

## 3次パラメトリック曲線の曲率変化の美的解析

斎藤隆文<sup>†1,a)</sup> 吉田典正<sup>†2,b)</sup>

高いレベルの美しさをもつ曲線を生成するには、曲率変化の単調性や、曲率対数グラフの傾きなど、曲率に関する高度な制御が必要である。しかしながら、曲線生成制御で一般的に使われるパラメトリック曲線においては、ごく基本的な3次Bezier曲線ですら、その振る舞いは難解であり、通常の制御点からの制御が困難である。

そこで、本研究では、3次の多項式パラメトリック曲線の曲率変化を、総括的に解析することを目指す。今回は、曲率を単純な式で表現できるTschirnhausen 3次曲線をもとに、これをアフィン変換することにより、3次の多項式パラメトリック曲線のうち crunode (自己交差) を有するものについて、曲率の単調性および曲率対数グラフの傾きを数値的に解析し可視化した。さらに、伸縮のみの場合について、曲率が極値となる点を解析的に求めるとともに、 $G^1$  Hermite 補間における両端点接線の交点の存在領域を明らかにした。

## Aesthetical Analysis of Curvature Profiles of Parametric Cubic Curves

TAKAFUMI SAITO<sup>†1,a)</sup> NORIMASA YOSHIDA<sup>†2,b)</sup>

In order to generate high-level aesthetic curves, it is necessary to control the curvature profiles, such as monotonicity and the slope of logarithmic curvature graph. However, such curvature profiles are complicated even in cubic Bezier curves, and it is difficult to control them by the control points.

In this research, we aim to analyze the overall curvature profiles of cubic polynomial parametric curves. In this report, we focus on cubic curves with crunodes. By starting with Tschirnhausen cubic and by applying Affine transformation, we numerically analyzed and visualized curvature monotonicity and the slope of logarithmic curvature graph. Also, for scaled Tschirnhausen cubics, we obtained the number of curvature extrema, and clarified the existing condition of  $G^1$  Hermite interpolation.

### 1. はじめに

近年の工業デザインやスタイルデザインにおいては、曲線や曲面形状の高いレベルの美しさが重要となっている。曲線・曲面の高いレベルの美しさには、曲率の振る舞いが大きく影響していることが知られている。一般に、曲率は単調に変化することが望ましいとされている [1]。また、自然界や人工物における「美しい曲線」の多くは、曲率対数グラフが直線で近似できることが原田らにより指摘されている [2]。

しかし、現状の CAD システムにおいては、高いレベルの美しさを考慮した曲面形状制御が困難であり、そのためデザインの初期工程において試行錯誤に手間がかかり、効率化を阻害している。制御が困難な理由として、現在の CAD システムの曲線・曲面表現として一般的に使用されている、NURBS に代表される多項式や有理式のパラメトリック表現では、制御点と曲率の単調性や曲率変化の量的特徴との関係が難解であることが挙げられる。

一方、高いレベルの美しさを直観的に得る方法として、対数美的曲線・曲面の研究が進められている [3][4]。対数美的曲線とは、曲率対数グラフが直線となるような曲線群であり、対数螺旋やクロソイド曲線もこれに含まれる。し

かしながら、CAD システムの各種機能のすべてを対数美的曲線・曲面で行うことは非現実的であり、作成された対数美的曲線・曲面を、近似的に NURBS などの既存のパラメトリック表現に変換する必要がある。この変換において、曲率変化の特徴を維持する必要がある。ここでも制御点との関係が難解であることが、ボトルネックとなっている。

本研究では、パラメトリック曲線の曲率変化を総括的に解析し、従来型のパラメトリック曲線を用いて高度な美的要求を満たす曲線セグメントの生成・制御・近似を行うために必要な理論体系の確立を目指す。今回は、多項式3次曲線の一部を対象とする。ただし、制御点から定義される曲線セグメント (パラメータ範囲 [0, 1]) だけでなく、曲線全体 (パラメータ範囲  $(-\infty, +\infty)$ ) における振る舞いを解析する。進め方として、弧長が解析的に求められる Tschirnhausen 3次曲線 [5] をもとに、これをアフィン変換した曲線について、曲率単調性と曲率対数グラフの傾きの変化を解析する。

### 2. 関連研究

#### 2.1 曲率単調な3次曲線セグメント

3次曲線セグメントが曲率単調となる条件に関しては、多項式および有理3次Bezier曲線において、いくつかの研究がおこなわれている。Waltonらは、3次多項式Bezier曲線において、制御点位置にある種の強い制約を加えること

†1 東京農工大学  
Tokyo University of Agriculture and Technology  
†2 日本大学  
Nihon University

で、曲率単調性を保証する方法を提案した [6]. Dietzらは、3次の多項式 Bezier 曲線において曲率単調性を満たすような、制御点位置と端点での曲率との関係を実験的に求め [7], 有理 Bezier 曲線に対しても同様の考え方で拡張している [8]. また、3次の多項式 Bezier 曲線の曲率の極値や数に関して、Waltonら [9], Habibら [10] により解析が行われている。

しかしながら、これらの結果は総じて難解である。パラメトリック曲線においては、パラメータ変化に対する接線ベクトルの大きさ（弧長の1次微分）を求める際に平方根が必要となること、その主たる原因である。このため、例えば3次 Bezier 曲線の曲率単調条件ですら、多項式曲線で5次式 [11], 有理曲線で12次式 [12] を解く必要がある。また、曲率変化と深く関連する弧長も、一般には解析的に求められない。

## 2.2 Tschirnhausenの3次曲線 (T-曲線)

多項式パラメトリック曲線のうち、接線ベクトルの大きさが多項式で表すことができるものは、Pythagorean Hodograph 曲線 (PH 曲線) と呼ばれる。Tschirnhausen 3次曲線 (相似変換による一連の曲線群を含む) は、3次では唯一の PH 曲線として知られている [5]. Tschirnhausen 3次曲線 (以下、「T-曲線」と略記) の多項式パラメータ表現の例を式 (1) に、曲線形状を図 1 に示す。

$$\begin{cases} x = 3t^2 - 9 \\ y = -t^3 + 3t \end{cases} \quad (1)$$

式 (1) の曲線について、弧長を  $s$ , 曲率を  $\kappa$  とすると、

$$s = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 3\sqrt{t^2 + 1} \quad (2)$$

$$\kappa = \frac{-2}{3(t^2 + 1)^2} \quad (3)$$

となる。

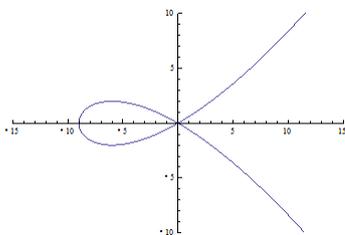


図 1 Tschirnhausen の 3 次曲線

Figure 1 Tschirnhausen cubic.

T-曲線では、式 (3) のように曲率が平方根のない有理式として示されるため、曲率の解析が比較的容易である。Meekらは、T-曲線を用いて、曲率単調な曲線セグメントを  $G^1$  Hermite 補間 (両端点の位置と接線方向から補間) する手法を提案している [13]. 特に、両端点の位置を固定した

場合に、補間が可能となるような両端点における 2本の接線の交点位置 (存在領域) を理論的に求めている。

## 2.3 対数美的曲線

対数美的曲線とは、曲率対数グラフが直線となるような曲線群である。曲率対数グラフとは、曲率半径を  $\rho$ , 弧長を  $s$  としたときに、曲線上のすべての点を、

$$\text{縦軸: } \log \rho \quad \text{横軸: } \log \left( \rho \left| \frac{ds}{d\rho} \right| \right)$$

としてプロットしたものである。原田は、実在する種々の美しい曲線を解析し、それらの多くにおいて曲率対数グラフがおおむね直線であること、および、曲線の印象が曲率対数グラフの傾き  $\alpha$  に依存することを見出した [2]. このような性質をもつ対数美的曲線について、Miura が定式化を行なった [3]. 我々は、曲線の全体像を明らかにするとともに、 $G^1$  Hermite 補間の手法を提案した [4]. 対数美的曲線は、クロソイド曲線 ( $\alpha = -1$ ), 対数螺旋 ( $\alpha = 1$ ), 円のインボリュート曲線 ( $\alpha = 2$ ) のほか、極限状態において円弧も包含する [4]. 対数美的曲線は、弧長もしくは方向角をパラメータとして表現され、曲線上の点の位置は数値積分で求める必要がある。このため、CAD システムの各種機能のすべてを対数美的曲線で行うことは非現実的である。

現実的な対応として、

- ① Bezier 曲線などの制御点や重みに制約を加え、曲率対数グラフが直線に近い曲線を生成する；
- ② 対数美的曲線として生成したものを、Bezier 曲線などで近似する；

の 2つのアプローチが考えられる。①の例として、我々は Class A Bezier 曲線で  $\alpha = 1$  に近い曲線を  $G^1$  Hermite 補間を提案している [14] が、Bezier 曲線の持つ自由度の中で、ごく一部だけを利用したに過ぎない。②の例として、我々は対数美的曲線セグメントを 3次有理 Bezier 曲線セグメントで近似する手法を提案している [12]. 曲率対数グラフも含めておおむね良好な近似結果が得られたが、条件によっては曲率の誤差が大きい場合や、結果が安定しない場合がある。いずれのアプローチにおいても、さらなる改善には、多項式あるいは有理パラメトリック曲線の曲率変化に関して、より深い知見が必要である。

## 3. 3次パラメトリック曲線の曲率解析

### 3.1 3次多項式曲線の全体像

本研究では、まず 3次の多項式パラメトリック曲線の曲率変化を総括的に解析することを目指す。以下、「3次曲線」は、3次の多項式パラメトリック曲線を指すこととする。従来の多くの研究では、3次 Bezier 曲線の制御点と曲率変化との関係が論じられている。しかし、3次 Bezier 曲線セグメントは、1本の 3次曲線 (パラメータ範囲  $(-\infty, +\infty)$ )

の中から一部を切り出したものである。同一の3次曲線であっても、セグメントの切り出し方が異なれば、制御点は全く異なったものとなる。そこで、3次曲線全体の曲率変化に着目する。

まず、3次曲線の集合に関して、その自由度から考察する。3次Bezier曲線セグメントは、4個の制御点から定義されるので、8自由度である。一方、1本の3次曲線からのBezier曲線セグメントの切り出し方は、両端点のパラメータを指定することで一意に決まるので、2自由度である。したがって、3次曲線の集合は、6自由度あると考えることができる。

いま、ある特定の3次曲線をアフィン変換することを考えると、アフィン変換の自由度は6である。このことから、いくつかの3次曲線をプリミティブ形状として準備し、これらを変換することで、3次曲線の集合全体が得られると予想される。経験的には、すべての3次曲線は、2次以下に縮退する場合を除き、以下の4種類のプリミティブ形状から得られると考えられる。ただし、証明は得ていない。

- ① 1個の crunode (自己交差点) を持つもの  
 例:  $x^3 + 9x^2 - 27y^2 = 0$  (T-曲線)
- ② 1個の cusp (尖点) を持つもの  
 例:  $x^3 - y^2 = 0$
- ③ 1個の acnode, 2個の変曲点を持つもの  
 例:  $x^3 - x^2 - y^2 = 0$
- ④ 1個の変曲点を持つもの  
 例:  $x^3 - y = 0$

本報告では、このうち①のケースについて、曲率の単調性と曲率対数グラフの傾き  $\alpha$  に関して解析を行う。

### 3.2 T-曲線のアフィン変換

アフィン変換の6自由度のうち、平行移動が2自由度、回転が1自由度ある。これらの3自由度による変換では、形状は不変である。また、等方性のスケーリング(1自由度)により相似形が得られるが、曲率の単調性および曲率対数グラフの傾きは、相似変換に対しては不変である。したがって、実質的に解析すべき曲線形状の集合は、2自由度だけである。

今回は、式(1)で表現したT-曲線に対し、以下の式(4)のアフィン変換を施した曲線形状について、曲率変化を解析する:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 $a$  は  $x$  軸方向の伸縮を与える定数、 $c$  はせん断を与える定数である。 $a=1$  かつ  $c=0$  のとき、形状は不変である。アフィン変換したT-曲線の例を、図2に示す。

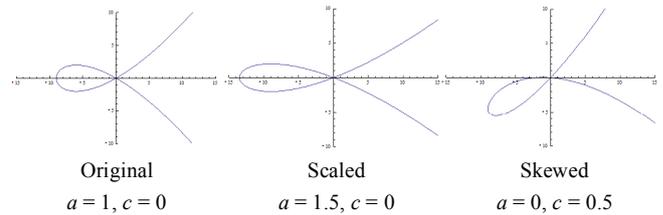


図2 T-曲線のアフィン変換  
 Figure 2 Affine transformed T-cubic.

### 3.3 伸縮されたT-曲線の曲率解析

まず、 $c=0$  として  $a$  を変化させ、 $x$  軸方向の伸縮による曲率の振る舞いの変化を調べる。それぞれの  $a$  およびパラメータ値  $t$  に対して、曲率ならびに曲率対数グラフの傾き  $\alpha$  を数値的に計算した。 $\alpha$  の計算結果を疑似カラーで可視化したものを、図3および図4に示す。図3は、縦軸を  $t$ 、横軸  $a$  をとした2次元プロット、図4は、それぞれの  $a$  における曲線形状に合わせて可視化したものである。色は  $\alpha$  の値に応じて色相を変えるとともに、曲率が増加する部分は明度の高い色を、減少する部分は原色に近い色を、それぞれ割り当てている。薄青から青に変化する境界が曲率の極大、赤から薄赤に変化する境界が曲率の極小を、それぞれ示している。

この結果から、おおむね  $a=0.8$  付近を境に、これより大きい  $a$  においては、曲率は  $t=0$  において極大となり、その両側で曲率単調となる。これより小さい  $a$  においては、曲率は  $t=0$  において極小となる他に、正負の2箇所極大となることがわかる。また、 $\alpha$  の値に関しては、おおむね  $|t| > 1$  の広い範囲において、 $0.5 < \alpha < 1$  であることがわかる。

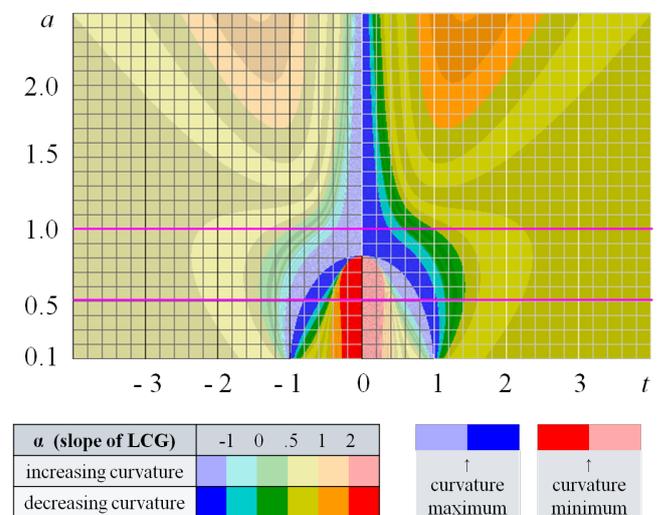


図3 伸縮されたT-曲線の曲率解析結果 ( $c=0$ )  
 Figure 3 Curvature analysis of scaled T-cubics ( $c=0$ ).

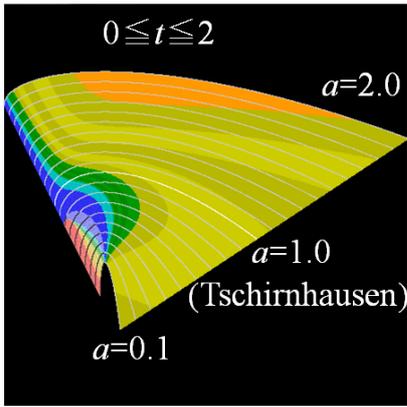


図 4 伸縮された T-曲線の曲率解析結果 ( $c = 0$ )

Figure 4 Curvature analysis of scaled T-cubics ( $c = 0$ ).

曲率の極値については、 $c = 0$  であれば解析的に求めることができる。曲率半径  $\rho$  は、

$$\rho = -\frac{3\left(t^4 + (4a^2 - 2)t^2 + 1\right)^{3/2}}{2a(t^2 + 1)} \quad (5)$$

となる。式 (5) から、

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (6)$$

を解くと、

$$t = 0, \pm \sqrt{\frac{-\left(a^2 + 1\right) + \sqrt{a^4 - 10a^2 + 9}}{2}} \quad \left( \begin{array}{l} 0 < a < \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \leq a \end{array} \right) \quad (7)$$

が得られる。

### 3.4 伸縮された T-曲線による $G^1$ Hermite 補間

T-曲線を伸縮させた曲線群を用いた  $G^1$  Hermite 補間について、次の方法で数值的に解析する。まず、 $c=0$  とし、 $a$  は任意の値に固定する。このような曲線において、2 つのパラメータ値の組  $(t_0, t_1)$  のうち、その間に曲率の極値を持たないものについて、これらのパラメータ間の曲線セグメントを切り出す。その両端点が  $p$ - $q$  平面上で  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  となるように、曲線セグメントを相似変換する。両端点での接線の交点を求め、 $p$ - $q$  平面上にプロットする。この作業を十分多くのパラメータ値の組  $(t_0, t_1)$  について行うことで、接線の交点の存在領域が描画される。

この手法で存在領域を描画した結果を図 5 に示す。存在領域は、 $p$  軸および  $p = 1/2$  に対して対称であるため、図 5 では全体の 1/4 の領域だけが描画されている。

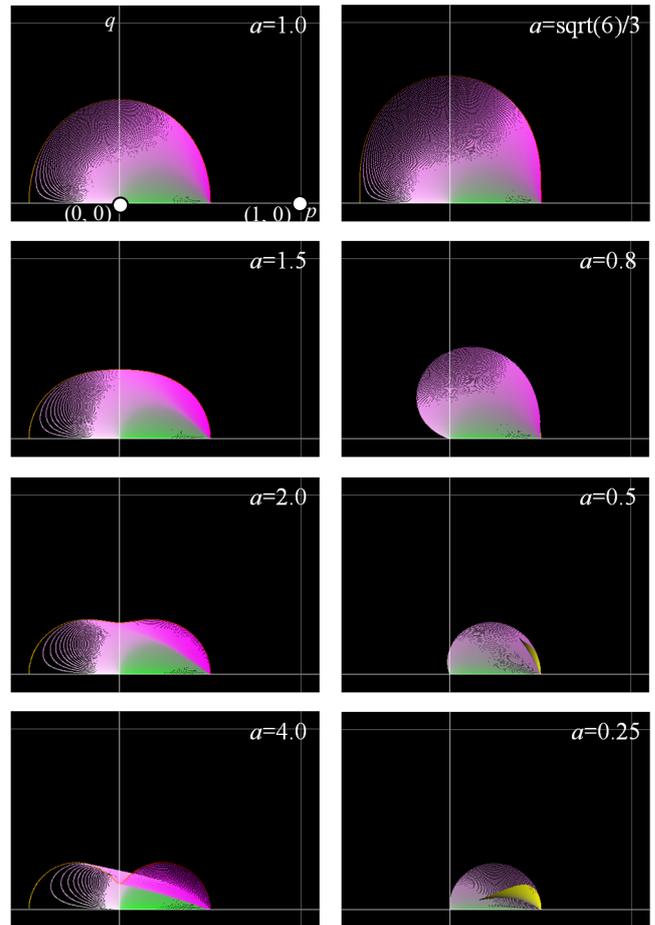


図 5 伸縮された T-曲線による  $G^1$  Hermite 補間 ( $c = 0$ )

Figure 5  $G^1$  Hermite interpolation with scaled T-cubics ( $c = 0$ ).

まず  $a = 1$  のときは、T-曲線そのものである。T-曲線の  $G^1$  Hermite 補間は、Meek らがすでに解析しており、接線交点の存在領域も式 (8) のように解析的に得ている [13] :

$$3p^2 + 4q^2 = 12(p^2 + q^2)^2 \quad (8)$$

今回の描画結果も、これに合致する。

$a \geq \sqrt{6}/3$  のときは、曲率の極値が  $t=0$  だけであるので、 $t > 0$  の区間すべてが曲率単調となり、セグメントとして利用できる。描画結果から、 $a$  が小さいほど、接線交点の存在領域が大きいことがわかる。セグメントの一端が  $t=0$  である場合は、接線交点の位置を解析的に求めることができ、結果は式 (9) のとおりである。

$$3a^2 p^2 + 4q^2 = 12a^2 (p^2 + q^2)^2 \quad (9)$$

$a$  がおおむね 1.5 より小さいときは、存在領域は凸形状であり、式 (9) がその境界と考えられる。しかし、 $a$  がこれより大きくなると、存在領域は凹形状となり、式 (9) の外側にも存在領域が広がる。

$0 < a < \sqrt{6}/3$  のときは,  $t > 0$  の領域内にも曲率の極値が出現するため, 曲率単調な区間が2つに分かれる. 図5においては, これら2区間に対応した接線交点のプロットを, 色で区別している.  $t$  の絶対値が小さい区間が黄-青系, 絶対値が大きい区間が紫-緑系である. 描画結果から,  $a$  の値が小さいほど, 存在領域は小さくなる.

以上の結果から,  $a = \sqrt{6}/3$  のとき, 存在領域は最大となる. このとき, T-曲線と比べて存在領域は広がり, より多くの条件下で補間可能となる.

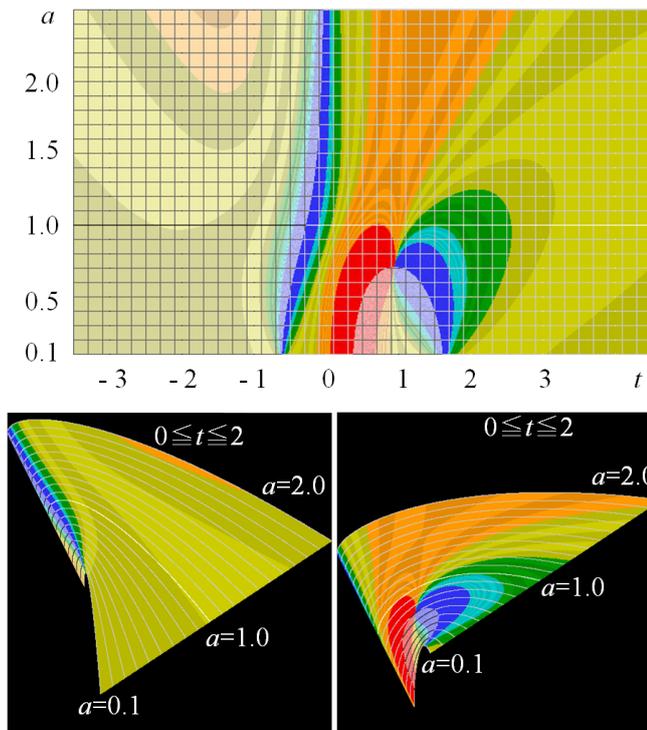


図 6 せん断された T-曲線の曲率解析結果 ( $c = 0.5$ )  
Figure 6 Curvature analysis of skewed T-cubics ( $c = 0.5$ ).

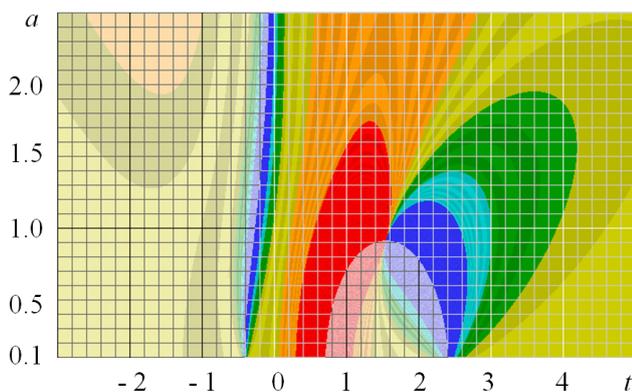


図 7 せん断された T-曲線の曲率解析結果 ( $c = 1$ )  
Figure 7 Curvature analysis of skewed T-cubics ( $c = 1$ ).

### 3.5 せん断されたT-曲線の曲率解析

伸縮に加えてせん断も行った場合について, 3.3 節と同様の方法で曲率の振る舞いを数値的に解析する.

まず,  $c = 0.5, 1$  として,  $a$  を変化させたときの可視化結果を, それぞれ図 6, 図 7 に示す. 色の意味は図 3 と同様である. いずれの場合でも, 曲率の極値は 1 個または 3 個である. せん断により,  $t = 0$  に関する対称性はなくなり,  $c$  の値を大きくするにつれて,  $a$  もより大きく変動することがわかる.

逆に,  $a = 0, 0.5, 1$  として,  $c$  を変化させたときの可視化結果を, 図 8 に示す.

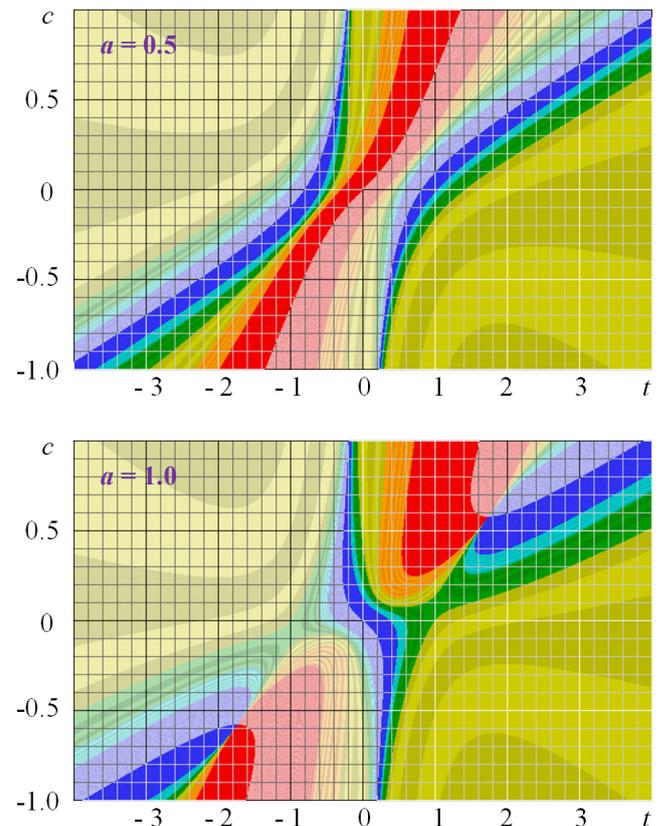


図 8 せん断された T-曲線の曲率解析結果  
Figure 8 Curvature analysis of skewed T-cubics.

## 4. おわりに

本報告では、曲率を単純な式で表現できる Tschirnhausen 3 次曲線をもとに、これをアフィン変換することにより、3 次の多項式パラメトリック曲線のうち crunode (自己交差) を有するものについて、曲率の単調性および曲率対数グラフの傾きを数値的に解析し可視化した。さらに、伸縮の場合について、曲率が極値となる点を解析的に求めるとともに、 $G^1$  Hermite 補間における両端点接線の交点の存在領域を明らかにした。

今後の課題として、せん断を含む場合のさらなる解析、cusp や acnode を持つ 3 次曲線の解析、そして 3 次有理曲線の解析が挙げられる。これらの知見をもとに、3 次パラメトリック曲線を用いて高度に美的な曲線を生成・制御するための理論および方法論の構築を目指したい。

**謝辞** 本研究の一部は、科学研究費補助金 23300034 の助成を受けたものである。

## 参考文献

- 1) Farin, G. E., Sapidis, N., Curvature and the fairness of curves and surfaces, IEEE Compute Graphics and Applications, Vol.9, No.2, pp.52-57 (1989).
- 2) 原田利宣, 森典彦, 杉山和夫, 曲線の物理的性質と自己アフィン性, デザイン学研究, Vol.42, No.2, pp.33-40 (1995).
- 3) Miura, K. T., A general equation of aesthetic curves and its self-affinity, Computer-Aided Design and Applications, Vol.3, Nos.1-4, pp.457-464 (2006).
- 4) Yoshida, N., Saito, T., Interactive aesthetic curve segments, The Visual Computer, Vol.22, Nos.9-11 (Proc. of Pacific Graphics 2006), pp.896-905 (2006).
- 5) Farouki, R. T., Sakkalis, T., Pythagorean hodographs, IBM Journal of Research and Development, Vol.34, No.5, pp.736-752 (1990).
- 6) Walton, D. J., Meek, D. S., A planar cubic Bézier spiral, Journal of Computational and Applied Mathematics Vol.72, pp.85-100 (1996).
- 7) Dietz, D. A., Piper, B., Interpolation with cubic spirals, Computer Aided Geometric Design, Vol.21, pp.165-80 (2004).
- 8) Dietz, D. A., Piper, B., Sebe, E., Rational cubic spirals, Computer-Aided Design, Vol.40, pp.3-12 (2008).
- 9) Walton, D. J., Meek, D. S., Curvature extrema of planar parametric polynomial cubic curves, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol.134, pp.69-83 (2001).
- 10) Habib, Z., Sakai, M., Shapes of parametric cubic curves, 数理解析研究所講義録, Vol.1335, pp.68-75 (2003).
- 11) Wang, Y., Zhao, B., Zhang, L., Xu, J., Wang, K., Wang, S., Designing fair curves using monotone curvature pieces, Computer Aided Geometric Design, Vol.21, No.5, pp.515-527 (2004).
- 12) Yoshida, N., Saito, T., Quasi-aesthetic curves in rational cubic Bézier forms, Computer-Aided Design & Applications, Vol.4, Nos.1-4, pp.477-486 (2007).
- 13) Meek, D. S., Walton, D. J., Hermite interpolation with Tschirnhausen cubic spirals, Computer Aided Geometric Design, Vol.14, pp.619-635 (1997).
- 14) Yoshida, N., Hiraiwa, T., Saito, T., Interactive control of planar class A Bézier curves using logarithmic curvature graphs, Computer-Aided Design and Application, Vol.5, Nos.1-4, pp.121-130 (2008).