

日本株式ポートフォリオのリスク管理における 拡散成分とジャンプ成分の影響

竹俣 潤¹ 宮崎 浩一¹

概要：本研究では、日本株式市場を対象に個別銘柄リターンや複数の個別銘柄から構成される株式ポートフォリオリターンをジャンプ拡散過程でモデル化したうえでパラメータ推定を行い、株式ポートフォリオリターンが銘柄数の増加に従って中心極限定理的な作用からどの程度正規分布に近づくかについて VaR 計測を踏まえて検証する。

Influences of diffusion and jump components on the Japanese equity portfolio risk management

Abstract: This research focuses on the estimated parameters of jump-diffusion process for equity returns of both each individual equity and portfolios that consist of the individual equities. From the view point of estimating VaR, we examine to what extent distribution of the equity portfolio return becomes closer to normal distribution with increase in the number of individual equities, shortly the effect of central limit theorem.

1. はじめに

多くの金融機関が採用する主要なリスク指標にバリュー・アット・リスク (VaR) がある。VaR とは、「所与の信頼水準 (分位点) と期間 (日次や週次など) において、過去の市場リターンから想定される保有資産 (以下では株式ポートフォリオを想定する) の損失額を測定する」ものである。よって、株式ポートフォリオの VaR を導出するためには、株式ポートフォリオリターンに関する確率分布が必要となる。実務で広く採用されている分布は正規分布である。個別銘柄リターンに関して正規分布を採用すれば、銘柄間の相関構造も考慮したうえで各銘柄の保有銘柄に応じて株式ポートフォリオリターンの従う確率分布が正規分布の再生性から正規分布として容易に導かれる。また、株式ポートフォリオリターンが正規分布に従うなら、所与の信頼水準 (分位点) における損失額も標準偏差の定数倍として容易に求められる。

しかしながら、現実の個別銘柄の株式リターンは、必ずしも正規分布に従うとはいえない。実際、個別銘柄株式は当該企業に関連するニュースの発生時やマクロ経済指標の

公表時などにおいて大きく変動することが知られている (佐々木・宮崎 (2005)[3])。よって、個別銘柄の株式リターンをより現実的な表現とするため、Merton(1976)[2] ではジャンプ拡散過程が採用された。

一方、株式ポートフォリオのリターンに関するジャンプを含むモデル化が本格的に進展しはじめたのは 21 世紀に入ってからと考えられる。Guan, Xiaoqing and Chong(2003)[1] では、各々の個別銘柄リターンが従うジャンプ拡散過程をシステムティックリスクに関するものとイディオシンクラティックリスクに関するものを結合する形で記述したうえで、多数の銘柄から成る株式ポートフォリオのリターンではシステムティックリスクに関する単一の拡散項と単一のジャンプ項から成るジャンプ拡散過程のみで近似可能であるとして簡便に VaR を求める手法を提案している。しかしながら、そこではシミュレーション実験がなされているだけで、本格的なパラメータに関する実証分析はなされていない。個別銘柄リターンがジャンプ成分の含まれるようなファットテイルなものであったとしても、数多くの銘柄から構成される株式ポートフォリオでは中心極限定理的な作用がある程度まで働いて株式ポートフォリオリターンが正規分布に近づくと考えられる。しかし、株式ポートフォリオに含まれる銘柄数に応じてどの程度の VaR との計測

¹ 電気通信大学
The University of Electro-Communications

誤差が生じるかについて把握しておく必要がある．本研究では，この問題意識の下で，個別株式リターンや株式ポートフォリオリターンをジャンプ拡散過程でモデル化したうえで，Guan, Xiaoqing and Chong(2003)では取り扱われていなかったパラメータに関する実証分析に関して日本株式市場を対象としてアプローチすることを試みる．

本論文の構成は以下の通り．次章では，本研究の目的を具体的に提示したうえで，その分析手法を示す．3章では，データと分析結果及びその考察を与える．最終章では，まとめと結語を付す．

2. 研究目的と分析手法

2.1 研究目的

本研究では，主に次の3点に焦点を当てた分析を行う．

(分析対象 1)

株式ポートフォリオに含まれる銘柄数が増加するに従って中心極限定理的な作用がどの程度まで働くかについて，ジャンプ拡散過程のパラメータ，特に拡散項のボラティリティ，ジャンプ項のボラティリティ，インテンシティ，対数ジャンプ幅率の標準偏差が銘柄数の増加に従ってどのように変化するかに基づいて明らかにする．その際には，市場環境を安定期と混乱期に大きく分けたいうえで検証を行う．

(分析対象 2)

個別銘柄間の相関構造が中心極限定理的な作用の強さに与える影響を検証する．

(分析対象 3)

株式ポートフォリオの構成銘柄数の増加に伴って中心極限定理的な作用から株式ポートフォリオリターンがある程度正規分布に近づくのであれば，大規模な株式ポートフォリオは VaR の計測を多変量正規分布に基づいて行なっても大きな問題は生じない．ここでは，銘柄数の増加に伴う中心極限定理的な作用の強さが，VaR の計測を多変量正規分布に基づいて行なった際の計測誤差にどのような影響を及ぼすかについて検証する．

2.2 株価モデル

本研究では，株価リターンを表現するために一般ウィナー過程にジャンプ過程を加えて拡張した Merton(1976)による式 (1) のジャンプ拡散モデルを用いる．

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu_{MJD} - \lambda\beta)dt + \sigma_{MJD}dW_t + (Y - 1)dN_t \quad (1)$$

ここで μ_{MJD} は期待リターン， β はジャンプ幅率の期待値， σ_{MJD} は拡散項のボラティリティ， Y は対数を取ると平均 μ_J ，分散 δ^2 の正規分布に従う (ε は標準正規分布に従う確率変数) ジャンプ幅率の確率変数 $Y \equiv \exp(\mu_J + \delta\varepsilon)$ であり， dN_t はインテンシティ (ジャンプ強度) が λ のポアソン過程である．ジャンプの発生を想定しない ($\lambda = 0$) 場合には，ジャンプ拡散モデルと拡散モデルは同一のモデルになる．

式 (1) を離散化することによって，時刻 $t + 1$ の株価 S_{t+1} は式 (2) の確率密度関数 ($\theta = \{\mu_{MJD}, \sigma_{MJD}, \lambda, \beta, \delta\}$) に従うことがわかる．

$$g_{MJD}(S_{t+1}|\theta) = \frac{\exp(-\lambda)}{S_{t+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \exp\left(-\frac{(\ln S_{t+1} - \ln S_t - \psi - k\mu_J)^2}{2(\sigma_{MJD}^2 + k\delta^2)}\right)}{k! \sqrt{2\pi(\sigma_{MJD}^2 + k\delta^2)}} \quad (2)$$

$$\psi \equiv \mu_{MJD} - 0.5\sigma_{MJD}^2 - \lambda\beta \quad (3)$$

ここで k はジャンプ回数を示す．また，単位時間の株価リターンが従う分布の標準偏差 σ_{Total} は式 (4) で与えられる (佐々木・宮崎・野村 (2006)[5] を参照)．

$$\sigma_{Total}^2 = \sigma_{MJD}^2 + \lambda(\mu_J^2 + \delta^2) \quad (4)$$

式 (4) をみると，ジャンプ拡散モデルの分散は拡散成分による分散 σ_{MJD}^2 とジャンプ成分による分散 $\lambda(\mu_J^2 + \delta^2)$ (以下，これを σ_J^2 とおく) の2つから構成されることがわかる．ポートフォリオの銘柄数の増加に伴い中心極限定理的な作用が働くのであれば，リターンの分散におけるジャンプ過程による分散 σ_J^2 の割合 $\sigma_J^2/\sigma_{Total}^2$ が減少することが想定される．

次に，本研究に関連するモデル化がなされている Guan, Xiaoqing and Chong(2003) についてレビューしたうえで本研究との対応関係を確認する．

Guan, Xiaoqing and Chong(2003) では，各々の個別銘柄リターンが従う確率過程を式 (5) のようなシステムティックリスクに関するもの (式 (5) の右辺第 2 項，第 4 項) とイデオシンクラティックリスクに関するもの (式 (5) の右辺第 3 項，第 5 項) を結合する形のジャンプ拡散過程で記述している．株式ポートフォリオにおける個別銘柄の保有枚数が g_t^i のとき株式ポートフォリオの価値が式 (6) となり各個別銘柄へのウェイト ω_t^i が式 (7) で表されるから，株式ポートフォリオの従う確率過程は式 (8) に従うものとしている．株式ポートフォリオの VaR を求める際には，株式ポートフォリオが極めて多くの銘柄から成ることを想定して式 (8) を式 (9) のようなシステムティックリスクに関する単一の拡散項 (式 (9) の右辺第 2 項) と単一のジャンプ項 (式 (9) の右辺第 3 項) から成るジャンプ拡散過程で近似した確率過程を採用して簡便なシミュレーションから VaR を求める手法を提案している．

$$\frac{dX_t^i}{X_t^i} = \alpha_i(t)dt + \beta_i(t)dW_t^0 + \gamma_i(t)dW_t^i + \delta_i(t-)dN_t^0 + \theta_i(t-)dN_t^i \quad (5)$$

$$V_t = \sum_{i=1}^n g_t^i X_t^i \quad (6)$$

$$\omega_t^i = \frac{g_t^i X_t^i}{V_t} \quad (7)$$

$$\frac{dV_t}{V_t} = \hat{\alpha}_t dt + \hat{\beta}_t dW_t^0 + \sum_{i=1}^n \hat{\gamma}_t^i dW_t^i + \hat{\delta}_t^i dN_t^0 + \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_t^i dN_t^i \quad (8)$$

$$\frac{d\bar{V}_t}{\bar{V}_t} = \bar{\mu}(t) dt + \bar{\beta}(t) dW_t^0 + \bar{\delta}(t-) dN_t^0 \quad (9)$$

ここで n は株式ポートフォリオの構成銘柄数を示し、 $\hat{\alpha}_t = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \omega_t^i$, $\hat{\beta}_t = \sum_{i=1}^n \beta_i(t) \omega_t^i$, $\hat{\gamma}_t^i = \gamma_i(t) \omega_t^i$, $\hat{\delta}_{t-} = \sum_{i=1}^n \delta_i(t-) \omega_t^i$, $\hat{\theta}_{t-}^i = \theta_i(t-) \omega_t^i$, $\bar{\mu}(t) = \bar{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \theta_i(t-) \omega_t^i$, $\bar{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \omega_t^i$, $\bar{\beta}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i(t) \omega_t^i$, $\bar{\delta}(t-) = \sum_{i=1}^n \delta_i(t-) \omega_t^i$ である。

個別銘柄リターンに関して Guan, Xiaoqing and Chong(2003) のモデルと本モデルを対応付けると、式 (5) の右辺第 2 項と第 3 項から成る拡散成分が式 (1) の右辺第 2 項のみで表現され、式 (5) の右辺第 4 項と第 5 項から成るジャンプ成分が式 (1) の右辺第 3 項のみで表現されることになる。これに対して、株式ポートフォリオのリターンに関しては、Guan, Xiaoqing and Chong(2003) はシステムティックリスクに関するもののみから成る式 (9)、本モデルは式 (1) で表現するため、モデルのパラメータに関する齟齬性を除いて同一である。本研究の実証分析では、本来は式 (8) で記述されるべき株式ポートフォリオリターンが、株式ポートフォリオに含まれる銘柄数の増加と共にイディオシンクラティックなジャンプ成分 (式 (8) の右辺第 5 項) がダイバーシファイされて (中心極限定理的な作用が働いて)、式 (9) や式 (1) における拡散項のみで記述可能となり行くようになるかについて確認する。

2.3 分析手法

2.3.1 (分析対象 1) に関する分析手法

(分析対象 1) では、株式ポートフォリオに含まれる銘柄数の増加に伴う中心極限定理的な作用をジャンプ拡散過程のパラメータの観点から検証する。拡散項のボラティリティ σ_{MJD} 、ジャンプ項のボラティリティ σ_J 、株式リターンの分散 σ_{Total}^2 に占めるジャンプ成分による分散 σ_J^2 の割合 $\sigma_J^2 / \sigma_{Total}^2$ 、インテンシティ λ 、対数ジャンプ幅率の標準偏差 δ が、株式ポートフォリオに含まれる銘柄数を 1 銘柄から、2 又は 3 銘柄、5 又は 6 銘柄、10 又は 11 銘柄、21 又は 22 銘柄、43 又は 44 銘柄、1083 銘柄へと 7 段階で増加させた場合にどのように変化するかについて確認する。各パラメータ値は株式ポートフォリオの数だけ得られるため箱図として掲載し、箱図に中央値を示すラインを表示し、銘柄数に応じたパラメータ値の変化を確認する際の目安とする。

2.3.2 (分析対象 2) に関する分析手法

(分析対象 2) では、多くの個別銘柄の株価が同時に大きく下げる市場環境では TOPIX においても下方ジャンプが確認されることから、個別銘柄リターン間の相関の高まりが想定されるため、その影響を拡散成分の相関とジャンプ成分の相関に分けて確認する。節 2.3.1 で採り上げた株式ポートフォリオを対象に分析期間を 1 年毎に分割して、1 年毎にジャンプ拡散過程のパラメータを最尤法により推定

する。そこで、株式ポートフォリオ毎に共通の相関係数を想定して式 (10) のように定義し、先に推定したジャンプ拡散過程のパラメータを式 (10) に代入して年毎、株式ポートフォリオ毎に 1 つの相関係数を導出する。

$$\rho^B = \frac{\sigma_{MJD,port}^2 - \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_{MJD,i}^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n \omega_i \omega_j \sigma_{MJD,i} \sigma_{MJD,j}} \quad (10)$$

ここで ρ^B は拡散成分に関する相関係数、添字の *port* は株式ポートフォリオのパラメータであることを意味する。

株式ポートフォリオのジャンプ成分の分散に内在する相関係数はその概念を定義すること自体が難しいが、ここでは、株式ポートフォリオリターンの対数ジャンプ幅率の分散 δ^2 に内在する相関係数として捉え、式 (11) によって定義する。株式ポートフォリオリターンのジャンプ成分の分散に内在する相関係数を導出するためには、第一に、株式ポートフォリオリターンがジャンプしたタイミングを推定する、第二に、そのタイミングにおいて同時にジャンプした個別銘柄がどれであるかを特定する、第三に、株式ポートフォリオリターンに関するジャンプ拡散過程のパラメータと同時にジャンプした個別銘柄のリターンに関するジャンプ拡散過程のパラメータを式 (11) に代入すればよい。拡散成分の相関係数と同様にジャンプ成分の相関係数も、年毎、株式ポートフォリオ毎に 1 つ導出する。

$$\rho^J = \frac{\delta_{port}^2 - \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \delta_i^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n \omega_i \omega_j \delta_i \delta_j} \quad (11)$$

ここで ρ^J はジャンプ成分に関する相関係数である。

2.3.3 (分析対象 3) に関する分析手法

(分析対象 3) では、株式ポートフォリオの構成銘柄数の増加に伴う中心極限定理的な作用の強さが VaR の計測を多変量正規分布に基づいて行なった際の計測誤差にどのような影響を及ぼすかについて検証する。

観測数が L であった時、株式ポートフォリオリターンの従う分布を正規分布と仮定した $VaR_{c,L}^n$ は所与の信頼水準 $c\%$ に対応して式 (12) で与えられ、節 2.3.1 で採り上げた株式ポートフォリオを対象に VaR を算出する。

$$VaR_{c,L}^n = \frac{\sum_{t=1}^L R_{n,t}}{L} - \alpha_c \hat{\sigma}_n \quad (12)$$

ここで $R_{n,t}$ は時刻 t における構成銘柄数 n の株式ポートフォリオリターン、 α_c は信頼水準 $c\%$ に応じた定数、 $\hat{\sigma}_n$ はリターンデータ $R_{n,t}$ から推定された標本標準偏差である。観測数 L のリターンデータセットを小さい順に並べたものを、 $\mathbf{R} = (R_{(1)}, \dots, R_{(p)}, \dots, R_{(L)})$ ($p \equiv L \cdot (100 - c) / 100$) とした場合、株式ポートフォリオリターンが正規分布に従うのであれば、所与の信頼水準に対応した下端 $(100 - c)\%$ のリターン $R_{(p)}$ と $VaR_{c,L}^n$ とが等しくなる。しかしながら、実際には多くのリターン分布が正規分布に従わずファットテイルであるため、これらが等しくならない場合が生じる。

この差 $\varepsilon_{c,n}$ (式 (13)) を計測誤差とし、市場安定期や市場混乱期において、計測誤差が株式ポートフォリオに含まれる銘柄数 n や信頼水準 $c\%$ に応じてどの程度の大きさとなるかについて検証する。

$$\varepsilon_{c,n} = R_{(p)} - VaR_{c,L}^n \quad (13)$$

3. 実証分析

3.1 データと分析設定

分析に用いる株価データは、2000年7月3日から2010年6月30日までの東証1部上場企業1083社の日次データである。保有ウェイトは各個別銘柄の変動のインパクトを等しくするため、保有金額が等しくなるよう ($\omega^i = 1/n$) にした。

上記のデータ期間のうち、2000年7月3日から2007年8月8日までを市場安定期、2007年8月9日から2009年12月30日までを市場混乱期として、分析を試みる。

分析対象2の検証では、分析期間2000年7月3日から2010年6月30日を1年ずつの10期間に分割し、各期間に対して検証を行う。分析対象3の検証では、信頼水準 $c\%$ を95%から99%の0.5%刻みとする。各期間に対応した観測数 L は市場安定期では1749、市場混乱期では585である。

3.2 分析結果と考察

3.2.1 (分析対象1)の分析結果と考察

ジャンプ拡散モデルのパラメータ推定結果を箱図として図1から図10に示した。図1から図5が市場安定期、図6から図10が市場混乱期の分析結果である。拡散成分とジャンプ成分のボラティリティに注目する。拡散成分のボラティリティ σ_{MJD} は、図1と図6から安定期と混乱期共に株式ポートフォリオに含まれる銘柄数が増加すると、通常の分散投資効果が働くことによって減少することが確認される。同様に、ジャンプ成分のボラティリティ σ_J は、図2と図7から安定期と混乱期共に株式ポートフォリオに含まれる銘柄数が増加すると、中心極限定理的な作用が働くことによって減少することがわかる。より詳細に検討するため、図3と図8にある株式リターンの分散 σ_{Total}^2 に占めるジャンプ成分による分散 σ_J^2 の割合に着目すると、安定期においては、銘柄数 n が1のとき0.581である割合は銘柄数 n が1083へと増加すると0.337へと42%も縮小し中心極限定理的な作用が強く働くことが確認されるのに対して、混乱期においては、銘柄数 n が1のとき0.509である割合は銘柄数 n が1083へと増加しても0.428に留まり僅か15.9%しか縮小せず中心極限定理的な作用の働きが弱いことが確認される。

株式リターンの分散 σ_{Total}^2 に占めるジャンプ成分の分散 σ_J^2 の割合 $\sigma_J^2/\sigma_{Total}^2$ が混乱期においては株式ポートフォリオの銘柄数 n が増えてもそれほど低下しない原因を探る

ために、ジャンプ成分の分散を構成するパラメータであるインテンシティ λ と対数ジャンプ幅率の標準偏差 δ について確認する。図4と図9にあるインテンシティ λ に着目すると、安定期においては、銘柄数 n が1のとき0.335である割合は銘柄数 n が1083へと増加すると0.111へと66.8%も縮小するのに対して、混乱期においては、銘柄数 n が1のとき0.21であるインテンシティ λ は銘柄数 n が1083へと増加しても0.114と45.4%程度の縮小となり縮小幅は相対的に小さい。同様に、図5と図10にある対数ジャンプ幅率の標準偏差 δ に着目すると、安定期においては、銘柄数 n が1のとき0.0288である対数ジャンプ幅率の標準偏差 δ は銘柄数 n が1083へと増加すると0.0163へと43.4%も縮小するのに対して、混乱期においては、銘柄数 n が1のとき0.0473である対数ジャンプ幅率の標準偏差 δ は銘柄数 n が1083へと増加しても0.0347と26.3%程度の縮小となり縮小幅は相対的に小さい。安定期には小さなジャンプが比較的多く観測され、混乱期にはジャンプの観測は少ないものの観測された場合には大きなジャンプであることが伺える。

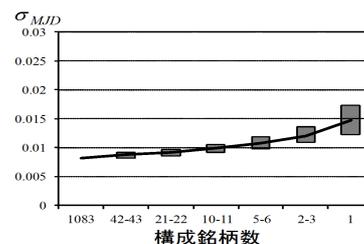


図1 σ_{MJD} の推定値 (安定期)

Fig. 1 Estimated σ_{MJD} (Stable market condition)

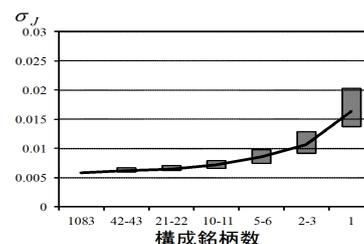


図2 σ_J の推定値 (安定期)

Fig. 2 Estimated σ_J (Stable market condition)

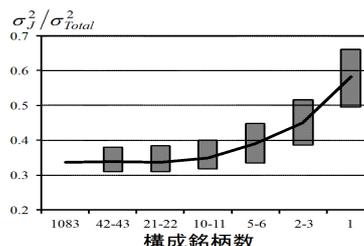


図3 $\sigma_J^2/\sigma_{Total}^2$ の推定値 (安定期)

Fig. 3 Estimated $\sigma_J^2/\sigma_{Total}^2$ (Stable market condition)

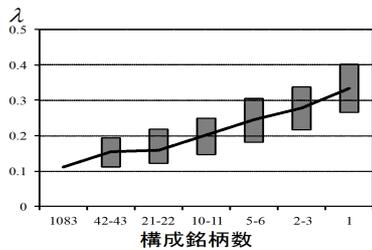


図 4 λ の推定値 (安定期)
Fig. 4 Estimated λ (Stable market condition)

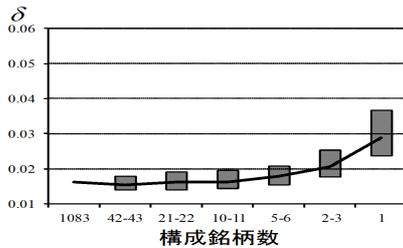


図 5 δ の推定値 (安定期)
Fig. 5 Estimated δ (Stable market condition)

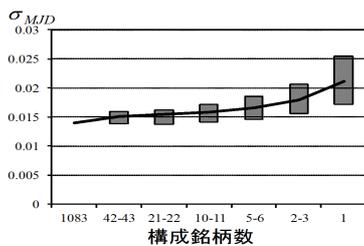


図 6 σ_{MJD} の推定値 (安定期)
Fig. 6 Estimated σ_{MJD} (Turbulent market condition)

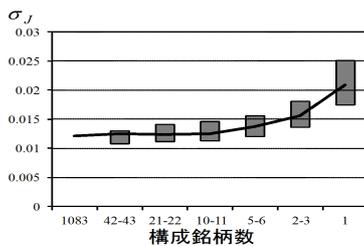


図 7 σ_J の推定値 (混乱期)
Fig. 7 Estimated σ_{MJD} (Turbulent market condition)

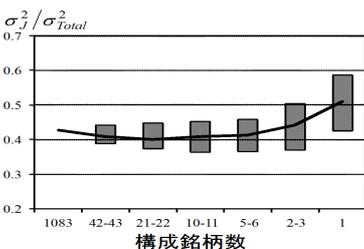


図 8 $\sigma_J^2 / \sigma_{Total}^2$ の推定値 (混乱期)
Fig. 8 Estimated $\sigma_J^2 / \sigma_{Total}^2$ (Turbulent market condition)

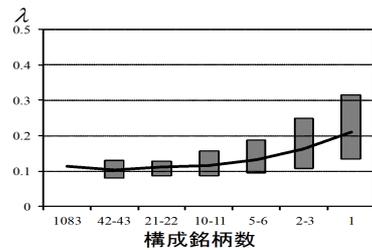


図 9 λ の推定値 (混乱期)
Fig. 9 Estimated λ (Turbulent market condition)

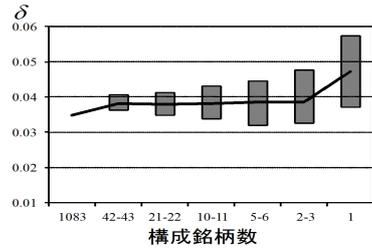


図 10 δ の推定値 (混乱期)
Fig. 10 Estimated δ (Turbulent market condition)

3.2.2 (分析対象 2) の分析結果と考察

拡散成分による分散に内在する銘柄間の年毎の相関係数とジャンプ成分の分散を構成する対数ジャンプ幅率の分散に内在する銘柄間の年毎の相関係数を、それぞれ、図 11、図 12 に示した。

拡散成分による分散に内在する銘柄間の年毎の相関係数は、図 11 から、最も分散投資効果が現れる銘柄数が 1083 の場合に注目すると、安定期においては 0.2~0.3 程度であるのに対して、混乱期には 0.4 程度と高まるもののその程度はそれほど大きくないことが分かる。これに対して、図 12 から、対数ジャンプ幅率の分散に内在する銘柄間の年毎の相関係数は、銘柄数が 1083 の場合に注目すると、安定期においては概ね 0.4 以下となるのに対し、リーマンショックが発生した 2008 年には 0.7 に及ぶ水準にまで達していることが分かる。

3.2.3 (分析対象 3) の分析結果と考察

株式ポートフォリオリターンに正規分布を仮定して、構成銘柄数 n と所与の信頼水準 $c\%$ に関して、VaR の計測誤

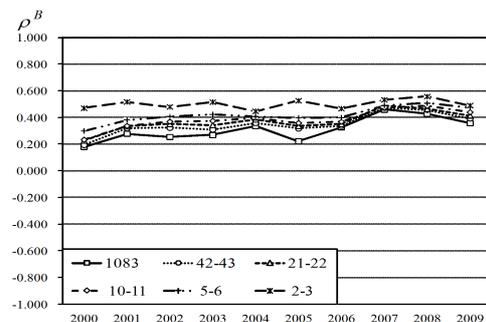


図 11 拡散項の銘柄間の相関の推移
Fig. 11 Correlation in diffusion component

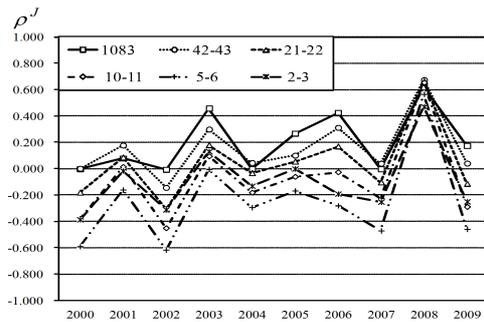


図 12 ジャンプ項の銘柄間の相関の推移
Fig. 12 Correlation in jump component

差となる $\varepsilon_{c,n}$ の値を安定期と混乱期に関して値をそれぞれ図 13 と図 14 に示した。

興味深いのは、図 13 と図 14 に示した VaR の計測誤差である $\varepsilon_{c,n}$ が安定期と混乱期を問わず銘柄数を増やしても縮小する傾向が確認できない点である。これは、図 3 や図 8 が示唆する、株式リターンの分散 σ_{Total}^2 に占めるジャンプ成分による分散 σ_j^2 の割合が、相反するようになる。図 3 や図 8 においては 2 次のモーメントにおける中心極限定理的な作用の程度を把握しているのに対し、図 13 や図 14 では分布のテイル部分における中心極限定理的な作用の程度を表している点である。図 4 や図 9 から確認したように株式ポートフォリオリターンのインテンシティ λ に関しては銘柄数が増加するに従って低下し、2 次のモーメントを縮小させるのに貢献するが、図 6 や図 11 にある対数ジャンプ幅率のボラティリティ δ は特に混乱期においてそれほど低下しない。このため、ひとたびジャンプが発生した際には、ジャンプの大きさが小さくなっていないために正規分布で計測した信頼水準の閾値を超えやすくなることが考えられる。

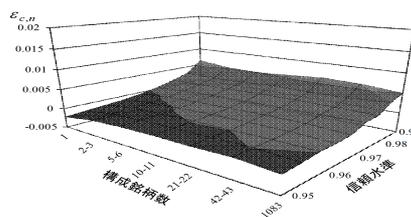


図 13 $\varepsilon_{c,n}$ の推定値 (安定期)
Fig. 13 Estimated $\varepsilon_{c,n}$ (Stable market condition)

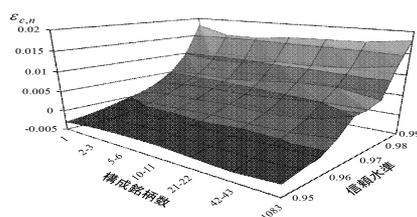


図 14 $\varepsilon_{c,n}$ の推定値 (混乱期)
Fig. 14 Estimated $\varepsilon_{c,n}$ (Turbulent market condition)

4. まとめと結語

本研究では、日本株式市場を対象に個別銘柄リターンや複数の個別銘柄から構成される株式ポートフォリオリターンをジャンプ拡散過程でモデル化したうえでパラメータ推定を行い、株式ポートフォリオに含まれる銘柄数の増加に従って中心極限定理的な作用からどの程度正規分布に近づくかについて VaR 計測を踏まえて 3 つの観点から検証した。

第 1 に、株式ポートフォリオを構成する銘柄数とモデルパラメータの観点からは、市場環境に関わらず拡散項とジャンプ項のボラティリティが構成銘柄数の増加にともなって縮小することが確認された。しかしながら、混乱期においてはジャンプ幅率のボラティリティの縮小がそれほどみられないことが確認できた。

第 2 に、拡散成分の相関係数は銘柄数の増加に伴い低下すること、また、市場環境に依存せず概ね一定で推移していることが確認された。その一方で、ジャンプ成分の相関係数は、市場全体への強いショックがあった場合には銘柄数によらず大きな正の値をとることが確認された。

第 3 に、株式ポートフォリオを構成する銘柄数とテイルリスクの観点からは、99% のような厳しい信頼水準では混乱期には計測誤差が VaR の 4 割程度に及ぶことが観測された。

謝辞 本研究は、科研費 (22510143) の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] Guan, L. K., Xiaoqing, L. and Chong, T. K.: "Asymptotic dynamics and value-at-risk of large diversified portfolios in a jump-diffusion market," *Quantitative Finance*, 4(2), pp.129-139. (2004)
- [2] Merton, R. C.: "Option Pricing when underlying stock returns are discontinuous," *Journal of Financial Economics*, 3, pp.125-144. (1976)
- [3] 佐々木豊史, 宮崎浩一: 「"伝染" 或いは"除外"? 日本株式市場におけるパッドニュースの影響」, *電気通信大学紀要*, 17(1/2), pp.21-32. (2005)
- [4] 佐々木豊史, 宮崎浩一, 野村哲史: 「観測数および銘柄数に依存した VaR の推定誤差に関する実証分析」, *オペレーションズリサーチ誌*, 50, pp.277-284. (2005)
- [5] 佐々木豊史, 宮崎浩一, 野村哲史: 「Edgeworth 展開に基づくオプション評価 - 原資産収益率が Merton の Jump-Diffusion モデルに従う場合 - 」, *応用統計学*, 32(2), pp.113-128. (2006)