

数の遊び

林 実 樹 広**

自然数に「ある操作」を繰り返し続けて「対称」にすることができるかどうかというパズルがある。この問題を計算機に試行させ、その計算結果から推測して、ある場合に否定的に答える結論を得た。計算機のお遊びにはすぎないが、結果がきれいなことと、多少の整約論的興味もあると思われるので、ここに紹介させていただく。

自然数 n を P 進法によって表記する。すなわち

$$n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \cdots + n_0 \quad (n_k \neq 0) \quad (1)$$

として、これを普通に $n_k n_{k-1} \cdots n_0$ と表記することにする。つぎにこの数を構成する数字を反対向きに並べた $n_0 n_1 \cdots n_k$ という数

$$\bar{n} = n_0 p^k + n_1 p^{k-1} + \cdots + n_k \quad (2)$$

を作る。こうしたうえで、

$$f(n) = n + \bar{n} \quad (3)$$

を作ること、自然数 n に「操作 f をほどこす」ということにする。また、自然数 n が「対称」であるとは、

$$n = \bar{n} \quad (4)$$

となっていることをいう。

さて、先のパズルを正確に述べれば、つぎようになる。

〔問題〕

自然数 n を p 進法で表記したとき、 n が対称でなければ、 n に操作 f をほどこして、 $f(n)$ を作る。 $f(n)$ が対称でなければ、さらに $f(f(n))$ を作る。以下同様に操作 f を続けて行くと、はたして、対称な数に行きつくであろうか？

たとえば、つぎの2例はそれぞれ1回および2回の操作で対称になっている（いずれも10進法である）。

(例1)	1 2 5 0	(例2)	1 9
	+) 0 5 2 1		+) 9 1
	1 7 7 1		1 1 0
			+) 0 1 1
			1 2 1

この問題を計算機 (TOSBAC 3400) を使用して調べたところ、 $p=2, 4$ に対しては何回操作をほどこしても対称にならない数があることがわかった。ここに得られた結果から帰納して、一般に $p=2^k$ (k は自然数) の場合は上に述べた操作を何回ほどこしても対称にならない数があることが証明できた。

〔定理〕 $p=2^k$ 進法において、 $q=p-1$ とおくと、

$$10 \overbrace{q \cdots q}^n q-1 q \overbrace{0 \cdots 0}^n \quad (n \geq 2) \quad (5)$$

と表記される数は、何回操作 f をほどこしても決して対称にはならない。

〔証明〕 上に述べた数の $\overbrace{q \cdots q}^n$ および $\overbrace{0 \cdots 0}^n$ の部分を見やすくするために、それぞれ $\overbrace{q}^n$ および $\overbrace{0}^n$ と表わすことにする。

$$10 \overbrace{q}^n q-1 q \overbrace{0}^n$$

という数が、逐次操作 f をほどこすと途中対称になることなしに

$$10 \overbrace{q}^{n+1} q-1 q \overbrace{0}^{n+1}$$

という数に行きつくことを示せばよい。このために操作 f をほどこしていく過程を筆算の要領で書き表わしてみる。(次ページ参照)

以上、 $(2k+2)$ 回の操作をほどこして、もと同じ形の数の

$$10 \overbrace{q}^{n+1} q-1 q \overbrace{0}^{n-1}$$

に到達した。証明終り。

〔系〕 定理の証明の途中にあらわれた数も対称にならない。

この形の数のほかに、対称になりそうにない数はいくつか見つかったが(表1)、上記と同様な証明はできそうにない。これに対し、多くの自然数は適当な回数操作を続ければ対称な数になり、たいていは10回以内の操作で対称になっている。対称になるまでに

* A Play on Natural Number, by Mikihiro Hayashi (Fac. of Science and Engineering, Saitama Univ.)

** 埼玉大学理工学部

表1 対称になりそうにない数

3 進 法 〔1~20200 (180個)〕		5 進 法 〔1~10413 (833個)〕		7 進 法 〔1~2625 (999個)〕		10 進 法 〔1~999 (999個)〕	
数	操作回数	数	操作回数	ナ	シ	数	操作回数
10211	141	10343	185			196	227
11201	141		(以上同類)			295	227
20012	140	10313	184			493	227
20112	140	10333	184			592	227
20200	141	10411	185			689	226
	(以上同類)	10413	184			691	227
最終結果の数 90桁			(以上同類)	8 進 法 〔1~1747 (999個)〕		790	227
		"	90桁	ナ	シ	788	226
						986	226
							(以上同類)
4 進 法 〔1~12312 (483個)〕		6 進 法 〔1~4343 (999個)〕		9 進 法 〔1~867 (709個)〕		879	222
数	操作回数	ナ	シ	数	操作回数	978	222
10202	170			728	235		(以上同類)
	(以上同類)			768	235	最終結果の数 100 桁	
10332	251			788	235		
11322	251			827	235		
11331	252			867	235		
12312	251				(以上同類)		
	(以上同類)			"	90桁		
"	90桁						

10 回以上の操作を要するもので特に目立った特徴のあるものを表2にあげてみた。10 回以上とはいえ 40 回を越えない操作で対称になっている。対称にならないまま出力された数は、数百回におよぶ操作をほどこしてもなおかつ対称にならなかったもので、おそらくこの先何回操作を行なって対称にならないとも予想される。先の証明に出てきたような循環する数を有理数にたとえて見れば、他の多くの対称になりそうにない数のなかには決して循環することがない無理数にたとえられるものもあるのではないだろうか？

プログラム作成にあたっては、次の事実を使えば計算時間を短縮できる。まず 10 進法の例をあげよう。

79652 と 68663 とは、次のように 1 回目の操作で同じ数になる。つまり

$$\begin{array}{r} 79652 \\ +25697 \\ \hline 105349 \end{array} \quad \begin{array}{r} 68663 \\ +36686 \\ \hline 105349 \end{array}$$

これらの数は各桁ごとに和をとって見ると

$$\begin{array}{r} 79652 \\ 25697 \\ \hline 91412149 \end{array} \quad \begin{array}{r} 68663 \\ 36686 \\ \hline 91412149 \end{array}$$

となる。すなわち対称な位置にある数字の和がそれぞれ等しくなっているもの（上の2例のほかにまだまだある）は、そのうち一つについてだけ計算すればよい。こうすると大ざっぱに見積ってつぎのような

る。

全体で $2n$ 桁の数のときは、各桁の和は $0+0$ から $(p-1)+(p-1)$ すなわち 0 から $2(p-1)$ の範囲で変り得るから、こういう数は $(2p-1)^n$ 個あり、一方まともにとやると、 $2n$ 桁の数の個数は p^{2n} である（いずれの個数も、最初の桁が 0 になる場合を無視した）から、これらの比率は大きくなるに従って大幅に異なってくる。全体が $(2n+1)$ 桁の数の場合も同様にして $p(2p-1)^n$ 通りに対して、 p^{2n+1} 通りである。いずれにしても、時間の短縮される比率はおおよそ $(2/p)^n$ となるであろう。

このようにすれば同類（途中から同じ数になるもの）を何度も計算することのむだがはぶけるが、もとの数の各々がどんな数になるかを調べたり、全体の比率などを調べるときには、あまり便利とはいえない。

〔表の説明〕 以下表1、表2について簡単に説明をつけ加えておく。ある事情（後述〔付記〕）のため2進法の場合は計算しなかった。また、10進法は特別に計算した（後述〔付記〕）ので、最後桁100桁で打ち切り、その他の場合は90桁で打ちきり、90桁に達しても対称にならないものが五つ以上になるか、999個計算するかのいずれかで、その進法による計算を打ち切った。なお表にはすべてを書き切れなかったので、出力結果の全般的な感じについて少し述べておくことにした。

表2 10回以上の操作で対称になった数

3 進 法		5 進 法		7 進 法		8 進 法		10 進 法	
数	操作回数								
1222	18	1242	15	566	10	155	14	89	24
2220	17	1332	15	665	10	254	14	98	24
2221	18	1422	15	1046	10	452	14	187	23
10112	16	1442	15	1136	10	551	14	286	23
10212	15	2241	15	1226	10	627	13	385	23
10221	15	2331	15	1264	9	650	14	583	23
11102	16	2421	15	1316	10	726	13	682	23
11202	16	2441	15	1354	9	1375	12	781	23
11220	17	3034	14	1406	10	1555	12	869	22
11222	16	3124	14	1444	9	1465	12	880	23
11201	15	3214	14	1466	10	1645	12	968	22
12210	17	3240	15	1534	9	1735	12		
12212	16	3304	14	1556	10			8813200023188	
12220	17	3330	15	1564	9	437020734			
20111	16	3344	14	1624	9				
(最終結果)		3420	15	1646	10			266	11
21022122122012		3434	14	1654	9	567	17	662	11
		3440	15	2045	10	765	17	761	11
		4033	14	2135	10	1374	16	829	10
12222	12	4123	14	2225	10	1464	16	860	11
		4213	14	2263	9	1554	16	928	10
2212012122		4303	14	2315	10	1644	16		
		4343	14	2353	9	1734	16	88555588	
		4433	14	2405	10				
				2443	9	6655005566			
4 進 法		34223432243		2465	10			276	15
				2533	9			375	15
3013	16			2555	10	657	12	573	15
3103	16	6 進 法		2563	9	756	12	672	15
3133	16			2623	9	1275	11	771	15
3313	16	153	39			1365	11	849	14
10220	17	351	39	55155155		1455	11	870	15
11132	15	445	38			1545	11	948	14
11210	17	450	39			1635	11		
12031	16	544	38	1565	11	1725	11	8836886388	
12122	15	1253	37	1655	11				
12200	17	1343	37	2564	11	462242264			
		1433	37					739	10
213032230312		1523	37	563444365				937	10
		2252	37			677	14		
		2342	37			776	14	5233333325	
3023	11	2432	37	1665	13	1675	15		
3203	11	2522	37						
3233	11	3251	37	332323233		1667667661		899	17
3323	11	3341	37					998	17
12232	10	3431	37						
		3521	37	2056	12	1676	16	133697796331	
1321111231		4035	36	2146	12				
		4125	36	2236	12	4716226174			
		4215	36	2326	12				
10212	14	4250	37	2416	12				
11202	14	4305	36	2506	12				
		4340	37	2566	12				
111123321111						9 進 法			
		22122553222235522122		435040534		ナン			

4進法、5進法は抜粋になっており、4進法では10231(他4個)、10313(他2個)、10320(他3個)がそれぞれ33100133、3300110033、33122133になり5進法では1243(他36個)が111343111になる。

