Kutta-Merson Process とその類似の方法について*

田中正次**

1. まえがき

Runge-Kutta 法に，打切り誤差評価の能力を与える試みは，近年多くの研究者たちによってなされた．ここでは，そのうち，そのステップにおける情報のみを用いる，いわゆる single-stage の方法について考える．single-stage の方法に関する最初の着想は，R. Merson によって得られ，有名な Kutta-Merson Process[1] を産み出した．

いま与えられた微分方程式を

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y),\quad y(x_0)=y_0 \qquad (1\cdot1)$$

とすれば，この Kutta-Merson Process の本質は―著者が **3**. において詳述するように― 関数 $f(x, y)$ が x, y の一次式でなければ，3 rd order 法に誤差評価能力を与えるものである．この方法は，創始者のおかしたあやまりが一般に認められるようになった今日でも，誤謬が良性のものなので，依然としてその実用的な価値を失っていない．

この single stage の方法のつぎの開拓者は F. Ceschino (1962) であるが，彼は正当な考察に基いて，2 nd および 3 rd order 公式を作った[2]．

上述の著者たちは公式誘導の際，条件式のもつ自由度を計算手続きを少なくすることに費したが，著者は同じ自由度を，積分公式とその評価式の精度を上げるために用いる．

この論文は5節から成り立つ．**2**. においては，著者が従来の公式の評価や，新たな公式の誘導に用いる打切り精度の判定基準についてのべる．**3**. においては，Kutta-Merson Process の本質について詳述する．この問題を特にとり上げたのは，Kutta-Merson Process は誤差評価能力をもつ Runge-Kutta 公式中最も普及しているもので，わが国でも近年その利用者があらわれてきているので（たとえば文献3)をみよ）このような話題は時宜に適していると考えたからである．**4**. においては，関数 $f(x, y)$ が x, y の一般関数である場合について，誤差評価能力をもつ公式を作る．すなわち，まず 4.1 においてそのための準備をし，4.2，4.3 および 4.4 において，それぞれ3個，4個および5個の関数値を使用する誤差評価能力をもつ公式を作る．その際，積分公式の精度および誤差評価能力向上のために，打切り誤差の観点に基づく係数の最適化が行なわれる．

この論文において誤差とは，打切り誤差 (truncation error) の意であって，丸めの誤差 (round off error) を意味しない．今後，煩わしさを避けるために，しばしば打切り誤差の代りに誤差という言葉を使用することがあるので注意されたい．

single stage の方法の研究には，他に R.E. Scraton によるものがあるが，その手続きはなお一層煩雑である[4]．

* On Kutta-Merson Process and its Allied Processes, by Masatugu Tanaka (Yamanashi University)

** 山梨大学

2. 打切り精度の計量

各種の Runge-Kutta 公式について，その精度を測るために，ほぼ同様な性質をもつ三つの尺度 (measures) を用意する．

いま，3 rd order の精度をもつ Runge-Kutta 公式を

$$\begin{cases} k_1=hf(x_0,\ y_0) & (2.1)\\ k_2=hf(x_0+\alpha_2h,\ y_0+\beta_{21}k_1) & (2.2)\\ k_3=hf\left(x_0+\alpha_3h,\ y_0+\sum_{j=1}^{2}\beta_{3j}k_j\right) & (2.3)\\ k_4=hf\left(x_0+\alpha_4h,\ y_0+\sum_{j=1}^{3}\beta_{4j}k_j\right) & (2.4)\\ k_5=hf\left(x_0+\alpha_5h,\ y_0+\sum_{j=1}^{4}\beta_{5j}k_j\right) & (2.5)\\ y(x_0+h)=y(x_0)+\sum_{i=1}^{5}\mu_ik_i & (2.6) \end{cases}$$

とすれば，その打切り誤差 E は，

$$\begin{aligned} E=&h^4(b_1D^3f+b_2f_yD^2f+b_3f_y{}^2Df+b_4DfDf_y)_0\\ &+h^5(c_1D^4f+c_2DfD^2f_y+c_3D^3ff_y+c_4D^2fDf_y\\ &+c_5D^2ff_y{}^2+c_6(Df)^2f_{yy}+c_7f_yDfDf_y\\ &+c_8Dff_y{}^3)_0+\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (2.7)$$

とあらわすことができる．ここで，

$$D=\frac{\partial}{\partial x}+f_0\frac{\partial}{\partial y} \qquad (2.8)$$

b_i, c_j $i=1, 2, 3, 4$, $j=1, 2, \cdots\cdots, 8$ は，公式を特性化する係数の関数で，次式によって定義されるものである．

$$b_1=\frac{1}{6}\left(\mu_2\alpha_2^3+\mu_3\alpha_3^3+\mu_4\alpha_4^3+\mu_5\alpha_5^3-\frac{1}{4}\right) \quad (2.9)$$

$$b_2=\frac{1}{2}\left\{\mu_3\alpha_2^2\beta_{32}+\mu_4(\alpha_2^2\beta_{42}+\alpha_3^2\beta_{43}) +\mu_5(\alpha_2^2\beta_{52}+\alpha_3^2\beta_{53}+\alpha_4^2\beta_{54})-\frac{1}{12}\right\} \quad (2.10)$$

$$b_3=\mu_4\alpha_2\beta_{32}\beta_{43}+\mu_5(\alpha_2\beta_{32}\beta_{53} +\alpha_2\beta_{42}\beta_{54}+\alpha_3\beta_{43}\beta_{54})-\frac{1}{24} \quad (2.11)$$

$$b_4=\mu_3\alpha_2\alpha_3\beta_{32}+\mu_4(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})\alpha_4 +\mu_5(\alpha_2\beta_{52}+\alpha_3\beta_{53}+\alpha_4\beta_{54})\alpha_5-\frac{1}{8} \quad (2.12)$$

$$c_1=\frac{1}{24}\left(\mu_2\alpha_2^4+\mu_3\alpha_3^4+\mu_4\alpha_4^4+\mu_5\alpha_5^4-\frac{1}{5}\right) \quad (2.13)$$

$$c_2=\frac{1}{2}\left\{\mu_3\alpha_2\alpha_3^2\beta_{32}+\mu_4(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})\alpha_4^2 +\mu_5(\alpha_2\beta_{52}+\alpha_3\beta_{53}+\alpha_4\beta_{54})\alpha_5^2-\frac{1}{10}\right\} \quad (2.14)$$

$$c_3=\frac{1}{6}\left\{\mu_3\alpha_2^3\beta_{32}+\mu_4(\alpha_2^3\beta_{42}+\alpha_3^3\beta_{43}) +\mu_5(\alpha_2^3\beta_{52}+\alpha_3^3\beta_{53}+\alpha_4^3\beta_{54})-\frac{1}{20}\right\} \quad (2.15)$$

$$c_4=\frac{1}{2}\left\{\mu_3\alpha_2^2\alpha_3\beta_{32}+\mu_4(\alpha_2^2\beta_{42}+\alpha_3^2\beta_{43})\alpha_4 +\mu_5(\alpha_2^2\beta_{52}+\alpha_3^2\beta_{53}+\alpha_4^2\beta_{54})\alpha_5-\frac{1}{15}\right\} \quad (2.16)$$

$$c_5=\frac{1}{2}\left\{\mu_4\alpha_2^2\beta_{32}\beta_{43}+\mu_5(\alpha_2^2\beta_{32}\beta_{53} +\alpha_2^2\beta_{42}\beta_{54}+\alpha_3^2\beta_{43}\beta_{54})-\frac{1}{60}\right\} \quad (2.17)$$

$$c_6=\frac{1}{2}\left\{\mu_3\alpha_2^2\beta_{32}^2+\mu_4(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})^2 +\mu_5(\alpha_2\beta_{52}+\alpha_3\beta_{53}+\alpha_4\beta_{54})^2-\frac{1}{20}\right\} \quad (2.18)$$

$$c_7=\mu_4\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)\beta_{32}\beta_{43}+\mu_5\{\alpha_2(\alpha_3+\alpha_5)\beta_{32}\beta_{53} +(\alpha_4+\alpha_5)(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})\beta_{54}\}-\frac{1}{20} \quad (2.19)$$

$$c_8=\mu_5\alpha_2\beta_{32}\beta_{43}\beta_{54}-\frac{1}{120} \quad (2.20)$$

以下においては特に断らないが，円括弧，角括弧を問わず括弧の下側につけられた0は，括弧内の関数が点 (x_0, y_0) において評価されることを示す．

ここでは，公式 (2.6) の打切り精度を測るのに，つぎの尺度を使用する．

$$A_4=8|b_1|+|b_2|+|2b_2+b_4| +|b_2+b_4|+2|b_3|+2|b_4| \quad (2.21)$$

$$B_4=\sum_{i=1}^{4}|b_i| \quad (2.22)$$

$$C_4=\sum_{i=1}^{4}b_i^2 \quad (2.23)$$

$$A_5=16|c_1|+4|c_2|+|c_2+3c_3|+|2c_2+3c_3| +|c_2+c_3|+|c_3|+8|c_4|+|c_5|+|2c_5+c_7| +|c_5+c_6+c_7|+|c_6|+|2c_6+c_7|+|c_7| +2|c_8| \quad (2.24)$$

$$B_5=\sum_{i=1}^{8}|c_i| \quad (2.25)$$

$$C_5=\sum_{i=1}^{8}c_i^2 \quad (2.26)$$

M. Lotkin にならって，(2.7) で与えられた打切り誤差 E の限度を求めれば，

$$|E|\leqq h^4A_4ML^3+h^5A_5ML^4+\cdots\cdots \quad (2.27)$$

となる[5]．ここで M, L は，(x, y) に独立な正の定数で，点 (x_0, y_0) をふくむある領域において，$|f(x, y)|\leqq M$, $\left|\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i\partial y^j}\right|\leqq\frac{L^{i+j}}{M^{j-1}}$, $i+j\leqq4$ が成り立つものとする．

この A_i および B_i, C_i は，それぞれ A. Ralston および R.L. Johnston らによって，Runge-Kutta 公式の最適化に用いられた打切り精度の判定基準である[6,7]．これらの尺度は，その公式の打切り精度をかなり正確に反映する．

代表的な Runge-Kutta 公式について上記諸量を求めれば，**第1表**が得られる．

第1表　代表的な Runge-Kutta 公式の打切り精度

公　式	order	i	A_i	B_i	C_i
classical Runge-Kutta 法	4	5	1.01×10^{-1}	2.67×10^{-2}	1.41×10^{-4}
Runge-Kutta-Gill 法	4	5	8.41×10^{-2}	2.24×10^{-2}	1.06×10^{-4}
Ralston による最も打切の精度の高い公式	4	5	5.46×10^{-2}	1.67×10^{-2}	8.76×10^{-5}
Heun による方法	3	4	2.31×10^{-1}	7.41×10^{-2}	2.14×10^{-3}
Kutta による方法	3	4	2.50×10^{-1}	8.33×10^{-2}	3.47×10^{-3}
Ralston による最も打切り精度の高い公式	3	4	1.11×10^{-1}	4.51×10^{-2}	1.75×10^{-3}

3. Kutta-Merson Process と Ceschino の方法

Kutta-Merson Process は，既述のように R. Merson によって考案されたもので，その公式を示せばつぎのようになる．

$$
\left\{
\begin{aligned}
&y_1=y_0+\frac{1}{3}hf(x_0,\ y_0) && (3.1)\\
&y_2=y_0+\frac{1}{6}hf(x_0,\ y_0)+\frac{1}{6}hf\left(x_0+\frac{1}{3}h,\ y_1\right) && (3.2)\\
&y_3=y_0+\frac{1}{8}hf(x_0,\ y_0)+\frac{3}{8}hf\left(x_0+\frac{1}{3}h,\ y_2\right) && (3.3)\\
&y_4=y_0+\frac{1}{2}hf(x_0,\ y_0)-\frac{3}{2}hf\left(x_0+\frac{1}{3}h,\ y_2\right)\\
&\qquad +2\,hf\left(x_0+\frac{1}{2}h,\ y_3\right) && (3.4)\\
&y_5=y_0+\frac{1}{6}hf(x_0,\ y_0)+\frac{2}{3}hf\left(x_0+\frac{1}{2}h,\ y_3\right)\\
&\qquad +\frac{1}{6}hf(x_0+h,\ y_4) && (3.5)\\
&T=\frac{1}{5}(y_4-y_5) && (3.6)
\end{aligned}
\right.
$$

ここで y_5 は 4 th order 法であり，T は，$f(x,\ y)$ が $x,\ y$ の一次式である場合に y_5 の打切り誤差の推定値を与えようるように作られたものである．しかし Merson は，刻み幅 h が十分小さければ，たとえ $f(x,\ y)$ が非線形関数であっても，T は y_5 の打切り誤差のよい推定値を与えると主張する．

Ceschino の方法は[3]，

$$
\left\{
\begin{aligned}
&k_1=hf(x_0,\ y_0) && (3.7)\\
&k_2=hf(x_0+0.2\,h,\ y_0+0.2\,k_1) && (3.8)\\
&k_3=hf(x_0+0.8\,h,\ y_0-1.9085441\,k_1\\
&\qquad +2.7085441\,k_2) && (3.9)\\
&k_4=hf(x_0+0.58\,h,\ y_0-0.19998240\,k_1\\
&\qquad +0.72770983\,k_2+0.052272571\,k_3) && (3.10)\\
&y_1=y_0+0.78126170\,k_1-1.1191761\,k_2\\
&\qquad -0.23706888\,k_3+1.5749833\,k_4 && (3.11)\\
&k_5=hf(x_0+h,\ y_1) && (3.12)\\
&y_2=y_0+0.10483420\,k_1+0.20115260\,k_2\\
&\qquad -0.031342495\,k_3+0.57264801\,k_4\\
&\qquad +0.15270764\,k_5 && (3.13)\\
&T=y_1-y_2 && (3.14)
\end{aligned}
\right.
$$

である．ここで y_1, y_2 および T は，それぞれ 3 rd order 公式，4 th order 公式および y_1 の打切り誤差の推定値である．

上述の 2 公式に関する打切り精度の測定量を**第 2 表**に示す．

第 1，第 2 表を熟視することにより，つぎのことがわかる．もし $f(x,\ y)$ が $x,\ y$ の非線形関数ならば，

（1） y_5 は，普通の 4 th order 法よりやや精度のよい 4 th order 法である．

（2） $y_5 \pm T$ は，ほぼ同等の精度をもつ 3 rd order 法であって，普通の 3 rd order 法よりやや高精度である．

（3） y_4 は，$y_5 \pm T$ より精度の低い 3 rd order 法であって，普通の 3 rd order 法と同程度の精度をもつ．

（4） Ceschino の方法の y_1 は，Kutta-Merson Process の $y_5 \pm T$ よりも精度の低い 3 rd order 法である．

（5） Ceschino の方法の y_2 は，Kutta-Merson Process の y_5 より高精度の 4 th order 法である．

以上の考察から，明らかなように，Kutta-Merson Process における推定誤差 T は，3 rd order 公式である y_5+T の誤差の推定値であって，4 th order の精度をもつ y_5 のそれではない．すなわち，Kutta-Merson Process は，y_5 の打切り誤差― h について 5 次以上の誤差項の総和― を 3 rd order の精度をもつ別の積分公式の，h について 4 次の打切り誤差項でおきかえて考える方法で，T と y_5 の打切り誤差の間には何の論理的な関連もない．解のテイラー展開の収束が速い，性質のよい，普通の問題では，一般に T は，y_5 に対して過大な誤差を与えるであろう．

Ceschino の方法は，積分公式 y_1 の精度は余りよくないが，誤差評価のための公式 y_2 の精度が比較的よいので，その差としてとらえられる打切り誤差の推

第 2 表　Kutta-Merson Process および Ceschino の方法の精度*

方法 ＼ 積分公式 ＼ 判定基準		A_4	B_4	C_4	A_5	B_5	C_5
Kutta-Merson Process	y_5	(2.73×10^{-10})	(7.16×10^{-11})	(2.10×10^{-21})	4.65×10^{-2}	1.18×10^{-2}	2.09×10^{-5}
	y_5-T	4.81×10^{-2}	1.01×10^{-2}	4.20×10^{-5}	1.33×10^{-1}	2.04×10^{-2}	9.59×10^{-5}
	y_5+T	4.81×10^{-2}	1.01×10^{-2}	4.20×10^{-5}	1.13×10^{-1}	2.06×10^{-2}	7.94×10^{-5}
	y_4	2.41×10^{-1}	5.09×10^{-2}	1.05×10^{-3}	5.92×10^{-1}	9.47×10^{-2}	1.65×10^{-3}
Ceschino	y_1	3.51×10^{-1}	7.69×10^{-2}	3.38×10^{-3}	6.92×10^{-1}	1.10×10^{-1}	3.10×10^{-3}
	y_2	(7.55×10^{-8})	(2.27×10^{-8})	(1.68×10^{-16})	2.89×10^{-2}	6.17×10^{-3}	6.54×10^{-6}

*（ ）のついているものは有限けた計算のため 0 でなくなったが本来 0 のものである．

定値はかなり正確である．

第3表は，常微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y},\ y(1)=2$$

を，Kutta-Merson Process および Ceschino の方法を用いて1ステップ積分したときの，実際の誤差および打切り誤差の推定値を示す．

Kutta-Merson Process の推定誤差は，非線形性の仮定のために著しく過大であり，Ceschino の方法の推定誤差は非常に正確である．

第3表　$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}$, $y(1)=2$ を $x=1.0$ から刻み幅0.1で1ステップ積分したときの数値解の誤差

公　　式	実際の誤差	推定誤差
Kutta-Merson	72×10^{-9}	2089×10^{-9}
Ceschino	15125×10^{-9}	15099×10^{-9}

以下 Kutta-Merson Process や Ceschino の方法と類似の方法について考える．

4. 類似の方法

4.1 準　　備

公式の一般形は，

$$\begin{cases} k_i=hf(x_0+\alpha_i h,\ y_0+\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}k_j) \\ \qquad\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m) & (4.1.1)\\ y_1=y_0+\sum_{i=1}^{n}\nu_i k_i & (4.1.2)\\ y_2=y_0+\sum_{i=1}^{m}\mu_i k_i & (4.1.3)\\ T=y_1-y_2 & (4.1.4)\end{cases}$$

ここで $n\leq m$, α_i, β_{ij}, ν_i, μ_i は定数で，特に $\alpha_1=\beta_{10}=0$ である．また y_1 は積分公式，y_2 は y_1 より高精度の公式で，y_1 の打切り誤差の推定値 T を求めるのに必要なものである．

常微分方程式 (1.1) において，$x=x_0$ が特異点でなければ解は存在し，テイラー級数の形に表現し得る．すなわち，

$$y(x_0+h)=y_0+hy_0'+\frac{h^2}{2!}y_0''+\frac{h^3}{3!}y_0'''+\frac{h^4}{4!}y_0^{(4)}+\cdots\cdots \qquad (4.1.5)$$

ここで，$h=x-x_0$ は十分小さく，テイラー級数は収束するものとする．なお，必要な点における高次導関数，同偏導関数の存在を仮定する．いま，

$$D=\frac{\partial}{\partial x}+f_0\frac{\partial}{\partial y} \qquad (4.1.6)$$

とおけば，(4.1.5) はつぎのようにかける[8]．

$$\begin{aligned} y(x_0+h)-y(x_0)=k=\Big[&hf+\frac{h^2}{2!}Df+\frac{h^3}{3!}(D^2f\\ &+f_yDf)+\frac{h^4}{4!}(D^3f+f_yD^2f+f_y{}^2Df\\ &+3DfDf_y)+\frac{h^5}{5!}(D^4f+6DfD^2f_y\\ &+4D^2fDf_y+D^2ff_y{}^2+Dff_y{}^3+3(Df)^2f_{yy}\\ &+D^3ff_y+7f_yDfDf_y)+\cdots\cdots\Big]_0 \end{aligned} \qquad (4.1.7)$$

4.2 3個の関数値を使用する方法（$m=3$ の場合）

公式の一般形は，

$$\begin{cases} k_1=hf(x_0,\ y_0) & (4.2.1)\\ k_2=hf(x_0+\alpha_2h,\ y_0+\beta_{21}k_1) & (4.2.2)\\ k_3=hf\left(x_0+\alpha_3h,\ y_0+\sum_{j=1}^{2}\beta_{3j}k_j\right) & (4.2.3)\\ y_1=y_0+\sum_{i=1}^{2}\mu_ik_i & (4.2.4)\\ T=\sum_{i=1}^{3}\nu_ik_i & (4.2.5)\end{cases}$$

ここで，α_i, β_{ij}, μ_i, ν_i は定数，y_1 は積分公式，T は y_1 の推定誤差である．積分公式としては，

$$y_1=y_0+\sum_{i=2}^{3}\mu_ik_i \qquad (4.2.6)$$

の場合も考えられるが，ここではとり扱わない．

この節の目的は，(4.2.4) が 2nd order 公式，(4.2.5) がその打切り誤差の推定値をあらわすように，式 (4.2.1)～(4.2.5) の係数を決定することである．

そのため k_2, k_3 を級数に展開する．

$$k_2=h\Big[f+hD_1f+\frac{h^2}{2!}D_1{}^2f+\frac{h^3}{3!}D_1{}^3f+\frac{h^4}{4!}D_1{}^4f+\cdots\cdots\Big]_0 \qquad (4.2.7)$$

$$\begin{aligned} k_3=h\Big[&f+hD_2f+\frac{h^2}{2!}D_2{}^2f+\frac{h^3}{3!}D_2{}^3f\\ &+\frac{h^4}{4!}D_2{}^4f+\cdots\cdots+h^2\beta_{32}\Big\{f_yD_1f+\frac{h}{2!}f_yD_1{}^2f\\ &+hD_1fD_2f_y+\frac{h^2}{3!}f_yD_1{}^3f+\frac{h^2}{2!}D_1{}^2fD_2f_y\\ &+\frac{h^2}{2!}\beta_{32}f_{yy}(D_1f)^2+\frac{h^2}{2!}D_1fD_2{}^2f_y+\cdots\cdots\Big\}\Big]_0 \end{aligned} \qquad (4.2.8)$$

ここで

$$D_1=\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}+\beta_{21}f_0\frac{\partial}{\partial y} \qquad (4.2.9)$$

$$D_2=\alpha_3\frac{\partial}{\partial x}+(\beta_{31}+\beta_{32})f_0\frac{\partial}{\partial y} \qquad (4.2.10)$$

である．

(4.2.4) が 2nd order 公式であるためには，同式右辺の k_2 に (4.2.7) を代入し，h について昇べきの順に並べたものが (4.1.7) の右辺と h^2 の項まで完全に一致しなければならない．これより，つぎの方程式が得られる．

$$\mu_1+\mu_2=1 \tag{4.2.11}$$

$$\mu_2 D_1 f=\frac{1}{2!}Df \tag{4.2.12}$$

(4.2.4) の打切り誤差は，

$$h^3\left\{\frac{1}{2!}\mu_2 D_1{}^2 f-\frac{1}{3!}(D^2 f+f_y Df)\right\}+\cdots\cdots \tag{4.2.13}$$

(4.2.5) が打切り誤差をあらわすためには，同式の展開が h^3 の項まで (4.2.13) と一致しなければならない．これより，

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3=0 \tag{4.2.14}$$

$$\nu_2 D_1 f+\nu_3 D_2 f=0 \tag{4.2.15}$$

$$\frac{1}{2!}\nu_2 D_1{}^2 f+\frac{1}{2!}\nu_3 D_2{}^2 f=\frac{1}{2!}\mu_2 D_1{}^2 f-\frac{1}{3!}D^2 f \tag{4.2.16}$$

$$\nu_3\beta_{32} f_y D_1 f=-\frac{1}{3!}f_y Df \tag{4.2.17}$$

を得る．

上の二組の方程式群が，関数 f の選び方に無関係に成立するように，

$$\alpha_2=\beta_{21},\quad \alpha_3=\beta_{31}+\beta_{32} \tag{4.2.18}$$

または，

$$D_1=\alpha_2 D,\quad D_2=\alpha_3 D \tag{4.2.19}$$

とおけば，そのとき

$$\mu_1+\mu_2=1 \tag{4.2.20}$$

$$\mu_2\alpha_2=\frac{1}{2} \tag{4.2.21}$$

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3=0 \tag{4.2.22}$$

$$\nu_2\alpha_2+\nu_3\alpha_3=0 \tag{4.2.23}$$

$$\frac{1}{2}\nu_2\alpha_2{}^2+\frac{1}{2}\nu_3\alpha_3{}^2=\frac{1}{2}\mu_2\alpha_2{}^2-\frac{1}{6} \tag{4.2.24}$$

$$\nu_3\alpha_2\beta_{32}=-\frac{1}{6} \tag{4.2.25}$$

この連立方程式は，8個の未知パラメータに関する6個の方程式系であるから2自由度をもつ．

いま $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$, $\alpha_2 \neq \alpha_3$. $\alpha_2 \neq 2/3$ とし，これらの方程式を α_2, α_3 をパラメータとして解けば，

$$\mu_1=\frac{2\alpha_2-1}{2\alpha_2} \tag{4.2.26}$$

$$\mu_2=\frac{1}{2\alpha_2} \tag{4.2.27}$$

$$\nu_1=\frac{3\alpha_2-2}{6\alpha_2\alpha_3} \tag{4.2.28}$$

$$\nu_2=\frac{3\alpha_2-2}{6\alpha_2(\alpha_2-\alpha_3)} \tag{4.2.29}$$

$$\nu_3=\frac{3\alpha_2-2}{6\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)} \tag{4.2.30}$$

$$\beta_{32}=\frac{\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)}{\alpha_2(2-3\alpha_2)} \tag{4.2.31}$$

を得る．上述の条件を満足する任意の α_2, α_3 に対して，式 (4.2.26)～(4.2.31) を用いて他の係数を計算すれば所要の係数の組が得られる．

2例を以下に示す．

(i) $\alpha_2=\frac{1}{2}$, $\alpha_3=1$ の場合

$\mu_1=0$, $\mu_2=1$, $\nu_1=-\frac{1}{6}$, $\nu_2=\frac{1}{3}$, $\nu_3=-\frac{1}{6}$, $\beta_{32}=2$

となるから，つぎの（公式 I）が得られる．

$$(\text{公式 I})\left\{\begin{array}{l} k_1=hf(x_0,\ y_0) \\ k_2=hf\left(x_0+\frac{1}{2}h,\ y_0+\frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3=hf(x_0+h,\ y_0-k_1+2k_2) \\ y_1=y_0+k_2 \\ T=-\frac{1}{6}(k_1-2k_2+k_3) \end{array}\right.$$

(ii) $\alpha_2=1$, $\alpha_3=\frac{1}{2}$, $\mu_1=\mu_2=\frac{1}{2}$ の場合

$\nu_1=\frac{1}{3}$, $\nu_2=\frac{1}{3}$, $\nu_3=-\frac{2}{3}$, $\beta_{32}=\frac{1}{4}$ となるから，つぎの（公式 II）が得られる．

$$(\text{公式 II})\left\{\begin{array}{l} k_1=hf(x_0,\ y_0) \\ k_2=hf(x_0+h,\ y_0+k_1) \\ k_3=hf\left(x_0+\frac{1}{2}h,\ y_0+\frac{1}{4}k_1+\frac{1}{4}k_2\right) \\ y_1=y_0+\frac{1}{2}(k_1+k_2) \\ T=\frac{1}{3}(k_1+k_2-2k_3) \end{array}\right.$$

これらの公式によれば，各ステップにおいて誤差評価が可能になり，その上，推定誤差は関数 y''' が急変する時でさえも信頼し得る．しかし実際には，このように精度の低い公式は余り使用されない．

4.3 4個の関数値を使用する方法（$m=4$ の場合）

公式の一般形は，

$$\left\{\begin{array}{ll} k_1=hf(x_0,\ y_0) & (4.3.1) \\ k_2=hf(x_0+\alpha_2 h,\ y_0+\beta_{21}k_1) & (4.3.2) \\ k_3=hf\left(x_0+\alpha_3 h,\ y_0+\sum_{j=1}^{2}\beta_{3j}k_j\right) & (4.3.3) \\ k_4=hf\left(x_0+\alpha_4 h,\ y_0+\sum_{j=1}^{3}\beta_{4j}k_j\right) & (4.3.4) \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y_1=y_0+\sum_{i=1}^{3}\mu_i k_i & (4.3.5)\\ y_2=y_0+\sum_{i=1}^{4}\nu_i k_i & (4.3.6)\\ T=y_1-y_2 & (4.3.7)\end{cases}$$

ここで α_i, β_{ij}, μ_i および ν_i は定数，(4.3.5) および (4.3.6) は，それぞれ積分公式および誤差評価に必要な高精度の公式，そして T は，(4.3.5) の推定打切り誤差をあらわす．積分公式が

$$y_1=y_0+\sum_{i=2}^{4}\mu_i k_i \tag{4.3.8}$$

のような形をとる場合も考えられるが，ここではとり扱わない．

(4.2.7) および (4.2.8) を (4.3.5) に代入すれば

$$\begin{aligned} y_1&=y_0+\sum_{i=1}^{3}\mu_i k_i\\ &=y_0+\Big[\mu_1 hf+\mu_2 h\Big\{f+hD_1f+\frac{h^2}{2!}D_1^2f\\ &\quad+\frac{h^3}{3!}D_1^3f+\frac{h^4}{4!}D_1^4f+\cdots\cdots\Big\}+\mu_3 h\Big\{f+hD_2f\\ &\quad+\frac{h^2}{2!}D_2^2f+\frac{h^3}{3!}D_2^3f+\frac{h^4}{4!}D_2^4f+\cdots\cdots+h^2\beta_{32}\\ &\quad\Big(f_yD_1f+\frac{h}{2!}f_yD_1^2f+hD_1fD_2f_y+\frac{h^2}{3!}f_yD_1^3f\\ &\quad+\frac{h^2}{2}D_1^2fD_2f_y+\frac{h^2}{2!}\beta_{32}f_{yy}(D_1f)^2\\ &\quad+\frac{h^2}{2!}D_1fD_2^2f_y+\cdots\cdots\Big)\Big\}\Big]_0\\ &=y_0+\Big[(\mu_1+\mu_2+\mu_3)hf+h^2(\mu_2D_1f+\mu_3D_2f)\\ &\quad+\frac{h^3}{2!}(\mu_2D_1^2f+\mu_3D_2^2f)+h^3(\mu_3\beta_{32}f_yD_1f)\\ &\quad+\frac{h^4}{3!}(\mu_2D_1^3f+\mu_3D_2^3f)+\frac{h_4}{2!}(\mu_3\beta_{32}f_yD_1^2f)\\ &\quad+h^4(\mu_3\beta_{32}D_1fD_2f_y)+\cdots\cdots\Big]_0 \end{aligned}\tag{4.3.9}$$

(4.3.5) が 3 rd order 公式であるという条件，および (4.3.9), (4.1.7) から

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3=1 \tag{4.3.10}$$

$$\mu_2D_1f+\mu_3D_2f=\frac{1}{2!}Df \tag{4.3.11}$$

$$\mu_2D_1^2f+\mu_3D_2^2f=\frac{2!}{3!}D^2f \tag{4.3.12}$$

$$\mu_3\beta_{32}D_1f=\frac{1}{3!}Df \tag{4.3.13}$$

を得る．

(4.3.5) を 3 rd order 公式とすれば，y_1 の打切り誤差 E_1 は (4.3.9) および (4.1.7) からつぎのようになる．

$$\begin{aligned} E_1&=\Big[\frac{h^4}{3!}\Big\{\mu_2D_1^3f+\mu_3D_2^3f)-\frac{1}{4}D^3f\Big\}\\ &\quad+\frac{h^4f_y}{2!}\Big(\mu_3\beta_{32}D_1^2f-\frac{1}{12}D^2f\Big)-\frac{h^4}{4!}f_y^2Df\\ &\quad+h^4\Big(\mu_3\beta_{32}D_1fD_2f_y-\frac{1}{8}DfDf_y\Big)+\cdots\cdots\Big]_0 \end{aligned}\tag{4.3.14}$$

ここで，$D_1=\alpha_2D$, $D_2=\alpha_3D$ および $D_3=\alpha_4D$ とおけば，式 (4.3.10)～(4.3.13) は，

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3=1 \tag{4.3.15}$$

$$\mu_2\alpha_2+\mu_3\alpha_3=\frac{1}{2} \tag{4.3.16}$$

$$\mu_2\alpha_2^2+\mu_3\alpha_3^2=\frac{1}{3} \tag{4.3.17}$$

$$\mu_3\alpha_2\beta_{32}=\frac{1}{6} \tag{4.3.18}$$

となる．また (4.3.14) は，

$$\begin{aligned} E_1&=[h^4(b_{11}D^3f+b_{12}f_yD^2f+b_{13}f_y^2Df\\ &\quad+b_{14}DfDf_y)+\cdots\cdots]. \end{aligned}\tag{4.3.19}$$

となる．ここで $b_{1,j}$ $j=1, 2, 3, 4$ は，式 (2.9)～(2.12) によって定められる b_j, $j=1, 2, 3, 4$ において，$\mu_4=\mu_5=0$ とおけば得られる．この対応で b_1j には b_j が対応する．

y_2 の展開を求めるために k_4 を点 (x_0, y_0) について展開すれば，

$$\begin{aligned} k_4&=hf\Big(x_0+\alpha_4h,\ y_0+\sum_{j=1}^{3}\beta_{4j}k_j\Big)\\ &=h\Big[f+hD_3f+h^2f_y\Big\{\beta_{42}\Big(D_1f+\frac{h}{2}D_1^2f\\ &\quad+\frac{h^2}{3!}D_1^3f+\cdots\cdots\Big)+\beta_{43}\Big(D_2f+h\beta_{32}f_yD_1f\\ &\quad+\frac{h}{2}D_2^2f+\frac{h^2}{2}\beta_{32}f_yD_1^2f+h^2\beta_{32}D_1fD_2f_y\\ &\quad+\frac{h^2}{3!}D_2^3f+\cdots\cdots\Big)\Big\}+\frac{1}{2!}\Big(h^2D_3^2f\\ &\quad+2h^3D_3f_y\Big\{\beta_{42}\Big(D_1f+\frac{h}{2}D_1^2f+\cdots\cdots\Big)\\ &\quad+\beta_{43}\Big(D_2f+h\beta_{32}f_yD_1f+\frac{h}{2}D_2^2f+\cdots\cdots\Big)\Big\}\\ &\quad+h^4f_{yy}\{\beta_{42}^2(D_1f)^2+2\beta_{42}\beta_{43}D_1fD_2f\\ &\quad+\beta_{43}^2(D_2f)^2+\cdots\cdots\}\Big)+\frac{1}{3!}\Big(h^3D_3^3f\\ &\quad+3h^4D_3^2f_y\times\{\beta_{42}D_1f+\beta_{43}D_2f+\cdots\cdots\}\Big)\\ &\quad+\frac{1}{4!}(h^4D_3^4f+\cdots\cdots)+\cdots\cdots\Big]_0 \end{aligned}\tag{4.3.20}$$

ここで，$D_3=\alpha_4\frac{\partial}{\partial x}+(\beta_{41}+\beta_{42}+\beta_{43})f_0\frac{\partial}{\partial y}$ である．

y_1 の展開と同様 (4.2.7), (4.2.8) および (4.3.20) を (4.3.6) の右辺に代入整理すれば，

$$
\begin{aligned}
y_2 = & y_0 + \sum_{i=1}^{4} \nu_i k_i \\
= & y_0 + \Big[(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4) hf + (\nu_2 D_1 f + \nu_3 D_2 f \\
& + \nu_4 D_3 f) h^2 + \frac{h^3}{2!} (\nu_2 D_1^2 f + \nu_3 D_2^2 f + \nu_4 D_3^2 f) \\
& + \frac{h^4}{3!} (\nu_2 D_1^3 f + \nu_3 D_2^3 f + \nu_4 D_3^3 f) + \frac{h^5}{4!} (\nu_2 D_1^4 f \\
& + \nu_3 D_2^4 f + \nu_4 D_3^4 f) + h^3 f_y \{ \nu_3 \beta_{32} D_1 f \\
& + \nu_4 (\beta_{42} D_1 f + \beta_{43} D_2 f) \} + \frac{h^4 f_y}{2!} \{ \nu_3 \beta_{32} D_1^2 f \\
& + \nu_4 (\beta_{42} D_1^2 f + \beta_{43} D_2^2 f) \} + h^4 f_y^2 (\nu_4 \beta_{32} \beta_{43} D_1 f) \\
& + h^4 \{ \nu_3 \beta_{32} D_1 f D_2 f_y + \nu_4 (\beta_{42} D_1 f \\
& + \beta_{43} D_2 f) D_3 f_y \} + \cdots\cdots \Big]_0
\end{aligned}
\tag{4.3.21}
$$

(4.3.6) が 4 th order 公式であるという条件，および (4.3.21)，(4.1.7) から，

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=1 \tag{4.3.22}$$

$$\nu_2 D_1 f + \nu_3 D_2 f + \nu_4 D_3 f = \frac{1}{2!} Df \tag{4.3.23}$$

$$\nu_2 D_1^2 f + \nu_3 D_2^2 f + \nu_4 D_3^2 f = \frac{2!}{3!} D^2 f \tag{4.3.24}$$

$$\nu_3 \beta_{32} D_1 f + \nu_4 (\beta_{42} D_1 f + \beta_{43} D_2 f) = \frac{1}{3!} Df \tag{4.3.25}$$

$$\nu_2 D_1^3 f + \nu_3 D_2^3 f + \nu_4 D_3^3 f = \frac{1}{4} D^3 f \tag{4.3.26}$$

$$\nu_2 \beta_{32} D_1^2 f + \nu_4 (\beta_{42} D_1^2 f + \beta_{43} D_2^2 f) = \frac{1}{12} D^2 f \tag{4.3.27}$$

$$\nu_4 \beta_{32} \beta_{43} D_1 f = \frac{1}{4!} Df \tag{4.3.28}$$

$$\nu_3 \beta_{32} D_1 f D_2 f_y + \nu_4 (\beta_{42} D_1 f + \beta_{43} D_2 f) D_3 f_y = \frac{3}{4!} Df Df_y \tag{4.3.29}$$

前述のように $D_1=\alpha_2 D$, $D_2=\alpha_3 D$ および $D_3=\alpha_4 D$ とおけば，式 (4.3.22)～(4.3.29) は，つぎのようになる．

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=1 \tag{4.3.30}$$

$$\nu_2\alpha_2+\nu_3\alpha_3+\nu_4\alpha_4=1/2 \tag{4.3.31}$$

$$\nu_2\alpha_2^2+\nu_3\alpha_3^2+\nu_4\alpha_4^2=1/3 \tag{4.3.32}$$

$$\nu_3\alpha_2\beta_{32}+\nu_4(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})=1/6 \tag{4.3.33}$$

$$\nu_2\alpha_2^3+\nu_3\alpha_3^3+\nu_4\alpha_4^3=1/4 \tag{4.3.34}$$

$$\nu_3\alpha_2^2\beta_{32}+\nu_4(\alpha_2^2\beta_{42}+\alpha_3^2\beta_{43})=1/12 \tag{4.3.35}$$

$$\nu_4\alpha_2\beta_{32}\beta_{43}=1/24 \tag{4.3.36}$$

$$\nu_3\alpha_2\alpha_3\beta_{32}+\nu_4(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})\alpha_4=1/8 \tag{4.3.37}$$

連立方程式 (4.3.15)～(4.3.18) および (4.3.30)～(4.3.37) の解が得られれば，その解を (4.3.1)～(4.3.7) に代入したものが所要の公式である．

この方程式群は，13 個の未知パラメータに関する 12 個の方程式で，見かけ上自由度 1 をもつが解は存在しない．しかし，いくらでもよい近似解が得られる．すなわち，(4.3.31)，(4.3.32) および (4.3.34) より

$$\nu_2 = \frac{3-4(\alpha_3+\alpha_4)+6\,\alpha_3\alpha_4}{12\,\alpha_2(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_2)} \tag{4.3.38}$$

$$\nu_3 = -\frac{3-4(\alpha_2+\alpha_4)+6\,\alpha_2\alpha_4}{12\,\alpha_3(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)} \tag{4.3.39}$$

$$\nu_4 = \frac{3-4(\alpha_2+\alpha_3)+6\,\alpha_2\alpha_3}{12\,\alpha_4(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_4)} \tag{4.3.40}$$

(4.3.30) より

$$\nu_1 = 1-(\nu_2+\nu_3+\nu_4) \tag{4.3.41}$$

また式 (4.3.15)～(4.3.18) より

$$\mu_1 = \frac{6\,\alpha_2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)-3\,\alpha_3^2+2\,\alpha_3-2\,\alpha_2+3\,\alpha_2^2}{6\,\alpha_2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)} \tag{4.3.42}$$

$$\mu_2 = \frac{3\,\alpha_3-2}{6\,\alpha_2(\alpha_3-\alpha_2)} \tag{4.3.43}$$

$$\mu_3 = \frac{2-3\,\alpha_2}{6\,\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)} \tag{4.3.44}$$

$$\beta_{32} = \frac{\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)}{\alpha_2(2-3\,\alpha_2)} \tag{4.3.45}$$

(4.3.36)，(4.3.40) および (4.3.45) より，

$$\beta_{43} = \frac{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_2)(2-3\,\alpha_2)}{2\,\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)\{3-4(\alpha_2+\alpha_3)+6\,\alpha_2\alpha_3\}} \tag{4.3.46}$$

(4.3.33) より，

$$\beta_{42} = \frac{1}{\alpha_2}\left\{\frac{1}{\nu_4}\left(\frac{1}{6}-\nu_3\alpha_2\beta_{32}\right)-\alpha_3\beta_{43}\right\} \tag{4.3.47}$$

式(4.3.38)～(4.3.46) を (4.3.47) に代入すれば，β_{42} は α_2, α_3, α_4 であらわされる．

これらの諸式を，(4.3.35) および (4.3.37) の両式に代入し整理すれば，両式はともに

$$\frac{3-4\,\alpha_2}{6-9\,\alpha_2} = \frac{1}{2} \tag{4.3.48}$$

となる．したがって，α_2 が 0 に収束するとき，式(4.3.35) および (4.3.37) は満足される．これからつぎの結論が得られる．まず，パラメータ α_2, α_3, α_4 を，条件

$$\alpha_2 \fallingdotseq 0,\ \alpha_2 \fallingdotseq 2/3,\ \alpha_3 \fallingdotseq 0,\ \alpha_4 \fallingdotseq 0,\ \alpha_2 \fallingdotseq \alpha_3,\ \alpha_2 \fallingdotseq \alpha_4 \tag{4.3.49}$$

を満足するよう任意に選ぶ．そのとき，このように選ばれたパラメータ α_2, α_3, α_4，および式 (4.3.38)～(4.3.47) によって計算された他の係数は，方程式(4.3.15)～(4.3.18)，(4.3.30)～(4.3.34) および (4.3.

36) を満足する．上のパラメータの選択において，特に α_2 を十分小さくとれば，式 (4.3.35) と式 (4.3.37) の右辺は，十分な精度で左辺と一致する．

たとえば，$\alpha_2=1/60$, $\alpha_3=1/2$, $\alpha_4=1$ とおけば，つぎに示す（公式 III）が得られる．

$$(\text{公式III})\left\{\begin{aligned} &k_1=hf(x_0,\ y_0)\\ &k_2=hf\left(x_0+\frac{1}{60}h,\ y_0+\frac{1}{60}k_1\right)\\ &k_3=hf\left(x_0+\frac{1}{2}h,\ y_0-\frac{541}{78}k_1+\frac{290}{39}k_2\right)\\ &k_4=hf\Big(x_0+h,\ y_0\\ &\qquad+\frac{1918321}{65598}k_1-\frac{34225}{1131}k_2+\frac{117}{58}k_3\Big)\\ &y_1=y_0+10\,k_1-\frac{300}{29}k_2+\frac{39}{29}k_3\\ &y_2=y_0+\frac{1}{6}(k_1+4\,k_3+k_4)\\ &T=y_1-y_2\end{aligned}\right.$$

つぎに，誤差評価の精度を増すため，打切り誤差の観点から最適化を試みる．その際，**2.** においてのべた打切り精度の判定基準を使用する．α_2, α_3, α_4 を任意に選び，上記の手続きを用いて他の諸係数を計算すれば，そのとき式 (4.3.21) と (4.1.7) から，(4.3.6) の打切り誤差 E_2 は，つぎのようになる．

$$\begin{aligned} E_2=&h^4(b_{22}f_yD^2f+b_{24}DfDf_y)_0+h^5(c_{21}D^4f\\ &+c_{22}DfD^2f_y+c_{23}D^3ff_y+c_{24}D^2fDf_y\\ &+c_{25}D^2ff_y{}^2+c_{26}(Df)^2f_{yy}+c_{27}f_yDfDf_y\\ &+c_{28}Dff_y{}^3)_0+\cdots\cdots \end{aligned}\qquad(4.3.50)$$

ここで，b_{2j}, $j=2, 4$, c_{2j}, $j=1, 2, \cdots\cdots, 8$ は，式 (2.10)，(2.12) および (2.13)～(2.20) で与えられる b_j, $j=2, 4$, c_j, $j=1, 2, \cdots\cdots, 8$ において，$\mu_2=\nu_2$, $\mu_3=\nu_3$, $\mu_4=\nu_4$, $\mu_5=0$ とおけば得られる．この対応において b_{2j} には b_j が，c_{2j} には c_j が対応する．

4回の関数計算によって，3 rd order 公式 y_1 に誤差評価能力を与えることはかなり過酷な要求であるので，y_1 の h^4 のオーダの打切り誤差項が余り小さくならないように配慮しながら，y_2 の h^4 および h^5 のオーダの打切り誤差項を可能な限り小さくすることを考える．その際，使用する打切り精度の判定基準は，2節において述べられたもので，この場合はつぎのようになる．y_1 の h^4 のオーダの打切り精度の判定基準 A_{14}, B_{14}, C_{14} は，**2.** における A_4, B_4, C_4 の定義式 (2.21)，(2.22)，(2.23) において，b_j, $j=1, 2, 3, 4$ を b_{1j}, $j=1, 2, 3, 4$ によっておきかえれば得られる．y_2 の h^4 のオーダの打切り精度の判定基準 A_{24}, B_{24}, C_{24} は，上述の A_4, B_4, C_4 の定義式において，b_j, $j=2, 4$ を b_{2j}, $j=2, 4$ でおきかえ，$b_1=b_3=0$ とおけば得られる．また，y_2 の h^5 のオーダの打切り精度の判定基準 A_{25}, B_{25}, C_{25} は，A_5, B_5, C_5 の定義式 (2.24)，(2.25)，(2.26) において，c_j, $j=1, 2, \cdots\cdots, 8$ を c_{2j}, $j=1, 2, \cdots\cdots, 8$ でおきかえれば得られる．

このようにして得られた公式の一例を下に示す．

$$(\text{公式IV})\left\{\begin{aligned} &k_1=hf(x_0,\ y_0)\\ &k_2=hf(x_0+0.001h,\ y_0+0.001\,k_1)\\ &k_3=hf(x_0+0.7\,h,\ y_0-244.3175262\,k_1\\ &\qquad+245.0175262\,k_2)\\ &k_4=hf(x_0+0.8\,h,\ y_0+136.1510201\,k_1\\ &\qquad-136.0025668\,k_2+0.6515466956\,k_3)\\ &y_1=y_0-23.52380952\,k_1+23.84358607\,k_2\\ &\qquad+0.6802234484\,k_3\\ &y_2=y_0-53.31547619\,k_1+53.71521268\,k_2\\ &\qquad+0.3392601675\,k_3+0.2610033375\,k_4\\ &T=y_1-y_2\end{aligned}\right.$$

（公式 IV）において，$A_{14}=3.05\times10^{-1}$, $B_{14}=9.44\times10^{-2}$, $C_{14}=3.54\times10^{-3}$, $B_{24}=6.25\times10^{-5}$, $A_{25}=7.52\times10^{-2}$, $B_{25}=2.70\times10^{-2}$, $C_{25}=1.69\times10^{-4}$ である．

第4表は，常微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5\,y}{1+x},\ y(0)=1$$

を（公式 IV）を用いて，$x=0$ から刻み幅 0.1 で1ステップ積分したときの数値解 y_1 と，その実際の誤差 ε，推定誤差 T および推定誤差と実際の誤差との比を示す．

第4表 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5\,y}{1+x}$, $y(0)=1$ の $x=0.1$ における数値解

y_1（数値解）	ε（実際の誤差）	T（推定誤差）	T/ε
1.6093414971	−0.0011685030	−0.0010419490	0.892

4.4 5個の関数値を使用する方法（$m=5$ の場合）

公式の一般形は，

$$\left\{\begin{aligned} &k_i=hf\left(x_0+\alpha_ih,\ y_0+\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}k_j\right)\\ &\qquad\qquad(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) &&(4.4.1)\\ &y_1=y_0+\sum_{i=2}^{5}\nu_ik_i &&(4.4.2)\\ &y_2=y_0+\sum_{i=1}^{5}\mu_ik_i &&(4.4.3)\\ &T=y_1-y_2 &&(4.4.4)\end{aligned}\right.$$

ここで $\alpha_i, \beta_{ij}, \nu_i, \mu_i$ は定数で，特に $\alpha_1=\beta_{10}=0$ である．また y_1 は積分公式，T は y_1 の打切り誤差の推定値である．(4.4.2) を

$$y_1=y_0+\sum_{i=1}^{4}\nu_i k_i \tag{4.4.5}$$

でおきかえれば別の型の公式を得るが，ここでは扱わない．

あとの必要のために k_5 の展開を求めれば，

$$\begin{aligned}
k_5=h\Big\{&f+hD_4f+h^2f_y\Big[\beta_{52}\Big\{D_1f+\frac{h}{2!}D_1^2f+\frac{h^2}{3!}D_1^3f\\
&+\cdots\cdots\Big\}+\beta_{53}\Big\{D_2f+\frac{h}{2}(D_2^2f+2\beta_{32}f_yD_1f)\\
&+\frac{h^2}{3!}D_2^3f+\frac{h^2}{2!}\beta_{32}f_yD_1^2f+h^2\beta_{32}D_1fD_2f_y\\
&+\cdots\cdots\Big\}+\beta_{54}\Big\{D_3f+hf_y\Big[\beta_{42}\Big(D_1f+\frac{h}{2!}D_1^2f\\
&+\cdots\cdots\Big)+\beta_{43}\Big(D_2f+h\beta_{32}f_yD_1f+\frac{h}{2}D_2^2f\\
&+\cdots\cdots\Big)\Big]+\frac{1}{2!}(hD_3^2f+2h^2D_3f_y[\beta_{42}D_1f\\
&+\beta_{43}D_2f+\cdots\cdots]+\cdots\cdots)+\frac{1}{3!}(h^2D_3^3f+\cdots\cdots)\\
&+\cdots\cdots\Big\}\Big]+\frac{1}{2!}\Big(h^2D_4^2f+2h^3D_4f_y\Big[\beta_{52}\Big(D_1f\\
&+\frac{h}{2!}D_1^2f+\cdots\cdots\Big)+\beta_{53}\Big(D_2f+\frac{h}{2}[D_2^2f\\
&+2\beta_{32}f_yD_1f]+\cdots\cdots\Big)+\beta_{54}\Big(D_3f+hf_y[\beta_{42}D_1f\\
&+\beta_{43}D_2f+\cdots\cdots]+\frac{1}{2!}hD_3^2f+\cdots\cdots\Big)\Big]\\
&+h^4f_{yy}[\beta_{52}^2(D_1f)^2+2\beta_{52}\beta_{53}D_1fD_2f\\
&+\beta_{53}^2(D_2f)^2+\beta_{54}^2(D_3f)^2+2\beta_{53}\beta_{54}D_2fD_3f\\
&+2\beta_{52}\beta_{54}D_1fD_3f+\cdots\cdots]+\cdots\cdots\Big)+\frac{h^3D_4^3f}{3!}\\
&+\frac{1}{2!}h^4D_4^2f_y[\beta_{52}D_1f+\beta_{53}D_2f+\beta_{54}D_3f+\cdots\cdots]\\
&+\cdots\cdots+\frac{h^4D_4^4f}{4!}+\cdots\cdots\Big\}_0
\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

ここで，$D_4=\alpha_5\dfrac{\partial}{\partial x}+(\beta_{51}+\beta_{52}+\beta_{53}+\beta_{54})f_0\dfrac{\partial}{\partial y}$ である．

y_1, y_2 を，(4.2.7)，(4.2.8)，(4.3.20) および(4.4.6) を用いて，点 (x_0, y_0) に関してテイラー級数に展開し，解のテイラー展開と前者は h^4 の項まで，後者は h^5 の項まで完全に一致するという条件から，つぎの (A)，(B) 二組の方程式群を得る[9]．

(A)

$$\sum_{i=2}^{5}\nu_i=1 \tag{4.4.7}$$

$$\sum_{i=2}^{5}\nu_i\alpha_i=1/2 \tag{4.4.8}$$

$$\sum_{i=2}^{5}\nu_i\alpha_i^2=1/3 \tag{4.4.9}$$

$$\sum_{i=2}^{5}\nu_i\alpha_i^3=1/4 \tag{4.4.10}$$

$$\nu_3\alpha_2\beta_{32}+\nu_4(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})+\nu_5(\alpha_2\beta_{52}+\alpha_3\beta_{53}+\alpha_4\beta_{54})=1/6 \tag{4.4.11}$$

$$\nu_3\alpha_2^2\beta_{32}+\nu_4(\alpha_2^2\beta_{42}+\alpha_3^2\beta_{43})+\nu_5(\alpha_2^2\beta_{52}+\alpha_3^2\beta_{53}+\alpha_4^2\beta_{54})=1/12 \tag{4.4.12}$$

$$\nu_4\alpha_2\beta_{32}\beta_{43}+\nu_5(\alpha_2\beta_{32}\beta_{53}+\alpha_2\beta_{42}\beta_{54}+\alpha_3\beta_{43}\beta_{54})=1/24 \tag{4.4.13}$$

$$\nu_3\alpha_2\alpha_3\beta_{32}+\nu_4(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})\alpha_4+\nu_5(\alpha_2\beta_{52}+\alpha_3\beta_{53}+\alpha_4\beta_{54})\alpha_5=1/8 \tag{4.4.14}$$

(B)

$$\sum_{i=1}^{5}\mu_i=1 \tag{4.4.15}$$

$$\sum_{i=2}^{5}\mu_i\alpha_i=1/2 \tag{4.4.16}$$

$$\sum_{i=2}^{5}\mu_i\alpha_i^2=1/3 \tag{4.4.17}$$

$$\sum_{i=2}^{5}\mu_i\alpha_i^3=1/4 \tag{4.4.18}$$

$$\sum_{i=2}^{5}\mu_i\alpha_i^4=1/5 \tag{4.4.19}$$

$$\mu_3\alpha_2\beta_{32}+\mu_4(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})+\mu_5(\alpha_2\beta_{52}+\alpha_3\beta_{53}+\alpha_4\beta_{54})=1/6 \tag{4.4.20}$$

$$\mu_3\alpha_2^2\beta_{32}+\mu_4(\alpha_2^2\beta_{42}+\alpha_3^2\beta_{43})+\mu_5(\alpha_2^2\beta_{52}+\alpha_3^2\beta_{53}+\alpha_4^2\beta_{54})=1/12 \tag{4.4.21}$$

$$\mu_4\alpha_2\beta_{32}\beta_{43}+\mu_5(\alpha_2\beta_{32}\beta_{53}+\alpha_2\beta_{42}\beta_{54}+\alpha_3\beta_{43}\beta_{54})=1/24 \tag{4.4.22}$$

$$\mu_3\alpha_2\alpha_3\beta_{32}+\mu_4(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})\alpha_4+\mu_5(\alpha_2\beta_{52}+\alpha_3\beta_{53}+\alpha_4\beta_{54})\alpha_5=1/8 \tag{4.4.23}$$

$$\mu_3\alpha_2\alpha_3^2\beta_{32}+\mu_4(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})\alpha_4^2+\mu_5(\alpha_2\beta_{52}+\alpha_3\beta_{53}+\alpha_4\beta_{54})\alpha_5^2=1/10 \tag{4.4.24}$$

$$\mu_4\alpha_2^2\beta_{32}\beta_{43}+\mu_5(\alpha_2^2\beta_{32}\beta_{53}+\alpha_2^2\beta_{42}\beta_{54}+\alpha_3^2\beta_{43}\beta_{54})=1/60 \tag{4.4.25}$$

$$\mu_3\alpha_2^2\alpha_3\beta_{32}+\mu_4(\alpha_2^2\beta_{42}+\alpha_3^2\beta_{43})\alpha_4+\mu_5(\alpha_2^2\beta_{52}+\alpha_3^2\beta_{53}+\alpha_4^2\beta_{54})\alpha_5=1/15 \tag{4.4.26}$$

$$\mu_5\alpha_2\beta_{32}\beta_{43}\beta_{54}=1/120 \tag{4.4.27}$$

$$\mu_3\alpha_2^2\beta_{32}^2+\mu_4(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})^2+\mu_5(\alpha_2\beta_{52}+\alpha_3\beta_{53}+\alpha_4\beta_{54})^2=1/20 \tag{4.4.28}$$

$$\mu_3\alpha_2^3\beta_{32}+\mu_4(\alpha_2^3\beta_{42}+\alpha_3^3\beta_{43})+\mu_5(\alpha_2^3\beta_{52}+\alpha_3^3\beta_{53}+\alpha_4^3\beta_{54})=1/20 \tag{4.4.29}$$

$$\mu_4\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)\beta_{42}\beta_{43}+\mu_5\{\alpha_2(\alpha_3+\alpha_5)\beta_{32}\beta_{53}+(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})(\alpha_4+\alpha_5)\beta_{54}\}=7/120 \tag{4.4.30}$$

方程式群 (B) において，式 (4.4.15)～(4.4.25) を $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ をパラメータとして解けば

(1) $\mu_2=\Delta_2/\Delta$　(2) $\mu_3=\Delta_3/\Delta$　(3) $\mu_4=\Delta_4/\Delta$

(4) $\mu_5=\Delta_5/\Delta$

ここで Δ, Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5 は，次式によって定義される行列式である．

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 & \alpha_5^2\\ \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \alpha_4^3 & \alpha_5^3\\ \alpha_2^4 & \alpha_3^4 & \alpha_4^4 & \alpha_5^4\end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1/2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\\ 1/3 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 & \alpha_5^2\\ 1/4 & \alpha_3^3 & \alpha_4^3 & \alpha_5^3\\ 1/5 & \alpha_3^4 & \alpha_4^4 & \alpha_5^4\end{vmatrix},$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}\alpha_2 & 1/2 & \alpha_4 & \alpha_5\\ \alpha_2^2 & 1/3 & \alpha_4^2 & \alpha_5^2\\ \alpha_2^3 & 1/4 & \alpha_4^3 & \alpha_5^3\\ \alpha_2^4 & 1/5 & \alpha_4^4 & \alpha_5^4\end{vmatrix},\quad \Delta_4=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3 & 1/2 & \alpha_5\\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & 1/3 & \alpha_5^2\\ \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & 1/4 & \alpha_5^3\\ \alpha_2^4 & \alpha_3^4 & 1/5 & \alpha_5^4\end{vmatrix},$$

$$\Delta_5=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 1/2\\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 & 1/3\\ \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \alpha_4^3 & 1/4\\ \alpha_2^4 & \alpha_3^4 & \alpha_4^4 & 1/5\end{vmatrix}$$

(5) $$\beta_{43}=\frac{\frac{1}{12}\alpha_5-\frac{1}{6}\alpha_2\alpha_5+\frac{1}{8}\alpha_2-\frac{1}{15}}{\mu_4\alpha_3(\alpha_5-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_2)}$$

(6) $$\beta_{42}=\frac{\left(\frac{1}{4}\alpha_5-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\alpha_3-\frac{1}{3}\alpha_4-\frac{1}{2}\alpha_2\right)}{\mu_4\alpha_2(\alpha_3-\alpha_2)}* \quad *\frac{+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\alpha_5-\frac{1}{4}\right)(\alpha_2\alpha_4-\alpha_3^2)}{(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_5-\alpha_4)}$$

(7) β_{32}
$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\alpha_5-\frac{1}{4}\right)-\mu_4(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})(\alpha_5-\alpha_4)}{\mu_3\alpha_2(\alpha_5-\alpha_3)}$$

(8) $$\beta_{53}=\frac{D_2+D_3}{D_1}$$

ここで

$$D_1=\mu_5\{\alpha_2\alpha_4\beta_{32}(\alpha_2-\alpha_4)+\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})\}$$

$$D_2=(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})\left\{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-\alpha_2\right)+\mu_4\alpha_3(\alpha_2-\alpha_3)\beta_{43}\right\}$$

$$D_3=\alpha_4(\alpha_2-\alpha_4)\left(\frac{1}{24}-\mu_4\alpha_2\beta_{32}\beta_{43}\right)$$

である．

(9) $$\beta_{54}=\frac{1/24-\alpha_2\beta_{32}(\mu_4\beta_{43}+\mu_5\beta_{53})}{\mu_5(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})}$$

(10) $$\beta_{52}=1/\alpha_2[1/\mu_5\{1/6-\mu_3\alpha_2\beta_{32}-\mu_4(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43})\}-\alpha_3\beta_{53}-\alpha_4\beta_{54}]$$

(11) $\mu_1=1-(\mu_2+\mu_3+\mu_4+\mu_5)$

(12) $\beta_{21}=\alpha_2$

(13) $\beta_{31}=\alpha_3-\beta_{32}$

(14) $\beta_{41}=\alpha_4-(\beta_{42}+\beta_{43})$

(15) $\beta_{51}=\alpha_5-(\beta_{52}+\beta_{53}+\beta_{54})$

いま α_2, α_3, α_4 および α_5 を上の (1)～(15) 式の分母を0にしないよう任意に選び，同じ諸式にしたがって他の係数を決定する．そのとき得られる各係数の組に対して，y_2 および解のテイラー展開は，関数 f に無関係に h^4 以下の項では完全に，h^5 の項については8項中3項までが一致する．

この場合，y_2 の打切り誤差 E_2 およびその打切り精度の判定基準 A_{25}, B_{25}, C_{25} は，それぞれ式 (2.7) および (2.24), (2.25), (2.26) において，$b_1=b_2=b_3=b_4=c_1=c_2=c_4=0$ とおけば得られる．ここで他の係数 c_i, $i=3$, 5, 6, 7, 8 は，**2**において定義されるものである．

つぎに方程式群 (A) の式 (4.4.7), (4.4.8), (4.4.9) および (4.4.11) の4式を，α_2, α_3, α_4, α_5 およびそれらを前掲の式 (1)～(15) に代入して得られる諸係数を用いて解けば，

(16) $\nu_2=\Delta_2'/\Delta'$,　(17) $\nu_3=\Delta_3'/\Delta'$,

(18) $\nu_4=\Delta_4'/\Delta'$,　(19) $\nu_5=\Delta_5'/\Delta'$

ここで

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 & \alpha_5^2\\ 0 & \alpha_2\beta_{32} & \alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43} & \alpha_2\beta_{52}+\alpha_3\beta_{53}+\alpha_4\beta_{54}\end{vmatrix}$$

$$\Delta_2'=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1/2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\\ 1/3 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 & \alpha_5^2\\ 1/6 & \alpha_2\beta_{32} & \alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43} & \alpha_2\beta_{52}+\alpha_3\beta_{53}+\alpha_4\beta_{54}\end{vmatrix}$$

$$\Delta_3'=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ \alpha_2 & 1/2 & \alpha_4 & \alpha_5\\ \alpha_2^2 & 1/3 & \alpha_4^2 & \alpha_5^2\\ 0 & 1/6 & \alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43} & \alpha_2\beta_{52}+\alpha_3\beta_{53}+\alpha_4\beta_{54}\end{vmatrix}$$

$$\Delta_4'=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1/2 & \alpha_5\\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & 1/3 & \alpha_5^2\\ 0 & \alpha_2\beta_{32} & 1/6 & \alpha_2\beta_{52}+\alpha_3\beta_{53}+\alpha_4\beta_{54}\end{vmatrix}$$

$$\Delta_5'=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 1/2\\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 & 1/3\\ 0 & \alpha_2\beta_{32} & \alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43} & 1/6\end{vmatrix}$$

である．

いま，α_2, α_3, α_4 および α_5 を任意に選び，式 (1)～(19) を用いて各係数を定めれば，y_1 は 3 rd order

の精度をもつ．そして y_1 の打切り誤差 E_1 は式（2.7）で与えられる．ただし，式（2.9）～（2.20）によって与えられる b_i, c_j $(i=1, 2, 3, 4, j=1, 2, \cdots\cdots, 8)$ は，各 μ_i $(i=2, 3, 4, 5)$ を ν_i $(i=2, 3, 4, 5)$ によっておきかえたものにされなければならない．y_1 の打切り精度の判定基準は，式（2.21）～（2.26）で与えられる $A_4, B_4, C_4, A_5, B_5, C_5$ であるが，これが特に積分公式 y_1 に関するものであることをあらわすために，$A_{14}, B_{14}, C_{14}, A_{15}, B_{15}, C_{15}$ を用いる．

係数探索は，つぎの要領でなされた．

（1） パラメータの組 $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ の各要素を，ある範囲において一定間隔で動かすときに得られるすべての4次元格子点を定める．

（2） 上の各パラメータの組 $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ に対して，式（1）～（15）により y_2 のすべての係数を決定する（そのとき，それらの係数に対して，当然 y_2 は 4 th order 法になる）．また，それらの各係数の組に対して，A_{25}, B_{25}, C_{25} の値を計算する．

（3）（1）におけるおびただしい数におよぶパラメータの組の中から，A_{25}, B_{25}, C_{25} を十分小さくする．したがって y_2 がほぼ 5 th order の精度をもつパラメータの組を選び，それらに対応する係数群を知る（以上（1），（2），（3）の段階は，論文 9．に詳しい）．

（4）（3）において得られた係数群にふくまれる各係数の組に対して，式（16），（17），（18）および（19）から残りの係数を計算すれば，y_1 におけるすべての係数が定められる（このとき，y_1 はもちろん，3 rd order 法である）．これらの各係数の組に対して，$A_{14}, B_{14}, C_{14}, A_{15}, B_{15}, C_{15}$ を計算する．

（5）（4）において得られた係数群の中から，それぞれ特徴をもつつぎの三つの型の係数を選んだ．

(a) A_{14}, B_{14}, C_{14} が十分小さく，A_{15}, B_{15}, C_{15} が余り小さくないもの．(b) A_{14}, B_{14}, C_{14} がかなり小さく，A_{15}, B_{15}, C_{15} が余り小さくないもの．(c) A_{14}, B_{14}, C_{14} が小さく，A_{15}, B_{15}, C_{15} が余り小さくないもの．

観察によれば y_1 において，一般に，h^4 のオーダの判定基準の小さい係数群は，h^5 のオーダのそれも小さい．

（公式 V），（公式 VI）および（公式 VII）が，上述の（a），（b），（c）に対応するものである．

（公式V）
$$
\left\{
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0,\ y_0)\\
k_2 &= hf(x_0+0.0031\,h,\ y_0+0.0031\,k_1)\\
k_3 &= hf(x_0+0.402\,h,\ y_0-25.66412331\,k_1 +26.06612331\,k_2)\\
k_4 &= hf(x_0+1.0005\,h,\ y_0+321.3722438\,k_1 -324.1161348\,k_2+3.744391046\,k_3)\\
k_5 &= hf(x_0+h,\ y_0+319.9266520\,k_1 -322.6578129\,k_2+3.730663566\,k_3 +0.0004973349184\,k_4)\\
y_1 &= y_0+0.1276529869\,k_2+0.5774104702\,k_3 -54.90255223\,k_4+55.19748877k_5\\
y_2 &= y_0-0.001106906558\,k_1 +0.1289088032\,k_2+0.5770159269\,k_3 -55.08439267\,k_4+55.37957484\,k_5\\
T &= y_1-y_2\\
&= 0.001106906558\,k_1-0.001255816290\,k_2 +0.00039454334\,k_3-0.1818404398\,k_4 -0.1820860734\,k_5
\end{aligned}
\right.
$$

（公式VI）
$$
\left\{
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0,\ y_0)\\
k_2 &= hf(x_0-0.0025\,h,\ y_0-0.0025\,k_1)\\
k_3 &= hf(x_0+0.3985\,h,\ y_0+32.15974180\,k_1 -31.76124180\,k_2)\\
k_4 &= hf(x_0+1.0005\,h,\ y_0-402.9114034\,k_1 +400.1456441\,k_2+3.766259273\,k_3)\\
k_5 &= hf(x_0+h,\ y_0-401.1095721\,k_1 +398.3565430\,k_2+3.752531702\,k_3 +0.0004973503641\,k_4)\\
y_1 &= y_0+0.1216605083\,k_2+0.5834052183\,k_3 -54.23420321\,k_4+54.52913749\,k_5\\
y_2 &= y_0-0.009699144572\,k_1 +0.1323963467\,k_2+0.5803923412\,k_3 -55.73162758\,k_4+56.02853803\,k_5\\
T &= y_1-y_2\\
&= 0.009699144572\,k_1-0.01073583832\,k_2 +0.003012877023\,k_3-1.497424364\,k_4 +1.499400548\,k_5
\end{aligned}
\right.
$$

（公式VII）
$$
\left\{
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0,\ y_0)\\
k_2 &= hf(x_0-0.0023\,h,\ y_0-0.0023\,k_1)\\
k_3 &= hf(x_0+0.401\,h,\ y_0+35.35729065\,k_1 -34.95629065\,k_2)\\
k_4 &= hf(x_0+1.0005\,h,\ y_0-439.0806052\,k_1 +436.3303196\,k_2+3.750785679\,k_3)\\
k_5 &= hf(x_0+h,\ y_0-437.1081827\,k_1 +434.3706279\,k_2+3.737057439\,k_3 +0.0004973393253\,k_4)\\
y_1 &= y_0+0.09505105246\,k_2 +0.6628977358\,k_3-15.30917274\,k_4 +15.55122395\,k_5\\
y_2 &= y_0+0.2068670840\,k_1
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\begin{cases}
\quad -0.08053328809\,k_2+0.5779923511\,k_3 \\
\quad -55.26802466\,k_4+55.56369851\,k_5 \\
T=y_1-y_2 \\
\quad =-0.2068670840\,k_1+0.1755843406\,k_2 \\
\quad +0.08490538469\,k_3-39.95885192\,k_4 \\
\quad -40.01247456\,k_5
\end{cases}
$$

第5表は，前述の尺度を用いて測った（公式 V），（公式 VI）および（公式 VII）の精度である．（公式V）は，積分公式の精度はよいが誤差評価能力においてやや欠け，（公式 VII）は，誤差評価の精度は高いが積分公式の精度低く，非能率である．（公式 VI）は，両者の中間にあり，むしろ望ましいものといえよう．

第5表　（公式V），（公式VI），（公式VII）の打切り精度

公　式	i	A_{i4}	B_{i4}	C_{i4}	A_{i5}	B_{i5}	C_{i5}
（公式V）	1	6.67×10^{-4}	1.99×10^{-4}	1.41×10^{-8}	1.76×10^{-8}	3.35×10^{-4}	2.81×10^{-6}
	2	—	—	—	9.76×10^{-8}	3.25×10^{-8}	5.28×10^{-16}
（公式VI）	1	5.58×10^{-8}	1.65×10^{-8}	9.65×10^{-7}	1.45×10^{-2}	2.76×10^{-8}	1.88×10^{-6}
	2	—	—	—	7.76×10^{-8}	2.58×10^{-8}	3.34×10^{-16}
（公式VII）	1	1.48×10^{-1}	4.41×10^{-2}	6.94×10^{-4}	3.89×10^{-1}	1.37×10^{-1}	7.39×10^{-2}
	2	—	—	—	7.14×10^{-8}	2.38×10^{-8}	2.83×10^{-16}

例題を示そう．

常微方程式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3}x^2y^2,\ y(2)=1$$

を，$x=2.0$ から刻み幅 $h=0.1$ で1ステップ積分した場合を**第6表**に示す．表中，第1行は数値解 y_1，第2行は真の誤差，第3行は打切り誤差の推定値をあらわし，第 2, 3, 4, 5, 6 列は，それぞれ（公式 V），（公式 VI），（公式 VII），Kutta-Merson Process および Ceschino の公式を使用したときの結果を示す．

第6表　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{3}x^2y^2,\ y(2)=1$ の $x=2.1$ における数値解

公　　式	(公式 V)	(公式 VI)	(公式 VII)	Kutta-Merson	Ceschino
y_1	0.87710757	0.87710823	0.87712818	0.87710774	0.87711650
$10^8\times$(真の誤差)	8	74	2069	25	901
$10^8\times$(推定誤差)	10	77	2075	217	860

同様にして，常微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=1-y^2,\ y(0)=0$$

を，同じ各種の公式を用いて，$x=0.0$ から刻み幅 $h=0.1$ で1ステップ積分すれば，**第7表**が得られる．

第7表　$\dfrac{dy}{dx}=1-y^2,\ y(0)=0$ の $x=0.1$ における数値解

公　　式	(公式 V)	(公式 VI)	(公式 VII)	Ktta-Merson	Ceschino
y_1	0.099667900	0.099667900	0.099668900	0.099668045	0.099667410
$10^9\times$(真の誤差)	−95	−95	905	50	−585
$10^9\times$(推定誤差)	−100	−100	900	−150	−630

これらの例題は，著者の上述の主張を裏付ける．

5.　結　　び

Kutta-Merson Process や Ceschino の方法と，著者の提案する方法との根本的なちがいは，前者が条件式のもつ自由度を積分公式を作る手続きをなくすることに費したのに対して，後者が同じ自由度を積分公式の精度や誤差評価能力を高めることに使用した点であろう．

著者の方法は，関数系が複雑になり，積分公式を作る手続きが全計算量に対して占める割合が小になればなるほど有効性を増すであろう．

Kutta-Merson Process や Ceschino の方法のような，積分公式を作る手続きを要しないものの最適化については別の機会に譲る．$f(x,y)\equiv f(x)$ の場合は紙面の都合で割愛した．

最後に本研究をまとめるに当たって，懇切な御指導を賜られた東京大学森口繁一教授，**4.3** においてのべられた部分の計算に便宜と協力を惜しまれなかった富士電機電算研究室長吉江充氏，ならびに同室における著者の友人多田利久氏，常に身辺にあってこの研究を助けた山梨大学山下茂の諸氏に心から感謝致します．

参 考 文 献

1) Merson, R.H.: An Operational Method for Study of Integration Process, Proceedings of Symposium on Data Processing, Weapons Research Establishment, Salisbury, South Australia. (1957)

2) Ceschino F.: Evaluation de L'erreur par pas les probrèms Differentiels, Chiffres, 5 (1962)

3) 藤田良子: Runge-Kutta-Merson による常微分方程式の数値解法，東京大学生産研究所所報，Vol. 16, No. 3 (1964)

4) Scraton R.E.: Estimation of the Truncation Error in Runge-Kutta and Allied Processes, Computer Journal, January 1965, Vol 7, No. 3 (1965)
5) Lotkin M.: On the Accuracy of Runge-Kutta's Methods, MTAC, Vol. 5 (1951)
6) Ralston A.: Runge-Kutta Methods with Minimum Error Bounds, Mathematics of Computation, October, Vol. 16, No. 80 (1962)
7) T.E. Hull and R.L. Johnston: Optimum Runge-Kutta Methods, Mathematics of Computation, Vol. 18, No. 86 (1964)
8) Romanelli M.J.: Runge-Kutta Methods for the Solution of Ordinary Differential Equations, pp. 110～120, in Mathematical Methods for Digital Computers, A. Ralston and H.S. Wilf (eds). John wiley & Sons, Inc., New York (1960)
9) 田中正次: 5個の関数値を使用する Runge-Kutta 公式について, 情報処理 Vol. 7, No. 4 (1966)

(昭和42年6月5日受付)