b)

$$R(t) = Af(t) + Bg(t) + Ch(t)$$

$$|A| = |B| = 1$$

$$\angle B = \pi/6, \angle C = \pi/3$$



(c)

第7図 $R(t) = Af(t) + Bg(t) + Ch(t)$ の表現能力

x 軸にとり、 B, C を平面内に変化させているが、非常に広い範囲の表現能力があることがわかる。

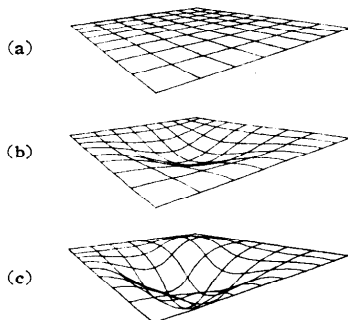
5. 自由形状曲面をもつ物体の設計

ある形態をもつ物を設計するときに、人はとるべき形を頭に画いて、それを図にし、いろいろな修正を加え、直接に製作図面まですることもあろうし、複雑な形や、美的な感覚や特別な機能を要求されるものはモデルを具体的に作り、それを検討し、変更修正して最終の形をきめ、そのモデルを測定し、測定した値を図にかき、フェヤリングの操作を行なって図面にする。図面は全曲面をかくことはできないから面上の曲線をかくことになる。対象物を製作するにあたってはそれらの線と線との間は、型の製作者が適当につないでゆく。このようなやり方に計算機を導入し、on-line で設計を進める方法は別の論文にゆずるが、大体を述べると、図形入力装置上で、設計者は頭にかいた図をかき、近似的な主要曲線を、計算機に指令して回転させ、出力部あるいは CRT 表示によって人にわかりやすい所までもってくる。

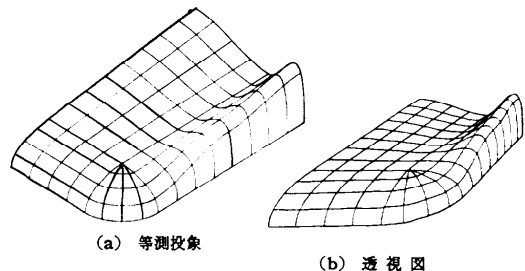
その曲線を4節の方法で、近似の式で表わす。もちろんこの時も、人が B や C を変えて、適宜に変更を行なう。これが決定すれば、また回転、移動させて、も

との位置にもどす。このような曲線の縁ができれば、それをおおう曲面を3節の方法で作る。これを気に入るまでくりかえす。これらは出力図形をみながら行なう。もしすでにモデルが与えられ、これを測定することで曲線の形が入ったら、まずこれを出力部でかきそれをフェヤリングした曲線もかく、人がこれに気に入ったら、これを数式化し、または直接に、曲線を縁とする曲面を決定し、これをかく、また曲面は隣の曲面と滑らかに接続したり、あるいは折目をつけて接続していくことができる。曲面がすべて決定したならば、光の反射のいわゆるハイライトの線や、断面図、透視図、その他形より定まる計算が行なわれる。この方法では、曲面の上の点はすべて数値が決定され、いままでのように熟練者の勘に頼る部分が非常に減少する。ここで用いられるフェヤリングの操作は、測定された点の群を熟練者が、パッテンを用いて修正していく操作がシミュレートされる。これは単に最小2乗で曲線を定めるのではなく、その曲線が与えられた制限のもとに、曲率の2乗の積分が最小になるように決定される。詳細は別に報告する⁹⁾。

最後に本論文の理論を用いて表わした曲面の図を示す。第8図は周辺が固定された正方形板を、周辺の条件を変えずに変形した例であり、第9図はある曲面の設計例である。透視図および等測投影象を用いて書いてある。



第8図 周辺固定の板の変形 (透視図)



第9図 自由曲面の設計例

7. む す び

自由形状曲面の使用は工業設計やわれわれの日常使用する物体に非常に多く表われる。これを設計し製作にかかるまで、熟練者と多くの時間がかかり、そのためいろいろな変化をしらべることが困難であった。この種の仕事は予め全部プログラムで決定できるものではなく、人の創意が常に入り込まなければならないし、仕事の進める操作そのものは、かなり面倒なルーティンの仕事で混ざってきている。計算機と人との協同してこの問題に当たるためには、各種の新しい入出力機器と、曲面を表現する理論が必要となった。ここではその理論の展開を中心にして述べた。

空間曲線を境界とする曲面の方程式を導き、必要なそれに隣合う曲面と滑らかに接合できる方法考えた。曲面は局所的な修正が可能であるため、設計の操作には適している。また境界の曲線を構成する方法を考え、さらに曲線をインクレメンタル方式で高速に正確にかく方式について触れ、いくつか理論の適用例も示した。これら一連の研究はかなり以前から必要なハードウェアの製作を行ないながら進めてきたものであり、引き続き関連する研究も発表する予定である。この研究を行なうに当たり、実例の具体的な計算機のプログラムは大学院学生梶原景範氏の作ったものを用いた。また計算機をはじめ各種機器を作ったり、保守した筆者の研究室の室員の努力なくしては、単に机上の理論に終わったであろう。厚く感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) 穂坂, 谷: 試作 DDA について, 情報処理学会講演会前刷 (1962. 12)
- 2) 穂坂: デジタルレゾルバの理論と応用, 計測制御学会第2回大会論文集 (1963. 10), 「計測と制御」3巻7号, 1964. 7
- 3) 穂坂, 村田: DDA による関数と図形の発生, 計測制御学会第3回大会論文集 (1964. 9), 「計測と制御」4巻7号, 1965. 7, pp. 442-445
- 4) 穂坂, 遠藤: 図形の発生, 処理, 記憶, 「情報処理」6巻3号, 1965. 5, pp. 129-139
- 5) 穂坂, 村田: 図形の発生と制御, 情報処理学会第6回大会前刷, 1964. 12
- 6) 穂坂, 遠藤, 梶原: 図形入出力装置とその応用, 情報処理学会第7回大会前刷, 1965. 12
- 7) 穂坂: 任意曲線と曲面の記憶と処理, 同上.
- 8) 穂坂, 梶原, 山田: On-line Computation と Control 用の特殊機器の研究, 情報処理学会第8回大会前刷, 1966. 12
- 9) 遠藤, 穂坂: 設計の自動化と設計への応用, 同上.
- 10) Proc. SJCC (Vol. 24, 1963) における Sutherland. I. E その他の人の Sketchpad に関する一連の論文.
- 11) Proc. FJCC (Vol. 26, 1954) における E. L. Jack その他の人の DAC に関する数篇の論文.

(昭和41年11月8日受付)