二人プレイヤーのアイテム入札による 組合せオークションのナッシュ均衡

梅田 博之^{1,a)} 浅野 孝夫^{1,b)}

概要: 二人プレイヤーのアイテム入札による組合せオークションのナッシュ均衡を議論する。具体的には、評価関数が対称的で劣加法性を満たすときに、ナッシュ均衡が存在するための必要十分条件を与える。これからナッシュ均衡が存在するかどうかを判定する効率的なアルゴリズムも得られることになる。

キーワード: ナッシュ均衡, 組合せオークション, 第二価格オークション, 劣加法性, 無秩序の対価

Nash Equilibriums in Combinatorial Auctions with Item Bidding by Two Players

Abstract: We discuss Nash equilibrium in a combinatorial auction with item bidding by two players. Specifically, we give a characterization for the existence of Nash equilibrium in such a combinatorial auction when valuations by two players satisfy symmetric and subadditive properties. By this characterization, we can obtain an efficient algorithm for deciding whether a Nash equilibrium exists.

Keywords: Nash Equilibrium, combinatorial auction, second-price auction, subadditivity, price of anarchy

1. はじめに

オークション理論 [5] の一部である組合せオークション [2] はその豊富な記述力が魅力である。その中で代表的なものが VCG メカニズムである。これは真の評価値を入札額として申告するのが支配戦略であり、さらに総評価値を最大にするようなアイテムの配分を効果的に実現するという強力なものである。しかし、メカニズムが複雑なため、真の評価値を入札することが支配戦略であるということを得させることが困難である。そのため現実に行われている方式は一般にはこれとは違う方式である [3]。さらに、評価値の個数がアイテム数の指数関数になると計算困難となるため、効果的なアイテムの配分を実現する近似アルゴリズムが活発に研究されている。その方向性としては、評価関数に粗代替財制約 [4]、劣モジュラー性制約 [6]、劣加法性制約 (この制約が三つの中で 1 番弱い制約 [6]) などの制約を

課すのが一般的である。

Bhawalkar and Roughgarden [1] のアイテム入札による組合せオークションは、各アイテムに対して、第二価格オークションを行うという単純なものである。評価関数には劣加法性制約が、入札には超過入札なし制約が課されている。これらはインターネットオークションへの適用を意識したものである。Bhawalkar and Roughgarden [1] では無秩序の代価が最大 2 であることが示されている。一方、ナッシュ均衡については成立しない例が挙げられているものの、成立条件について深くは言及されていない。したがって、これを求めることは非常に興味深いと思われる。

そこで本論文ではさらに対称性制約 [7] を加えて、プレイヤー数が 2 のときに、ナッシュ均衡が存在するための必要十分条件を与える。さらに、それに基づいて、ナッシュ均衡が存在するかどうかを判定する効率的なアルゴリズムが得られることを示す。

2. 組合せオークションとアイテム入札

本節では組合せオークションとアイテム入札に関する基本的な定義といくつかの命題を与える。

¹ 中央大学 東京都文京区春日 1-13-27
Chuo University, Bunkyo-ku, Tokyo, 112-8551
^{a)} humeda@educ.ise.chuo-u.ac.jp
^{b)} asano@ise.chuo-u.ac.jp

n 人のプレイヤーの集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ と m 個のアイテムの集合 $M = \{1, 2, \dots, m\}$ および M の各部分集合 S に対する各プレイヤー $i \in N$ の非負の評価 $f_i(S)$ を表す評価関数 $f_i: 2^M \rightarrow \mathbf{R}_+$ からなる組合せオークションを考える。まず、アイテム入札について定義する。各プレイヤー $i \in N$ の各アイテム $j \in M$ に対する入札額は非負であるとし、 $b_i(j)$ と表記する。すると、各プレイヤー $i \in N$ の入札は、 $b_i = (b_i(1), b_i(2), \dots, b_i(m)) \in \mathbf{R}_+^m$ と書ける。そして、 N の全プレイヤーの入札を $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ と表記する。入札の実行可能性は、以下のように定義される。

定義 2.1 プレイヤー $i \in N$ の入札 b_i は、アイテムの部分集合 $S \subseteq M$ に対して $\sum_{j \in S} b_i(j) > f_i(S)$ であるとき、 S に対して超過入札であると呼ばれる。入札 b_i は、どの部分集合 $S \subseteq M$ に対しても超過入札でないとき(すなわち、すべての $S \subseteq M$ に対して $\sum_{j \in S} b_i(j) \leq f_i(S)$ であるとき)、実行可能であると呼ばれる。さらに、全プレイヤーの入札 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ は、すべてのプレイヤー $i \in N$ の入札 b_i が実行可能であるとき、実行可能であると呼ばれる。□

次に、アイテムの落札と価格(支払い額)について定義する。アイテム入札の組合せオークションでは、アイテムごとに第二価格オークションが行われると考える。したがって、全プレイヤーの実行可能入札 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ において、アイテム $j \in M$ へのプレイヤー $i \in N$ の入札額 $b_i(j)$ が、他のすべてのプレイヤー $i' \in N - \{i\}$ の入札額 $b_{i'}(j)$ より真に大きいときには、プレイヤー $i \in N$ がアイテム $j \in M$ を落札する(したがって、プレイヤー $i \in N$ は、自身の入札額 $b_i(j)$ が最大となっているアイテム $j \in M$ 以外は落札できない)。このとき、アイテム $j \in M$ の価格 $price(j)$ は、他のすべてのプレイヤー $i' \in N - \{i\}$ の入札額 $b_{i'}(j)$ の最高入札額(プレイヤー全体では2番目に高い入札額)となる。すなわち、プレイヤー $i \in N$ がアイテム $j \in M$ を落札したときの支払い額は $price(j) = \max\{b_{i'}(j) \mid i' \in N - \{i\}\}$ (そのアイテムの価格)となる。

さらに、アイテム $j \in M$ に対して、すべてのプレイヤーの入札額が0のときには、アイテム j は誰にも落札されないと考える。問題は、あるアイテム $j \in M$ に対して入札額が正で、最大となるプレイヤーが二人以上いる場合である。このときには、アイテム $j \in M$ に対して最大の入札をしているプレイヤーのうちの一人だけがそのアイテム j を落札することになる(したがって、アイテム $j \in M$ に対して最大の入札をしているそれ以外のプレイヤーはアイテム $j \in M$ を落札できない)。もちろん、このときには、落札されたアイテム $j \in M$ の価格は最大の入札額になる。

全プレイヤーの実行可能入札 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ に対して、プレイヤー $i \in N$ の落札したアイテムの集合を $X_i(b)$ とする。すると上記の議論より、

$$X_i(b) \subseteq \{j \in M \mid b_i(j) = \max\{b_{i'}(j) \mid i' \in N\}\} \quad (1)$$

となる。このとき、プレイヤー $i \in N$ の利得は以下のように定義される。

定義 2.2 全プレイヤーの実行可能入札 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ に対して、プレイヤー $i \in N$ の落札するアイテムの集合を $X_i(b)$ とする。このとき、 $X_i(b)$ から得られるプレイヤー $i \in N$ の利得 $u_i(X_i(b))$ は、落札するアイテム集合に対する評価から落札するアイテムの価格の総和を引いた値の

$$u_i(X_i(b)) = f_i(X_i(b)) - \sum_{j \in X_i(b)} price(j) \quad (2)$$

と定義される。□

ナッシュ均衡は以下のように定義される。

定義 2.3 全プレイヤーの実行可能入札 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ に対して、プレイヤー $i \in N$ の落札するアイテムの集合を $X_i(b)$ とする。さらに、プレイヤー $i \in N$ のみが b_i を実行可能入札 b'_i に変えて得られる全プレイヤーの実行可能入札を b_i とする。すなわち、

$$b_i = (b_1, b_2, \dots, b_{i-1}b'_i, b_{i+1}, \dots, b_n)$$

とする。さらに、この入札 b_i でプレイヤー $i \in N$ の落札するアイテムの集合を $X_i(b_i)$ とする。このとき、どのプレイヤー $i \in N$ も b_i をどのような実行可能入札 b'_i に変えても、得られる利得が $u_i(X_i(b))$ より真に大きくなりえないとき、すなわち、すべてのプレイヤー i と上記のすべての実行可能入札 b_i (および落札集合 $X_i(b_i)$) に対して、

$$u_i(X_i(b)) \geq u_i(X_i(b_i))$$

が成立するとき、実行可能入札 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ はナッシュ均衡であると定義される。□

本論文では、評価関数に以下の制約を課すことにする。

仮定 2.1 すべてのプレイヤー $i \in N$ の評価関数 f_i は、以下の性質を満たすものとする。

1. (空集合) 空集合 $\emptyset$ に対して $f_i(\emptyset) = 0$ である。
2. (単調性) $S \subset T$ を満たすすべての $S, T \subseteq M$ に対して $f_i(S) \leq f_i(T)$ である。
3. (劣加法性) すべての $S, T \subseteq M$ に対して $f_i(S \cup T) \leq f_i(S) + f_i(T)$ である。
4. (対称性) $|S| = |T|$ を満たすすべての $S, T \subseteq M$ に対して $f_i(S) = f_i(T)$ である。□

定義 2.4 仮定 2.1 の f_i の対称性より、すべての $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ に対して、 $k = |S|$ となる任意の $S \subseteq M$ を

用いて $v_i(k) = f_i(S)$ と定義して, f_i は対称的な評価関数 $v_i : \{0, 1, 2, \dots, m\} \rightarrow \mathbf{R}_+$ として簡潔に表現できる. $\square$

対称的な評価関数 v_i を用いると, 仮定 2.1 の 1.~3. と定義 2.2 の利得は, 以下のように書ける.

定義 2.5 仮定 2.1 の 1.~3. は, 各プレイヤー $i \in N$ の対称的な評価関数 v_i を用いて以下のように書ける.

1. (空集合) $v_i(0) = 0$ である.
2. (単調性) $0 \leq k < k' \leq m$ を満たすすべての k, k' に対して $v_i(k) \leq v_i(k')$ である.
3. (劣加法性) $0 \leq k, k' \leq m$ を満たすすべての k, k' に対して $v_i(\min\{k+k', m\}) \leq v_i(k) + v_i(k')$ である. $\square$

定義 2.6 全プレイヤーの実行可能入札 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ に対して, プレイヤー $i \in N$ の落札するアイテムの集合を $X_i(\mathbf{b})$ とすると, プレイヤー $i \in N$ の利得 $u_i(X_i(\mathbf{b}))$ は,

$$u_i(X_i(\mathbf{b})) = v_i(|X_i(\mathbf{b})|) - \sum_{j \in X_i(\mathbf{b})} \text{price}(j) \quad (3)$$

と書ける. $\square$

以下では, 入札 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ の実行可能性の特徴付けを与えることにする. まず, k 個のアイテムに対する可能な入札額の和の最大値となる $w_i(k)$ の定義を与える.

定義 2.7 各プレイヤー $i \in N$ の定義 2.5 を満たす対称的な評価関数を v_i とする. このとき, 各プレイヤー $i \in N$ に対する関数 w_i をすべての $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対して,

$$w_i(k) = k \min \left\{ v_i(1), \frac{v_i(2)}{2}, \dots, \frac{v_i(k-1)}{k-1}, \frac{v_i(k)}{k} \right\} \quad (4)$$

として定義し, さらに $w_i(0) = 0$ と定義する. $\square$

命題 2.1 定義 2.5 の 1. と 2. を満たす対称的な評価関数 v_i と定義 2.7 で定義された関数 w_i に対して以下が成立する.

1. すべての $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ で $w_i(k) \leq v_i(k)$ である.
2. すべての $k \in \{2, 3, \dots, m\}$ に対して,

$$w_i(k) = k \min \left\{ \frac{w_i(k-1)}{k-1}, \frac{v_i(k)}{k} \right\} \quad (5)$$

である. したがって,

$$w_i(1) \geq \frac{w_i(2)}{2} \geq \dots \geq \frac{w_i(m)}{m}, \quad (6)$$

$$w_i(k) < v_i(k) \text{ ならば } w_i(k) = \frac{k}{k-1} w_i(k-1), \quad (7)$$

$$w_i(1) \leq w_i(2) \leq \dots \leq w_i(m) \quad (8)$$

が成立する.

証明: すべての $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対して, 定義より,

$$\frac{w_i(k)}{k} = \min \left\{ v_i(1), \frac{v_i(2)}{2}, \dots, \frac{v_i(k-1)}{k-1}, \frac{v_i(k)}{k} \right\} \leq \frac{v_i(k)}{k}$$

であり, $w_i(0) = v_i(0) = 0$ であるので, 1. は明らかである. 同様に, すべての $k \in \{2, 3, \dots, m\}$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{w_i(k)}{k} &= \min \left\{ v_i(1), \frac{v_i(2)}{2}, \dots, \frac{v_i(k-1)}{k-1}, \frac{v_i(k)}{k} \right\} \\ &= \min \left\{ \min \left\{ v_i(1), \frac{v_i(2)}{2}, \dots, \frac{v_i(k-1)}{k-1} \right\}, \frac{v_i(k)}{k} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{w_i(k-1)}{k-1}, \frac{v_i(k)}{k} \right\} \leq \frac{w_i(k-1)}{k-1} \end{aligned}$$

であるので, 式 (5) と式 (6) が得られる. したがって, $w_i(k) < v_i(k)$ ならば $w_i(k) = \frac{k}{k-1} w_i(k-1)$ となり, 式 (7) が得られる. さらに, すべての $k \in \{2, 3, \dots, m\}$ で, $w_i(k) = \frac{k}{k-1} w_i(k-1)$ あるいは $w_i(k) = v_i(k)$ であるので,

$$w_i(k) = w_i(k-1) + \frac{1}{k-1} w_i(k-1) \geq w_i(k-1),$$

あるいは v_i の単調性と 1. の $w_i(k-1) \leq v_i(k-1)$ より,

$$w_i(k) = v_i(k) \geq v_i(k-1) \geq w_i(k-1)$$

となり, 式 (8) が得られる. $\square$

以下の命題は, プレイヤー i の $w_i(k)$ が, 実際に, k 個のアイテムに対する実行可能な入札額の最大値であることを示している (証明は紙面の都合で省略する).

命題 2.2 定義 2.5 の 1. と 2. を満たす対称的な評価関数 v_i と定義 2.7 で定義された関数 w_i に対して, プレイヤー i の入札 $b_i = (b_i(1), b_i(2), \dots, b_i(m))$ は, $b_i(1) \leq b_i(2) \leq \dots \leq b_i(m)$ を満たすとする. このとき, $b_i = (b_i(1), b_i(2), \dots, b_i(m))$ が実行可能であるための必要十分条件は, すべての $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対して, $b_i = (b_i(1), b_i(2), \dots, b_i(m))$ の大きいほうの k 個の入札額の和が $w_i(k)$ 以下であること, すなわち, $\sum_{j=m-k+1}^m b_i(j) = b_i(m-k+1) + \dots + b_i(m) \leq w_i(k)$ が成立することである. $\square$

命題 2.2 を用いると, 以下の定理が得られる.

定理 2.1 定義 2.5 の 1. と 2. を満たす対称的な評価関数 v_i と定義 2.7 で定義された関数 w_i と全プレイヤーの任意の入札 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ に対して, 各プレイヤー $i \in N$ の入札 b_i は $M = \{1, 2, \dots, m\}$ 上の置換 π_i を用いて

$$b_i(\pi_i(1)) \leq b_i(\pi_i(2)) \leq \dots \leq b_i(\pi_i(m)) \quad (9)$$

と並べられているとする. すると, 入札 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ が実行可能であるための必要十分条件は, すべての $i \in N$ とすべての $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対して,

$$\sum_{j=m-k+1}^m b_i(\pi_i(j)) \leq w_i(k) \quad (10)$$

が成立することである. $\square$

3. 二人プレイヤーのアイテム入札による組合せオークションのナッシュ均衡の特徴付け

これ以降, 二人のプレイヤー $N = \{1, 2\}$ とアイテムの集合 $M = \{1, 2, \dots, m\}$ からなる組合せオークションに限定して議論する. さらに, 本論文の以下の議論では, v_i ($i \in N$) は定義 2.5 を満たす対称的な評価関数であり, w_i は定義 2.7 で定義された関数であるとする.

最初に, 二人のプレイヤーの実行可能入札 $b = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡であるための特徴付けを与える.

定義 3.1 二人のプレイヤーの実行可能入札 $b = (b_1, b_2)$ において, 各プレイヤー $i \in \{1, 2\}$ の落札するアイテムの集合を $X_i(b)$ とする. そして, $k_i = |X_i(b)|$ とする. さらに, M 上のある置換の π_1 と π_2 に対して,

$$b_1(\pi_1(1)) \leq b_1(\pi_1(2)) \leq \dots \leq b_1(\pi_1(m)), \quad (11)$$

$$b_2(\pi_2(1)) \leq b_2(\pi_2(2)) \leq \dots \leq b_2(\pi_2(m)) \quad (12)$$

であるとする. このとき, すべての $i, i' \in \{1, 2\}$ ($i \neq i'$) とすべての k, k' ($1 \leq k \leq m - k_i, 1 \leq k' \leq k_i$) に対して

$$v_i(k_i + k) - v_i(k_i) \leq \sum_{j=1}^k b_{i'}(\pi_{i'}(k_i + j)), \quad (13)$$

$$v_i(k_i - k') \leq v_i(k_i) - \sum_{j=0}^{k'-1} b_{i'}(\pi_{i'}(k_i - j)) \quad (14)$$

が成立するとき, $b = (b_1, b_2)$ は安定であると呼ばれる. □

この定義に基づいて, ナッシュ均衡を特徴づける以下の定理が得られる (証明は紙面の都合で省略する).

定理 3.1 二人のプレイヤーの実行可能入札 $b = (b_1, b_2)$ の落札集合対 $(X_1(b), X_2(b))$ がナッシュ均衡であるための必要十分条件は, $b = (b_1, b_2)$ が安定であることである. □

定理 2.1 と定理 3.1 から以下の系が得られる.

系 3.1 式 (11) と式 (12) を満たす入札 $b = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡であるかどうかは $O(m)$ 時間で判定できる. □

次に, ナッシュ均衡が存在するための特徴付けを与える. そこで, いくつかの補題を準備する.

補題 3.1 二人のプレイヤーの実行可能入札 $b = (b_1, b_2)$ が $M = \{1, 2, \dots, m\}$ 上の各 $i \in \{1, 2\}$ の置換 π_i を用いて,

$$b_i(\pi_i(1)) \leq b_i(\pi_i(2)) \leq \dots \leq b_i(\pi_i(m)) \quad (15)$$

と並べられているとする. このとき, 各 $i \in \{1, 2\}$ で, 任意の k ($1 \leq k \leq m$) と任意の k' ($1 \leq k' \leq k$) に対して, b_i

の大きい方の k 個の $b_i(\pi_i(m - k + 1)), \dots, b_i(\pi_i(m))$ のうちで, 小さい方の k' 個の和は,

$$\sum_{j=m-k+1}^{m-k+k'} b_i(\pi_i(j)) \leq \frac{k'}{k} w_i(k) \quad (16)$$

を満たす. さらに,

$$\begin{aligned} c_i(1) &= c_i(2) = \dots = c_i(m - k) = 0, \\ c_i(m - k + 1) &= \dots = c_i(m) = \frac{w_i(k)}{k} \end{aligned} \quad (17)$$

とすれば, $c_i = (c_i(1), c_i(2), \dots, c_i(m))$ はプレイヤー i の実行可能入札であり, 以下の等式を満たす.

$$\sum_{j=m-k+1}^{m-k+k'} c_i(j) = \frac{k'}{k} w_i(k). \quad (18)$$

証明: 式 (16) が成立せず, $\sum_{j=m-k+1}^{m-k+k'} b_i(\pi_i(j)) > \frac{k'}{k} w_i(k)$ となるような k ($1 \leq k \leq m$) と k' ($1 \leq k' \leq k$) が存在したと仮定してみる. すると, 式 (15) より, すべての $j' \geq m - k + k'$ で

$$b_i(\pi_i(j')) \geq b_i(\pi_i(m - k + k')) \geq \frac{1}{k'} \sum_{j=m-k+1}^{m-k+k'} b_i(\pi_i(j)) > \frac{w_i(k)}{k}$$

が成立する. したがって,

$$\begin{aligned} \sum_{j=m-k+1}^m b_i(\pi_i(j)) &= \sum_{j=m-k+1}^{m-k+k'} b_i(\pi_i(j)) + \sum_{j=m-k+k'+1}^m b_i(\pi_i(j)) \\ &> \frac{k'}{k} w_i(k) + \sum_{j=m-k+k'+1}^m b_i(\pi_i(j)) \\ &> \frac{k'}{k} w_i(k) + \sum_{j=m-k+k'+1}^m \frac{w_i(k)}{k} = w_i(k) \end{aligned}$$

となり,

$$\sum_{j=m-k+1}^m b_i(\pi_i(j)) > w_i(k)$$

が得られる. しかし, 定理 2.1 の式 (10) より, これは b_i が実行可能入札であるという仮定に反する. したがって, 式 (16) が成立することが得られた.

c_i が式 (18) を満たすことは, 定義からすぐに得られる. さらに, 命題 2.1 の式 (6) の $w_i(1) \geq \frac{w_i(2)}{2} \geq \dots \geq \frac{w_i(m)}{m}$ から, 任意の $k' \leq k$ で

$$\sum_{j=m-k'+1}^m c_i(j) = \frac{k'}{k} w_i(k) \leq w_i(k')$$

である. 一方, 任意の $k' > k$ では, $c_i(m - k' + 1) = c_i(m - k' + 2) = \dots = c_i(m - k) = 0$ であるので,

$$\sum_{j=m-k'+1}^m c_i(j) = \sum_{j=m-k+1}^m c_i(j) = w_i(k) \leq w_i(k')$$

である (不等式は命題 2.1 の式 (8) より得られる). したがって, 定理 2.1 の式 (10) より, c_i は実行可能である. □

補題 3.2 実行可能入札 $b = (b_1, b_2)$ に対して, 各プレイヤー $i \in \{1, 2\}$ の落札するアイテムの集合は $X_i(b)$ であり, $k_i = |X_i(b)|$ であるとする. すると,

$$X_1(b) \cap X_2(b) = \emptyset, \quad k_1 + k_2 \leq m$$

である (これは落札の定義より自明である). さらに, $M = \{1, 2, \dots, m\}$ 上の置換 π_1 と π_2 を用いて,

$$b_1(\pi_1(1)) \leq b_1(\pi_1(2)) \leq \dots \leq b_1(\pi_1(m)), \quad (19)$$

$$b_2(\pi_2(1)) \leq b_2(\pi_2(2)) \leq \dots \leq b_2(\pi_2(m)) \quad (20)$$

と並べられているとする. ただし, 式 (19) を満たす置換 π_1 が複数個存在するときには, そのような置換 π_1 で

$$X_2(b) \cap \{\pi_1(1), \pi_1(2), \dots, \pi_1(k_2)\} \quad (21)$$

の要素数が最大となるような置換を改めて π_1 とする. 同様に, 式 (20) を満たす π_2 が複数個存在するときには, そのような置換 π_2 で

$$X_1(b) \cap \{\pi_2(1), \pi_2(2), \dots, \pi_2(k_1)\} \quad (22)$$

の要素数が最大となるような置換を改めて π_2 とする. このとき, $b = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡であるならば,

$$X_1(b) = \{\pi_2(1), \pi_2(2), \dots, \pi_2(k_1)\}, \quad (23)$$

$$X_2(b) = \{\pi_1(1), \pi_1(2), \dots, \pi_1(k_2)\} \quad (24)$$

が成立する.

証明: $X_1(b) = \{\pi_2(1), \pi_2(2), \dots, \pi_2(k_1)\}$ でなかったと仮定して, $1 \leq j \leq k_1$ のある j に対して, $\pi_2(j) \notin X_1(b)$ であったとする. すると, $|X_1(b)| = k_1$ であるので, $k_1 + 1 \leq j' \leq m$ のある j' で $\pi_2(j') \in X_1(b)$ であることになる. このとき, $j < j'$ であるので, 式 (20) より, $b_2(\pi_2(j)) \leq b_2(\pi_2(j'))$ が成立する.

(i) $b_2(\pi_2(j)) = b_2(\pi_2(j'))$ のとき:

$$\pi_2'(j'') = \begin{cases} \pi_2(j) & (j'' = j' \text{ のとき}), \\ \pi_2(j') & (j'' = j \text{ のとき}), \\ \pi_2(j'') & (j'' \in M - \{j, j'\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

とすると, $b_2(\pi_2'(1)) \leq b_2(\pi_2'(2)) \leq \dots \leq b_2(\pi_2'(m))$ かつ

$$\begin{aligned} & |X_1(b) \cap \{\pi_2(1), \pi_2(2), \dots, \pi_2(k_1)\}| \\ &= |X_1(b) \cap \{\pi_2'(1), \pi_2'(2), \dots, \pi_2'(k_1)\}| - 1 \end{aligned}$$

となるので, π_2 の選び方に反する.

(ii) $b_2(\pi_2(j)) < b_2(\pi_2(j'))$ のとき: $\pi_2(j) \notin X_1(b)$ かつ $\pi_2(j') \in X_1(b)$ であるので,

$$b_1(\pi_2(j)) \leq b_2(\pi_2(j)) < b_2(\pi_2(j')) \leq b_1(\pi_2(j'))$$

が成立する. そこで,

$$b_1'(\pi_2(j'')) = \begin{cases} b_1(\pi_2(j)) & (j'' = j' \text{ のとき}), \\ b_1(\pi_2(j')) & (j'' = j \text{ のとき}), \\ b_1(\pi_2(j'')) & (j'' \in M - \{j, j'\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する. すると, $b_1' = (b_1'(1), b_1'(2), \dots, b_1'(m))$ はプレイヤー 1 の実行可能入札となり, 二人のプレイヤーの入札 $b_1 = (b_1', b_2)$ も実行可能入札となる. さらに, この入札 $b_1 = (b_1', b_2)$ において, プレイヤー 1 の落札する集合 $X_1(b_1)$ は, $b_1'(\pi_2(j)) = b_1(\pi_2(j')) \geq b_2(\pi_2(j')) > b_2(\pi_2(j))$ かつ $b_1'(\pi_2(j')) = b_1(\pi_2(j)) \leq b_2(\pi_2(j)) < b_2(\pi_2(j'))$ より,

$$X_1(b_1) = (X_1(b) - \{j'\}) \cup \{j\}$$

となる. したがって, それによる利得の差は

$$u_1(X_1(b_1)) - u_1(X_1(b)) = b_2(\pi_2(j')) - b_2(\pi_2(j)) > 0$$

となり, $b = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡であることに矛盾する.

以上の議論より, すべての $1 \leq j \leq k_1$ で $\pi_2(j) \in X_1(b)$ であり, 式 (23) の $X_1(b) = \{\pi_2(1), \pi_2(2), \dots, \pi_2(k_1)\}$ の成立することが得られた. 同様に, 式 (24) の $X_2(b) = \{\pi_1(1), \pi_1(2), \dots, \pi_1(k_2)\}$ も, 対称性から得られる. $\square$

補題 3.3 実行可能入札 $b = (b_1, b_2)$ において, 各プレイヤー $i \in \{1, 2\}$ の落札するアイテムの集合 $X_i(b)$ は $k_i = |X_i(b)|$ であり, $k_1 + k_2 < m$ であるとする. すなわち, 落札されないアイテムが存在するとする. このとき, $b = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡であるならば, すべてのアイテムが落札されるようなナッシュ均衡の実行可能入札 $c = (c_1, c_2)$ が存在する.

証明: 補題 3.2 より,

$$b_1(\pi_1(1)) \leq b_1(\pi_1(2)) \leq \dots \leq b_1(\pi_1(m)),$$

$$b_2(\pi_2(1)) \leq b_2(\pi_2(2)) \leq \dots \leq b_2(\pi_2(m))$$

と並べられていて,

$$X_1(b) = \{\pi_2(1), \pi_2(2), \dots, \pi_2(k_1)\},$$

$$X_2(b) = \{\pi_1(1), \pi_1(2), \dots, \pi_1(k_2)\},$$

$$X_1(b) \cap X_2(b) = \emptyset$$

であると仮定できる. さらに, 対称性から, π_2 はすべての $j \in \{1, 2, \dots, k_1\}$ で $\pi_2(j) = j$ であり, π_1 はすべての $j \in \{1, 2, \dots, k_2\}$ で $\pi_1(j) = m - j + 1$ であり,

$$\begin{aligned} b_1(m) &\leq b_1(m-1) \leq \dots \leq b_1(m-k_2+1) \\ &\leq b_1(\pi_1(k_2+1)) \leq \dots \leq b_1(\pi_1(m)), \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2(1) &\leq b_2(2) \leq \dots \leq b_2(k_1) \\ &\leq b_2(\pi_2(k_1+1)) \leq \dots \leq b_2(\pi_2(m)) \quad (26) \end{aligned}$$

と並べられていて,

$$X_1(\mathbf{b}) = \{1, 2, \dots, k_1\}, \quad (27)$$

$$X_2(\mathbf{b}) = \{m - k_2 + 1, m - k_2 + 2, \dots, m\} \quad (28)$$

であると仮定できる．さらに，落札されないアイテムの集合を $Y(\mathbf{b})$ とする．すると， $k_1 + k_2 < m$ であることから，

$$Y(\mathbf{b}) = M - (X_1(\mathbf{b}) \cup X_2(\mathbf{b})) = \{k_1 + 1, k_1 + 2, \dots, m - k_2\}$$

となる．すべての $j \in Y(\mathbf{b}) = \{k_1 + 1, k_1 + 2, \dots, m - k_2\}$ に対して，落札されていないことから $b_1(j) = b_2(j) = 0$ が得られる．したがって，式 (26) からすべての $j \in \{1, 2, \dots, k_1\}$ に対しても $b_2(j) = 0$ であり，式 (25) からすべての $j \in \{m - k_2 + 1, m - k_2 + 2, \dots, m\}$ に対しても $b_1(j) = 0$ であることになる．

以上をまとめると，以下が得られる．

$$\begin{aligned} b_1(m) &= b_1(m-1) = \dots = b_1(k_1+1) = 0 \\ &\leq b_1(\pi_1(m-k_1+1)) \leq \dots \leq b_1(\pi_1(m)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2(1) &= b_2(2) = \dots = b_2(m-k_2) = 0 \\ &\leq b_2(\pi_2(m-k_2+1)) \leq \dots \leq b_2(\pi_2(m)), \end{aligned}$$

$$X_1(\mathbf{b}) = \{1, 2, \dots, k_1\},$$

$$X_2(\mathbf{b}) = \{m - k_2 + 1, m - k_2 + 2, \dots, m\}.$$

したがって，入札 $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡であり，各 $i \in \{1, 2\}$ ($\{i, i'\} = \{1, 2\}$) で

$$\begin{aligned} u_i(X_i(\mathbf{b})) &= v_i(k_i) \leq v_i(k_i+1) \leq \dots \\ &\leq v_i(m - k_{i'}) = u_i(M - X_{i'}(\mathbf{b})) \end{aligned}$$

であることから，

$$v_1(k_1) = v_1(k_1+1) = \dots = v_1(m - k_2), \quad (29)$$

$$v_2(k_2) = v_2(k_2+1) = \dots = v_2(m - k_1) \quad (30)$$

も得られる．対称性から，さらに，すべての $j \in \{m - k_1 + 1, m - k_1 + 2, \dots, m\}$ で $\pi_1(j) = m - j + 1$ であり，すべての $j \in \{m - k_2 + 1, m - k_2 + 2, \dots, m\}$ で $\pi_2(j) = j$ であると仮定できる．以上をまとめると，以下が得られる．

$$\begin{aligned} b_1(m) &= b_1(m-1) = \dots = b_1(k_1+1) = 0 \\ &\leq b_1(k_1) \leq \dots \leq b_1(1), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} b_2(1) &= b_2(2) = \dots = b_2(m-k_2) = 0 \\ &\leq b_2(m-k_2+1) \leq \dots \leq b_2(m), \end{aligned} \quad (32)$$

$$X_1(\mathbf{b}) = \{1, 2, \dots, k_1\}, \quad (33)$$

$$X_2(\mathbf{b}) = \{m - k_2 + 1, m - k_2 + 2, \dots, m\}. \quad (34)$$

定義 2.7 で定義された関数 w_i を用いて，プレイヤー i の入札 $c_i = (c_i(1), c_i(2), \dots, c_i(m))$ を

$$\begin{aligned} c_1(1) &= c_1(2) = \dots = c_1(m - k_2) = \frac{w_1(m-k_2)}{m-k_2}, \quad (35) \\ c_1(m - k_2 + 1) &= \dots = c_1(m) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2(1) &= c_2(2) = \dots = c_2(m - k_2) = 0, \\ c_2(m - k_2 + 1) &= \dots = c_2(m) = \frac{w_2(k_2)}{k_2} \end{aligned} \quad (36)$$

と定義して，二人のプレイヤーの入札 $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ を考える．この入札 $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ が実行可能であることは，補題 3.1 を用いて得られる．以下では，この入札 $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ がナッシュ均衡であることを証明する．

プレイヤー $i \in \{1, 2\}$ の落札集合 $X_i(\mathbf{c})$ は，明らかに，

$$X_1(\mathbf{c}) = \{1, 2, \dots, m - k_2\}, \quad (37)$$

$$X_2(\mathbf{c}) = \{m - k_2 + 1, m - k_2 + 2, \dots, m\} \quad (38)$$

となり， $X_1(\mathbf{c}) \cup X_2(\mathbf{c}) = M$ が成立する．プレイヤー $i \in \{1, 2\}$ の利得 $u_i(X_i(\mathbf{c}))$ は， $i' \in \{1, 2\} - \{i\}$ を用いて

$$u_i(X_i(\mathbf{c})) = v_i(|X_i(\mathbf{c})|) - \sum_{j \in X_{i'}(\mathbf{c})} c_{i'}(j)$$

と定義される．したがって，式 (29) と式 (30) より，

$$\begin{aligned} u_1(X_1(\mathbf{c})) &= v_1(m - k_2) = v_1(k_1) = u_1(X_1(\mathbf{b})), \\ u_2(X_2(\mathbf{c})) &= v_2(k_2) = v_2(m - k_1) = u_2(X_2(\mathbf{b})) \end{aligned} \quad (39)$$

が成立する．

そこで，入札 $c_1 = (c_1(1), c_1(2), \dots, c_1(m))$ をプレイヤー 1 が入札 $c'_1 = (c'_1(1), c'_1(2), \dots, c'_1(m))$ に変えると，二人のプレイヤーの実行可能入札 $\mathbf{c}_1 = (c'_1, c_2)$ において，プレイヤー 1 の落札集合 $X_1(\mathbf{c}_1)$ の利得 $u_1(X_1(\mathbf{c}_1))$ がもとの利得 $u_1(X_1(\mathbf{c}))$ より真に大きくなったとする．すなわち， $k'_1 = |X_1(\mathbf{c}_1)|$ として，

$$\begin{aligned} u_1(X_1(\mathbf{c}_1)) &= v_1(k'_1) - \sum_{j \in X_1(\mathbf{c}_1)} c_2(j) \\ &> u_1(X_1(\mathbf{c})) = v_1(m - k_2) = v_1(k_1) \end{aligned} \quad (40)$$

であるとする．すると，以下に示すように矛盾が得られる．まず，対称性と式 (36) より，

$$X_1(\mathbf{c}_1) = \{1, 2, \dots, k'_1\} \quad (41)$$

と仮定できる．ここで $k'_1 \leq m - k_2$ とすると， $u_1(X_1(\mathbf{c}_1)) \leq v_1(k'_1) \leq v_1(m - k_2) = v_1(k_1)$ となり，式 (40) に矛盾する．したがって，

$$k'_1 > m - k_2 \quad (42)$$

である．さらに，すべての $m - k_2 + 1 \leq h \leq m$ で

$$\sum_{j=m-k_2+1}^h b_2(j) \leq \sum_{j=m-k_2+1}^h c_2(j) = (h - (m - k_2)) \frac{w_2(k_2)}{k_2} \quad (43)$$

であることも補題 3.1 より得られる．したがって，式 (42) より h に $k'_1 \geq m - k_2 + 1$ を代入することができて，

$$\sum_{j=m-k_2+1}^{k'_1} b_2(j) \leq \sum_{j=m-k_2+1}^{k'_1} c_2(j) \quad (44)$$

が得られる．さらに，式 (32) の $b_2(1) = b_2(2) = \dots = b_2(m - k_2) = 0$ と式 (36) の $c_2(1) = c_2(2) = \dots = c_2(m - k_2) = 0$ と式 (41) の $X_1(c_1) = \{1, 2, \dots, k'_1\}$ より，

$$\begin{aligned} \sum_{j \in X_1(c_1)} b_2(j) &= \sum_{j=m-k_2+1}^{k'_1} b_2(j) \\ &\leq \sum_{j=m-k_2+1}^{k'_1} c_2(j) = \sum_{j \in X_1(c_1)} c_2(j) \quad (45) \end{aligned}$$

が得られる．したがって，式 (39) と $b = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡であることから，定理 3.1 を用いて，

$$\begin{aligned} u_1(X_1(c_1)) &= v_1(k'_1) - \sum_{j \in X_1(c_1)} c_2(j) \\ &\leq v_1(k'_1) - \sum_{j \in X_1(c_1)} b_2(j) \\ &\leq u_1(X_1(b)) = u_1(X_1(c)) \end{aligned}$$

が得られる．しかし，これは式 (40) に矛盾する．

プレイヤー 2 の入札 $c_2 = (c_2(1), c_2(2), \dots, c_2(m))$ を入札 $c'_2 = (c'_2(1), c'_2(2), \dots, c'_2(m))$ に変えても，二人のプレイヤーの実行可能入札 $c_2 = (c_1, c'_2)$ において，プレイヤー 2 の落札集合 $X_2(c_2)$ の利得 $u_2(X_2(c_2))$ がもとの利得 $u_2(X_2(c))$ より真に大きくなることはないことが，同様に得られる．

したがって，二人のプレイヤーの実行可能入札 $c = (c_1, c_2)$ もナッシュ均衡であることが得られた． □

補題 3.3 の証明とほぼ同様に，以下の補題も証明できる．

補題 3.4 実行可能入札 $b = (b_1, b_2)$ において，各プレイヤー $i \in \{1, 2\}$ の落札するアイテムの集合 $X_i(b)$ は， $k_i = |X_i(b)|$ と $k_1 + k_2 = m$ を満たすとする．すなわち，落札されないアイテムは存在しないとする．さらに，各プレイヤー $i \in \{1, 2\}$ の入札 $c_i = (c_i(1), c_i(2), \dots, c_i(m))$ を

$$c_1(1) = c_1(2) = \dots = c_1(k_1) = \frac{w_1(k_1)}{k_1}, \quad (46)$$

$$c_1(k_1 + 1) = c_1(k_1 + 2) = \dots = c_1(m) = 0,$$

$$c_2(1) = c_2(2) = \dots = c_2(k_1) = 0, \quad (47)$$

$$c_2(k_1 + 1) = c_2(k_1 + 2) = \dots = c_2(m) = \frac{w_2(k_2)}{k_2}$$

と定義する．すると， $c = (c_1, c_2)$ は実行可能入札であり，各 $i \in \{1, 2\}$ の落札するアイテムの集合 $X_i(c)$ は，

$$X_1(c) = \{1, 2, \dots, k_1\}, \quad (48)$$

$$X_2(c) = \{k_1 + 1, k_1 + 2, \dots, m\}$$

となる ($X_1(c) \cup X_2(c) = M$ かつ $|X_1(c)| = k_1$, $|X_2(c)| = m - k_1 = k_2$ である)．さらに， $b = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡であるならば， $c = (c_1, c_2)$ はナッシュ均衡である． □

補題 3.3 と補題 3.4 より，以下の定理が得られる．

定理 3.2 各 $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ に対する各プレイヤー $i \in \{1, 2\}$ の実行可能入札 $c_i^{(k)} = (c_i^{(k)}(1), c_i^{(k)}(2), \dots, c_i^{(k)}(m))$ を $\frac{0}{0} = 0$ として，

$$c_1^{(k)}(1) = c_1^{(k)}(2) = \dots = c_1^{(k)}(k) = \frac{w_1(k)}{k},$$

$$c_1^{(k)}(k + 1) = c_1^{(k)}(k + 2) = \dots = c_1^{(k)}(m) = 0,$$

$$c_2^{(k)}(1) = c_2^{(k)}(2) = \dots = c_2^{(k)}(k) = 0,$$

$$c_2^{(k)}(k + 1) = c_2^{(k)}(k + 2) = \dots = c_2^{(k)}(m) = \frac{w_2(m-k)}{m-k}$$

と定義する．このとき，ナッシュ均衡が存在するための必要十分条件は，ある $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ に対して，入札 $c^{(k)} = (c_1^{(k)}, c_2^{(k)})$ がナッシュ均衡となることである． □

定理 3.2 から以下の系が得られる．

系 3.2 二人のプレイヤーのアイテムの集合 $M = \{1, 2, \dots, m\}$ に対する各プレイヤー $i \in \{1, 2\}$ の定義 2.5 を満たす対称的な評価関数 v_i に対して，ナッシュ均衡が存在するかどうかは $O(m^2)$ 時間で判定できる．さらに，存在するときには，ナッシュ均衡も $O(m^2)$ 時間で得ることができる． □

4. 例と注意

本節では，いくつかの例を通して，これまでに与えた定理の適用と一般化への注意を与える．はじめに，二人のプレイヤーのアイテムの集合 $M = \{1, 2, \dots, m\}$ に対する各プレイヤー $i \in \{1, 2\}$ の定義 2.5 を満たす以下の対称的な評価関数 v_i を考える．

例 4.1 $m = 3$ で $M = \{1, 2, 3\}$ であるとする．

$$\begin{aligned} v_1(1) = v_1(2) = 3, \quad v_1(3) = 6, \\ v_2(1) = v_2(2) = 2, \quad v_2(3) = 4 \end{aligned} \quad (49)$$

とする．このときには，

$$\begin{aligned} w_1(1) = 3, \quad \frac{w_1(2)}{2} = 1.5, \quad \frac{w_1(3)}{3} = 1.5, \\ w_2(1) = 2, \quad \frac{w_2(2)}{2} = 1, \quad \frac{w_2(3)}{3} = 1 \end{aligned}$$

となり，ナッシュ均衡をもたない．実際， $k = 0$ のときには

$$\begin{aligned} c_1^{(0)}(1) = 0, \quad c_1^{(0)}(2) = 0, \quad c_1^{(0)}(3) = 0, \\ c_2^{(0)}(1) = 1, \quad c_2^{(0)}(2) = 1, \quad c_2^{(0)}(3) = 1 \end{aligned}$$

の実行可能入札 $c^{(0)} = (c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$ でプレイヤー 1 は落札集合 $X_1(c^{(0)}) = \emptyset$ で利得 $u_1(X_1(c^{(0)})) = 0$ であるが，

$$b_1^{(0)}(1) = 3, \quad b_1^{(0)}(2) = 0, \quad b_1^{(0)}(3) = 0$$

とすると，実行可能入札 $b^{(0)} = (b_1^{(0)}, c_2^{(0)})$ でプレイヤー 1 は落札集合 $X_1(b^{(0)}) = \{1\}$ となり，利得 $u_1(X_1(b^{(0)})) = 3 - 1 = 2 > 0$ となる．さらに， $k = 1, 2, 3$ のときには，

$$\begin{aligned} c_1^{(1)}(1) &= 3, & c_1^{(1)}(2) &= 0, & c_1^{(1)}(3) &= 0, \\ c_2^{(1)}(1) &= 0, & c_2^{(1)}(2) &= 1, & c_2^{(1)}(3) &= 1, \\ c_1^{(2)}(1) &= 1.5, & c_1^{(2)}(2) &= 1.5, & c_1^{(2)}(3) &= 0, \\ c_2^{(2)}(1) &= 0, & c_2^{(2)}(2) &= 0, & c_2^{(2)}(3) &= 2, \\ c_1^{(3)}(1) &= 1.5, & c_1^{(3)}(2) &= 1.5, & c_1^{(3)}(3) &= 1.5, \\ c_2^{(3)}(1) &= 0, & c_2^{(3)}(2) &= 0, & c_2^{(3)}(3) &= 0 \end{aligned}$$

である。ここで、 $k=1$ のときには $b_1^{(1)}(1) = 0.8$, $b_1^{(1)}(2) = 1.1$, $b_1^{(1)}(3) = 1.1$ とすることにより、また $k=2$ のときには $b_1^{(2)}(1) = 0.4$, $b_1^{(2)}(2) = 0.4$, $b_1^{(2)}(3) = 2.2$ とすることにより、実行可能入札 $b^{(k)} = (b_1^{(k)}, c_2^{(k)})$ でプレイヤー 1 は落札集合 $X_1(b^{(k)}) = \{1, 2, 3\}$ となり、利得 $u_1(X_1(b^{(k)})) = 4 > 3 = u_1(X_1(c^{(k)}))$ となる。また $k=3$ のときには $b_2^{(3)}(1) = 0$, $b_2^{(3)}(2) = 0$, $b_2^{(3)}(3) = 2$ とすることにより、実行可能入札 $b^{(3)} = (c_1^{(3)}, b_2^{(3)})$ でプレイヤー 2 は落札集合 $X_2(b^{(3)}) = \{3\}$ となり、利得 $u_2(X_2(b^{(3)})) = 2 - 1.5 = 0.5 > 0 = u_2(X_2(c^{(3)}))$ となる。

したがって、式 (49) の評価関数ではナッシュ均衡が存在しないことがわかる。□

例 4.2 $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ であり、各 $i \in \{1, 2\}$ で、

$$v_i(1) = v_i(2) = v_i(3) = 3, \quad v_i(4) = v_i(5) = 6 \quad (50)$$

のときには、

$$w_i(1) = 3, \quad \frac{w_i(2)}{2} = 1.5, \quad \frac{w_i(3)}{3} = \frac{w_i(4)}{4} = \frac{w_i(5)}{5} = 1$$

となる。 $k=3$ のときの

$$\begin{aligned} c_1^{(3)}(1) &= c_1^{(3)}(2) = c_1^{(3)}(3) = 1, & c_1^{(3)}(4) &= c_1^{(3)}(5) = 0, \\ c_2^{(3)}(1) &= c_2^{(3)}(2) = c_2^{(3)}(3) = 0, & c_2^{(3)}(4) &= c_2^{(3)}(5) = 1.5 \end{aligned}$$

の実行可能入札 $c^{(3)} = (c_1^{(3)}, c_2^{(3)})$ はナッシュ均衡でないが、 $k=4$ のときの

$$\begin{aligned} c_1^{(4)}(1) &= c_1^{(4)}(2) = c_1^{(4)}(3) = c_1^{(4)}(4) = 1, & c_1^{(4)}(5) &= 0, \\ c_2^{(4)}(1) &= c_2^{(4)}(2) = c_2^{(4)}(3) = c_2^{(4)}(4) = 0, & c_2^{(4)}(5) &= 3 \end{aligned}$$

の実行可能入札 $c^{(4)} = (c_1^{(4)}, c_2^{(4)})$ はナッシュ均衡である。したがって、 $k=3$ の公平と思える実行可能入札がナッシュ均衡でないときでも、 $k=4$ のより不公平と思える実行可能入札でナッシュ均衡になることもある。□

例 4.3 アイテムの集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ に対する三人の各プレイヤー $i \in \{1, 2, 3\}$ の

$$\begin{aligned} v_1(1) &= v_1(2) = v_1(3) = 2.1, \\ v_1(4) &= v_1(5) = v_1(6) = 4.2, & v_1(7) &= 6.3 \\ v_2(1) &= v_2(2) = v_2(3) = 1, \\ v_2(4) &= v_2(5) = v_2(6) = 2, & v_2(7) &= 3 \\ v_3(1) &= v_3(2) = 0.8, & v_3(3) &= v_3(4) = 1.2, \\ v_3(5) &= v_3(6) = 1.8 & v_3(7) &= 2.1 \end{aligned}$$

の定義 2.5 を満たす対称的な評価関数に対して、

$$\begin{aligned} w_1(1) &= 2.1, & \frac{w_1(2)}{2} &= 1.05, & \frac{w_1(k)}{k} &= 0.7 \quad (k \geq 4) \\ w_2(1) &= 1, & \frac{w_2(2)}{2} &= 0.5, & \frac{w_2(k)}{k} &= 1/3 \quad (k \geq 4) \\ w_3(1) &= 0.8, & \frac{w_3(2)}{2} &= 0.4, \\ \frac{w_3(3)}{3} &= 0.4, & \frac{w_3(k)}{k} &= 0.3 \quad (k \geq 4) \end{aligned}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} c_1(k) &= 0.7 \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5), & c_1(k) &= 0 \quad (k = 6, 7), \\ c_2(k) &= 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 7), & c_2(k) &= 1 \quad (k = 6), \\ c_3(k) &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 6), & c_3(7) &= 0.8 \end{aligned}$$

の実行可能入札 $c = (c_1, c_2, c_3)$ はナッシュ均衡でない。しかし、 (c_1, c_2) をアイテム集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ に制限するとナッシュ均衡であり、 (c_1, c_3) をアイテム集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ に制限するとナッシュ均衡であり、 (c_2, c_3) をアイテム集合 $\{6, 7\}$ に制限するとナッシュ均衡である。□

5. おわりに

本論文では、定義 2.5 を満たす対称的な評価関数 v_i のもとで、 n 人のプレイヤーの入札 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ の実行可能性の特徴付け (定理 2.1)、二人のプレイヤーの実行可能入札 $b = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡であるための必要十分条件 (定理 3.1) および二人のプレイヤーの対称的な評価関数 v_i にナッシュ均衡が存在するための必要十分条件 (定理 3.2) を与えた。

なお、定理 3.1 と定理 3.2 は三人以上のプレイヤーの対称的な評価関数 v_i に一般化できると予想している。

謝辞 本研究は日本学術振興会科学研究費および中央大学特定課題研究費の助成に基づいて行われたものである。

参考文献

- [1] K. Bhawalkar and T. Roughgarden, Welfare guarantees for combinatorial auctions with item bidding, in: *Proc. of 22nd Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 700–709, 2011.
- [2] P. Cramton, Y. Shoham and R. Steinberg, *Combinatorial Auctions*, MIT Press, 2010.
- [3] B. Edelman, M. Ostrovsky, and M. Schwarz, Internet advertising and the generalized second price auction: selling billions of dollars worth of keywords, *American Economic Review*, 97(1), pp. 242–259, 2007.
- [4] F. Gul and E. Stacchetti, Walrasian equilibrium with gross substitutes, *Journal of Economic Theory* 87, pp. 95–124, 1999.
- [5] V. Krishna, *Auction Theory, Second Edition*, Academic Press, 2009.
- [6] B. Lehmann, D. Lehmann, and N. Nisan, Combinatorial auctions with decreasing marginal utilities, in: *Proc. of 3rd ACM Conference on Electronic Commerce*, pp. 18–28, 2001.
- [7] 福田直樹, 伊藤孝行, 複数ユニット組合せオークションにおける多数入札時での勝者決定の近似解法について, 電子情報通信学会, 信学技報 AI2009-14, pp. 25–30, 2009.