文脈空間に関連した拡大言語および縮小言語について*

伊 藤 正 美**

Abstract

In this paper, we introduce the concept of the extension and the restriction of a language associated with the contextual space defined by S. Marcus.

Let $\boldsymbol{L}$ and $\boldsymbol{K}$ be two languages. If the next three conditions are satisfied, we say that $\boldsymbol{K}$ is an extension of the language $\boldsymbol{L}$ and that $\boldsymbol{L}$ is a restriction of the language $\boldsymbol{K}$;

(1) $\boldsymbol{L}$ is contained in $\boldsymbol{K}$ in the sens of set,

(2) $\mathrm{dis}(x, y)_{\boldsymbol{L}} = \mathrm{dis}(x, y)_{\boldsymbol{K}}$ for any phrasis x, y in $\boldsymbol{L}$,

(3) $d(\boldsymbol{L}) < d(\boldsymbol{K})$.

Where, $\mathrm{dis}(x, y)_{\boldsymbol{M}}$ means the distance between the phrasis x and y in the contextual space $\boldsymbol{M}$. By $d(\boldsymbol{M})$, we denote the diameter of the language $\boldsymbol{M}$.

The aim of this paper is a study of the structure of a contextual space in using this concept.

まえがき

この論文においては，S. Marcus によって導入された文脈空間に関連して拡大言語および縮小言語を定義しそれを用いて文脈空間の構造をしらべることをこころみる．

1. 文脈空間

次のかたちで定義される $\boldsymbol{L}$ を言語となづける．

$\boldsymbol{L}=(A, L)$. ここで A は語とよばれる有限個の要素からなる集合，L は A^+ を A の要素の有限列の全体としたときその任意に与えられた部分集合である．すなわち，$A=\{a_i; i=1,2,3,\cdots,n\}$，$A^+=\{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_p}; a_{i_k}\in A, p=1,2,3,\cdots\}$，$L\subset A^+$ とあらわせる．ここで ε が空語であるとは A^+ の任意の要素 x に対して $\varepsilon x=x\varepsilon=x$ なることをいう．さらに $A^*=A^+\cup\{\varepsilon\}$ とおく．次に文脈の定義を与えよう．(u, v) が文脈であるとは，$u, v\in A^*$ なることを意味する．A^+ の任意の要素に対して $C(x)_{\boldsymbol{L}}=\{(u,v); u,v\in A^*, uv\in A^+, uxv\in L\}$ と定義する．以上の準備のもとに A^+ の任意の二要素間に距離をみちびきいれよう．

$x, y\in A^+(x\neq y)$ に対して，$x=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_p=y$, $x_i\in A^+(i=0,1,2,\cdots,p-1)$, $C(x_i)_{\boldsymbol{L}}\cap C(x_{i+1})_{\boldsymbol{L}}\neq\phi$ $(i=0,1,2,\cdots,p-1)$ なるとき上記 $(x_i)(i=0,1,2,\cdots,p)$ を $\boldsymbol{L}$ における x と y を結ぶ鎖となづける．また p をその鎖の長さという．いま，鎖が一つでもみつかれば最小の長さをもつ鎖が存在するわけであるが，この最小の鎖の長さで x と y の間の距離を定義し $\mathrm{dis}(x, y)_{\boldsymbol{L}}$ と記す．次に，$x, y\in A^+(x\neq y)$ に対して上記のような鎖が一つもみいだせないときにはその距離は無限大であるといい $\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{L}}=+\infty$ と記す．任意の $x\in A^+$ に対して x と x の間の距離は零であると定義し $\mathrm{dis}(x,x)_{\boldsymbol{L}}=0$ と記す．このような方法で定義された距離が距離であるための条件をみたしていることをみるのは容易である．以上のごとく距離づけされた言語のことを文脈空間となづける．次に $d(\boldsymbol{L})=\sup_{x,y\in L}\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{L}}$ を言語 $\boldsymbol{L}$ の直径とよぶ．以上の諸概念は S. Marcus[1] による．

2. 拡大言語および縮小言語

次の定義は筆者[2] による．

定義 $\boldsymbol{L}=(A, L)$, $\boldsymbol{K}=(B, K)$ を2つの言語とする．次の四つの条件が成立するとき言語 $\boldsymbol{K}$ を言語 $\boldsymbol{L}$ の拡大言語または言語 $\boldsymbol{L}$ を言語 $\boldsymbol{K}$ の縮小言語とよぶ．

1) $A\subseteq B$, 2) $L\subseteq K$, 3) Lの任意の二要素x, y $(x\neq y)$ に対して $\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{L}}=\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{K}}$, 4) $d(\boldsymbol{L})<d(\boldsymbol{K})$.

この定義より次の命題はただちにみちびかれる．

---

* On the Extension and the Restriction of a Language associated with the Contextual Space, by Masami ITO (Kyoto Sangyo University)

** 京都産業大学理学部

命題　$\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{J}$ を三つの言語とする．$\boldsymbol{K}$ が $\boldsymbol{L}$ の拡大言語，$\boldsymbol{J}$ が $\boldsymbol{K}$ の拡大言語であるならば，$\boldsymbol{J}$ は $\boldsymbol{L}$ の拡大言語である．

3. 拡大言語の存在性

拡大言語の存在については次の定理が成立する．ただしこの結果はすでに論文(2)で論じているので，証明は略し結果のみを記すにとどめる．

定理 I.　$\boldsymbol{L}$を$d(\boldsymbol{L})<+\infty$ なる一つの言語とする．このとき任意の正の整数 n に対して $n=d(\boldsymbol{M})-d(\boldsymbol{L})$ をみたす $\boldsymbol{L}$ の拡大言語 $\boldsymbol{M}$ が存在する．

4. 縮小言語の存在性

上記定理によって任意の言語に対して任意の直径をもつ拡大言語の存在が保障されたが，ここでは逆の問題，すなわち与えられた言語に対する縮小言語の存在性について論じよう．一般的な言語の縮小言語の存在性については簡単な結果しかでていない．ここでは次のような性質をもつ言語について論ずるにとどめよう．

定理 II.　$\boldsymbol{L}=(A, L)$ (ここで $A=\{a_i;\ i=1,2,\cdots,n\}$) は次のような性質をもつ言語である．

(イ) 任意の L の要素 x が $x=uyv(u, v\in A^*,\ y\in A^+)$ と分解されるとき y もまた L の要素である．

(ロ) 任意の L の要素 x に対して A^* の二要素 u, v (ただし $uv\in A^+$) が存在して uxv が L に属する．

(ハ) A の任意の要素 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ に対して A^* の要素 $w(i,i)$ が存在して $a_iw(i,i)a_i$ が L に属する．このとき次の二つの場合のすくなくともいずれかが成立する．

(1) $d(\boldsymbol{L})\leq 2n$

(2) $d(\boldsymbol{M})\leq p(n)$ をみたす $\boldsymbol{L}$ の縮小言語 $\boldsymbol{M}$ が存在する．ただしここで $p(n)=n$ (n が偶数のとき)，$=n-1$ (n が奇数のとき)．

(注) 上記定理の仮定をみたす言語の例としてたとえば次のようなものがある．$A=\{a,b,c\}$，$L=\{a^n\}\cup\{b^m\}\cup\{a^pb^q\}\cup\{c^r\}$ (ただし $n, m, p, q, r=1,2,3,\cdots$) としたときの $\boldsymbol{L}=(A,\ L)$．

定理の証明　まず次のことに注意しておこう．$x\in L$としたとき，$C(x)_{\boldsymbol{L}}$ の任意の要素 (u, v) をとりあつかう場合 (a,ε) あるいは (ε,a) (ただし，ここで $a\in A$) のかたちをしているものに限定して議論してよい．なぜならば，たとえば $(u,v)\in C(x)_{\boldsymbol{L}}\cap C(y)_{\boldsymbol{L}}$ としたとき $uxv\in L$, $uyv\in L$ より仮りに $u\neq\varepsilon$ の場合を考えると $u=u_1u_2$ (ここで $u_1\in A^*$, $u_2\in A$) と分解されるから，$u_1u_2xv\in L$, $u_1u_2yv\in L$ が成立する．したがって L の性質 (イ) より $u_2x\in L$, $u_2y\in L$ が成立する．すなわち $(u_2,\varepsilon)\in C(x)_{\boldsymbol{L}}\cap C(y)_{\boldsymbol{L}}$ が成りたつ．$v\neq\varepsilon$ の場合も同様の議論がなされる．このことから，Lの二要素 x, y に関して $\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{L}}<+\infty$ がなりたつとき，$\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{L}}\leq 2n$ となることをいっておこう．$\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{L}}=m$ とする．$(x_i)(i=0,1,2,\cdots,m)$ (ただし $x=x_0, x_m=y, x_i\in A^+$) を x と y を結ぶ長さ m の $\boldsymbol{L}$ における鎖とする．さきに述べた注意より $C(x_i)_{\boldsymbol{L}}\cap C(x_{i+1})_{\boldsymbol{L}}(i=0,1,2,\cdots,m-1)$ は (a,ε) または (ε,a) $(a\in A)$ のかたちの合計 $2n$ 個の文脈のなかのいずれかを含む．いま $m>2n$ とすれば正の整数 i, j (ただし $0\leq i<j\leq m-1$) および $a\in A$ が存在して $C(x_i)_{\boldsymbol{L}}\cap C(x_{i+1})_{\boldsymbol{L}}$ および $C(x_j)_{\boldsymbol{L}}\cap C(x_{j+1})_{\boldsymbol{L}}$ が文脈 (a,ε) あるいは (ε,a) のすくなくともいずれかを共通に含むことになる．したがってこの場合 $C(x_i)_{\boldsymbol{L}}\cap C(x_{j+1})_{\boldsymbol{L}}$ は (a,ε) か (ε,a) のすくなくともいずれかを含む．すなわち，$C(x_i)_{\boldsymbol{L}}\cap C(x_{j+1})_{\boldsymbol{L}}\neq\phi$ がなりたつ．このことより $x=x_0, x_1, x_2,\cdots, x_i, x_{j+1}, x_{j+2},\cdots, x_m=y$ は x と y を結ぶ $\boldsymbol{L}$ における鎖となる．ところがこの鎖の長さは $m-1$ をこえない．これは $\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{L}}=m$ に矛盾する．したがって $m\leq 2n$，すなわち $\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{L}}\leq 2n$ がなりたつ．

以上の準備のもとに定理の証明にとりかかる．まず，$n=1$ のとき定理の仮定をみたす言語は $\boldsymbol{L}=(\{a\}, \{a^n;\ n=1,2,3,\cdots\})$ というかたちで一意的にきまりこのとき $d(\boldsymbol{L})=1$ となり定理は成立する．したがって数学的帰納法を用いることができる．ここで記号〜および≈を次のようにして導入する．$a_i\sim a_j$ であるとは，ある $w(i,j)\in A^*$ が存在して $a_iw(i,j)a_j\in L$ かあるいは $a_jw(i,j)a_i\in L$ のすくなくともいずれかが成立することをいう．次に $a_i\approx a_j$ であるとは，数列 $\{i_p\}(p=0,1,2,\cdots,m)$ が存在して，$i=i_0, i_m=j, a_{i_p}\sim a_{i_{p+1}}(p=0,1,2,\cdots,m-1)$ が成立することを意味する．次に $A_i=\{a_k;\ a_i\approx a_k\}$ とおく．

A_i の性質

1) $a_i\in A_i$　　2) $a_i\in A_k$ ならば $a_k\in A_i$

このことから次のことがいえる．

$A=\bigcup_i A_i$，また任意の $i(i=1,2,\cdots,n)$ に対して $A_i\neq\phi$．したがってこの場合次の二つの場合のいずれか一方のみが成立することに注意する．

(1) 任意の $i(i=1,2,\cdots,n)$ に対して $A_i=A$

（2） ある i と j が存在して $A_i \cap A_j = \phi$.

（1）の場合　u, v を L の任意の二つの要素とする．このとき dis$(v,v)_L<+\infty$，したがって dis$(u,v)_L \leq 2n$ なることを証明しよう．L の性質（イ）および（ロ）より，ある $a_i \in A$ が存在して $a_i u \in L$ か $u a_i \in L$ のすくなくともいずれかが成立する．同様に，ある $a_j \in A$ が存在して $a_j v \in L$ か $v a_j \in L$ のすくなくともいずれかが成立する．次に $a_i \approx a_j$ より，ある数列 $\{i_p\}(p=0,1,2,\cdots,m)$ が存在して，$i_0=i, i_m=j$, $a_{i_p} \sim a_{i_{p+1}}$, $i_p \neq i_{p+1} (p=0,1,2,\cdots,m-1)$ が成立する．ところで，上記の列のえらび方で各 $a_{i_p}\sim a_{i_{p+1}}$ に対応する $w(i_p,i_{p+1})\in A^*$ が $w(i_p,i_{p+1})\neq\varepsilon$ とえらべることに注意しよう．まずこれを証明する．いま，かりに $w(i_p,i_{p+1})=\varepsilon$ としよう．すると $a_{i_p}a_{i_{p+1}}\in L$ か，あるいは $a_{i_{p+1}}a_{i_p}\in L$ のすくなくともいずれかが成立する．$a_{i_p}a_{i_{p+1}}\in L$ の場合で考えてみよう（$a_{i_{p+1}}a_{i_p}\in L$ の場合も同様に証明される）．L の性質（イ）および（ロ）よりある $a_k\in A$ および $w\in A^+$ が存在して $a_k w a_{i_p} a_{i_{p+1}}\in L$ か $a_{i_p}a_{i_{p+1}} w a_k \in L$ のすくなくともいずれかが成立する（ここで $k\neq i_p, k\neq i_{p+1}$ を仮定してよい）．したがっていずれの場合においても $a_{i_p}\sim a_k$ および $a_k\sim a_{i_{p+1}}$ が成立し $w(i_p,k)\in A^+, w(k,i_{p+1})\in A^+$ とえらべる．ゆえに $a_{i_p}\sim a_{i_{p+1}}$ を $a_{i_p}\sim a_k, a_k\sim a_{i_{p+1}}$ でおきかえることによって上で注意したことがなりたつ．したがって各 $a_{i_p}\sim a_{i_{p+1}}$ に対応して $w(i_p,i_{p+1})\in A^+$ がえらべる．次に，$w(i_p,i_p)=\varepsilon$ のとき $w'(i_p,i_p)=a_{i_p}$，また $w(i_p,i_p)\neq\varepsilon$ のとき $w'(i_p,i_p)=w(i_p,i_p)$ とおく．

ここで次のような A^+ の列を考える．

u, $w'(i_0,i_0)$, $w(i_0,i_1)$, $w'(i_1,i_1)$, $w(i_1,i_2)$, $\cdots$, $w(i_{m-1},i_m)$, $w'(i_m,i_m)$, v.

このとき，この列が $\boldsymbol{L}$ における u と v を結ぶ鎖であることが次のようにしてわかる．まず，$w'(i_p,i_p)(p=0,1,2,\cdots,m)$ の性質をみる．$w(i_p,i_p)=\varepsilon$ のときは，$w'(i_p,i_p)=a_{i_p}$ でこのとき $a_{i_p}^2\in L$ より $C(w'(i_p,i_p))_L \supset \{(a_{i_p},\varepsilon),(\varepsilon,a_{i_p})\}$ となる．一方 $w(i_p,i_p)\neq\varepsilon$ のときは，$w'(i_p,i_p)=w(i_p,i_p)$ よりこのとき $a_{i_p}w'(i_p,i_p)a_{i_p}\in L$ となり，L の性質（イ）より $C(w'(i_p,i_p))_L\supset\{(a_{i_p},\varepsilon),(\varepsilon,a_{i_p})\}$ となる．したがって，いずれの場合においても $C(w'(i_p,i_p))_L\supset\{(a_{i_p},\varepsilon),(\varepsilon,a_{i_p})\}$ が成立する．次に $C(u)_L$ は (a_{i_0},ε) か (ε,a_{i_0}) のうちすくなくともいずれかを含むから $C(u)_L\cap C(w'(i_0,i_0))_L\neq\phi$ が上のことを用いてわかる．同様に $C(w'(i_m,i_m))_L\cap C(v)_L\neq\phi$ も成立する．次に $w(i_q,i_{q+1})(q=0,1,2,\cdots,m-1)$ に関しては，$a_{i_q}w(i_q,i_{q+1})a_{i_{q+1}}\in L$ か $a_{i_{q+1}}w(i_q,i_{q+1})a_{i_q}\in L$ のすくなくともいずれかがなりたつから，$C(w(i_q,i_{q+1}))_L\supset\{(a_{i_q},\varepsilon),(\varepsilon,a_{i_{q+1}})\}$ か $C(w(i_q,i_{q+1}))_L\supset\{(a_{i_{q+1}},\varepsilon),(\varepsilon,a_{i_q})\}$ のうちすくなくともいずれかがなりたつ．したがって $C(w'(i_p,i_p))_L$ の性質とあわせて次のことがわかる．$C(w'(i_p,i_p))_L\cap C(w(i_p,i_{p+1}))_L\neq\phi$ かつ $c(w(i_p,i_{p+1}))_L\cap C(w'(i_{p+1},i_{p+1}))_L\neq\phi$（ただし $p=0,1,2,\cdots,m-1$）．以上の理由から上記 A^+ の列は $\boldsymbol{L}$ における u と v を結ぶ鎖となる．したがってこの場合，dis$(u,v)_L<+\infty$ がなりたつ．ゆえに dis$(u,v)_L\leq 2n$ が成立する．すなわち $d(\boldsymbol{L})\leq 2n$ が証明された．

（2）の場合　ある i および j が存在して $A_i\cap A_j=\phi$ より A_i, A_j のうちすくなくとも一つは要素の数が $p(n)/2$ をこえない．ここで A_i をこのような A の部分集合とし，また $\boldsymbol{M}^i=\{x; x\in L$ かつ x を構成する A の各語は A_i の要素$\}$ とおく．ここでまず次のことに注意しておこう．

$x\in M^i$ かつ $uxv\in L(uv\neq\varepsilon)$ なるとき，$uxv\in M^i$ が成立する．したがってLの性質から，$\boldsymbol{M}^i=(\{a_i\},M^i)$ とおいたとき，$\boldsymbol{M}^i$ が定理の条件をみたす言語でかつ A_i の要素の数は $p(n)/2$ をこえない．ゆえに数学的帰納法より $d(\boldsymbol{M}^i)\leq 2\cdot p(n)/2=p(n)$ かあるいはその直径が $p(n)/2$ をこえない $\boldsymbol{M}^i$ の縮小言語が存在する．したがって $\boldsymbol{M}^i$ が $\boldsymbol{L}$ の縮小言語であることをいっておけば定理は成立する．$M^i\subset L$（このことは $A_i\subset A$ より明白）より，$u,v\in M^i$ としたとき $\boldsymbol{L}$ における u と v を結ぶ鎖が同時に $\boldsymbol{M}^i$ における鎖であることをいえば十分である．$u=u_0,u_1,u_2,\cdots,u_m=v$ を $\boldsymbol{L}$ における鎖であるとする．したがって次のような文脈の列が存在する．$\{(x_p,y_p); x_p,y_p\in A^+, x_pu_py_p\in L, x_pu_{p+1}y_p\in L, p=0,1,2,\cdots,m-1\}$．ここでさきに述べた注意，すなわち "$u_k\in M^i$ かつ，$x_ku_{k+1}y_k\in L$ ならば $u_{k+1}\in M^i$ かつ $x_ku_{k+1}y_k\in M^i$ が成立する" を用いると $u_0\in M^i$ より数学的帰納法を用いて，列 $\{(x_p,y_p)\}$ で $x_py_p\in A_i^+$, $x_pu_py_p\in M^i$, $x_pu_{p+1}y_p\in M^i$（ただし $p=0,1,2,\cdots,m-1$）かつ $u_s\in M^i(s=0,1,2,\cdots,m-1,m)$ がいえる．

したがって，$u=u_0,u_1,u_2,\cdots,u_{m-1},u_m=v$ は $\boldsymbol{M}^i$ における u と v を結ぶ鎖となり証明は完了する．

5. $n=2,3,4$ の場合

上記定理 II は論文（2）の結果の拡張である．これより $n=2,3$ の場合について論じよう．$n=2$ については論文（2）ですでに述べているが，$n=3$ の場合の証明に必要なのでくりかえす．

定理 III $\boldsymbol{L}=(A, L)(A=\{a, b\})$ は定理IIでのべた（イ），（ロ）の条件をみたす言語であるとする．このとき，次の二つの場合のすくなくともいずれかがなりたつ．

（1） $d(\boldsymbol{L})\leq 2$

（2） $d(\boldsymbol{M})=1$ をみたす $\boldsymbol{L}$ の縮小言語 $\boldsymbol{M}$ が存在する．

証明 $m_a=sup\{k; a^k\in L\}, m_b=sup\{t; b^t\in L\}$ とおく．ただしこのような値が存在しないときは，$m_a=0$ あるいは $m_b=0$ とおく．$m_a=0$ のときは，L の性質（ロ）より $m_b=+\infty$ となりこのとき，L の性質（イ）より $L=\{b^n; n=1,2,3,\cdots\}$ となり，したがって $d(\boldsymbol{L})=1$ となって定理は成立する．$m_b=0$ のときも同様に $d(\boldsymbol{L})=1$ なることがいえる．次に $m_b\neq 0$, $m_a=+\infty$ のときは $\boldsymbol{L}$ の性質（イ）より $M=\{a^n; n=1,2,3,\cdots\}\subset L$ となり，$\boldsymbol{M}=(\{a\}, M)$ が $d(\boldsymbol{M})=1$ をみたす$\boldsymbol{L}$の縮小言語となる．$m_a\neq 0$, $m_b=+\infty$ のときも同様にして $d(\boldsymbol{M})=1$ をみたす $\boldsymbol{L}$ の縮小言語 $\boldsymbol{M}$ の存在がいえる．したがって $0<m_a<+\infty$, $0<m_b<+\infty$ を仮定する．

次の三つの場合にわけて考える．

（1） $a\in L$, $b\in L$, $a^2\notin L$, $b^2\notin L$

（2） $a\in L$, $b\in L$, $a^2\in L$

（3） $a\in L$, $b\in L$, $b^2\in L$.

（1）の場合 L の性質（イ），（ロ）より，このとき $L=\{a\}\cup\{b\}\cup\{(ab)^n; n=1,2,3,\cdots\}\cup\{b(ab)^p; p=1,2,3,\cdots\}\cup\{(ab)^q a; q=1,2,3,\cdots\}\cup\{(ba)^r; r=1,2,3,\cdots\}$ となることがわかる．このとき $C(a)_L\cap C(b)_L=\phi$ より $d(\boldsymbol{L})=+\infty$ であるが，$M=\{(ab)^n; n=1,2,3\cdots\}$ とおいたとき $M\subset L$ となり，かつ $\boldsymbol{M}=(A, M)$ は $d(\boldsymbol{M})=1$をみたす言語より，$\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{L}$ の直径1の縮小言語となって定理は成立する．

（2）の場合 $a^{m_a}\in L$ および L の性質より $ba^{m_a}\in L$ か $a^{m_a}b\in L$ のすくなくともいずれかが成立する．たとえば，$ba^{m_a}\in L$ なら，ある正の整数 $k(k\leq m_b)$ が存在して，$ab^k a^{m_a}\in L$ かあるいは $b^k a^{m_a} b\in L$ のすくなくともいずれかが成立する．したがっていずれの場合においても，$ab\in L$, $ba\in L$ が成立する．$a^{m_a}b\in L$ の場合も同様のことがいえる．したがって L の任意の二要素 u, v に関して，u, a, v が $\boldsymbol{L}$ における鎖であることをみるのは容易である．したがって $\mathrm{dis}(u, v)_L\leq 2$ がいえ $d(\boldsymbol{L})\leq 2$ がなりたつ．

（3）の場合 （2）の場合の手法がつかえて $d(\boldsymbol{L})\leq 2$ が成立する．

定理 IV $\boldsymbol{L}=(A, L)(A=\{a_i; i=1,2,3\})$ は定理 II でのべた（イ），（ロ）の条件をみたす言語であるとする．このとき次の二つの場合のすくなくともいずれかがなりたつ．

（1） $d(\boldsymbol{L})\leq 6$

（2） $d(\boldsymbol{M})=1$ をみたす $\boldsymbol{L}$ の縮小言語 $\boldsymbol{M}$ が存在する．

証明 まず次の二つの場合にわけて考える．

（i） すべての $i(i=1,2,3)$ に対して $a_i\sim a_i$ がなりたつ．

（ii） ある $i_0(i_0=1,2,3)$ に関しては $a_{i_0}\sim a_{i_0}$ とはならない．

（i）の場合 定理 II より，$d(\boldsymbol{L})\leq 6$ であるか，$\boldsymbol{L}$ は直径が2をこえない縮小言語をもつ．後者の場合，縮小言語のきめ方でしめしたように，ある i および $j(1\leq i, j\leq 3)$ が存在して $A_i\cap A_j=\phi$．したがってある $i_0(1\leq i_0\leq 3)$ が存在して A_{i_0} は A のただ一つの要素からなる集合となる．このとき，$\boldsymbol{M}^{i_0}=(A_{i_0}, M^{i_0})$ が L の縮小言語であるが，A_{i_0} は唯一の要素からなる集合だから，$\boldsymbol{M}^{i_0}$ は実は$\boldsymbol{L}$の直径1の縮小言語である．

（ii）の場合 $a_{i_0}\in L$ を仮定してよい．次に，L の性質より，A^+ の要素の無限列 $\{w_p\}(p=1,2,3,\cdots)$ が存在して任意の p に対して，$w_p w_{p-1}\cdots w_1 a_{i_0}\in L$ が常になりたつか，あるいは任意の q に対して $a_{i_0}w_1 w_2\cdots w_{q-1}w_q\in L$ が常になりたつかのすくなくともいずれか一方が成立する．ここでは $w_p w_{p-1}\cdots w_1 a_{i_0}\in L$ の場合を考える（$a_{i_0}w_1 w_2\cdots w_{q-1}w_q\in L$ の場合も同様の推論がはこべる）．いま，$W=\{w_p w_{p-1}\cdots w_1; p=1,2,3,\cdots\}$ とおく．まず，W の要素は a_{i_0} を含まないことに注意しよう．すなわち $a_{i_1}, a_{i_2}\in A$（ただし $i_0\neq i_1$, $i_0\neq i_2$, $i_1\neq i_2$）のみからなる A^+ の部分集合である．ここで $V=\{x; uxv\in W, uv\in\{a_{i_1}, a_{i_2}\}^*\}$ とおき言語 $\boldsymbol{V}=(\{a_{i_1}, a_{i_2}\}, V)$ を導入する．この V が定理IIの条件（イ），（ロ）をみたすことをみるのは容易である．したがって定理 III より，$d(\boldsymbol{V})\leq 2$ であるかあるいはまた，$d(\boldsymbol{M})\leq 1$ をみたす $\boldsymbol{V}$ の縮小言語 $\boldsymbol{M}$ が存在するかのいずれかである．後者の場合，$V\subset L$ より，M は L における縮小言語でもあり，定理が成立する．したがって，$d(\boldsymbol{V})\leq 2$ の場合を問題にしよう．この場合，定理 III の証明でみられるように，$a_{i_1}\in V$, $a_{i_2}\in V$, $a_{i_1}{}^2\in V$および$a_{i_1}a_{i_2}\in V$, $a_{i_2}a_{i_1}\in V$ を仮定してよい．したがって，任意の L の要素 x, y に対して $\mathrm{dis}(x, y)_L<+\infty$ をいえば十分である．$x, y\in V$ のときは，$\mathrm{dis}(x, y)_L\leq\mathrm{dis}(x, y)_V\leq 2$ が成立する．次

に $x \in L-V$, $y \in L$ のときは，まず L の性質より，ある $k(1 \leq k \leq 3)$ が存在して $a_k x \in L$ か $x a_k \in L$ のいずれかが成立する．いま，$a_k x \in L$ の場合で考える（$x a_k \in L$ の場合も同様の推論がはこべる）．いま $a_k \neq a_{i_0}$ のときは，x, a_{i_1} が $\boldsymbol{L}$ における鎖となることに注意しよう．

次に，$a_k = a_{i_0}$ とする．したがってこの場合，$x = x_1 x_2 (x_1 \in A, x_2 \in A^*)$ と分解されて $x_1 \neq a_{i_0}$ である．したがって，x_1, a_{i_1} が $\boldsymbol{V}$ における鎖となり，また一方 x, x_1 は $\boldsymbol{L}$ における鎖となるから x, x_1, a_{i_1} は $\boldsymbol{L}$ における鎖となる．ゆえにいずれの場合においても $\mathrm{dis}(x, a_{i_1})_{\boldsymbol{L}} \leq 2$ がなりたつ．同様に $y \in L-V$ のときは $\mathrm{dis}(a_{i_1}, y)_{\boldsymbol{L}} \leq 2$ となり，また $y \in L$ の場合は $\mathrm{dis}(a_{i_1}, y)_{\boldsymbol{L}} \leq \mathrm{dis}(a_{i_1}, y)_{\boldsymbol{V}} \leq 2$ が成立する．したがって $y \in L$ に対して，$\mathrm{dis}(x, y)_{\boldsymbol{L}} \leq \mathrm{dis}(x, a_{i_1})_{\boldsymbol{L}} + \mathrm{dis}(a_{i_1}, y)_{\boldsymbol{L}} \leq 4$ がなりたつ．したがって証明は完了した．

$n=4$ の場合もほとんど同様の推論によって次の定理が成立する．

定理 V $\boldsymbol{L}=(A, L)(A=\{a_i ; i=1,2,3,4\})$ は定理 II でのべた（イ），（ロ）の条件をみたす言語であるとする．このとき，次の二つの場合のすくなくともいずれかがなりたつ．

（1） $d(\boldsymbol{L}) \leq 8$

（2） $d(\boldsymbol{M}) \leq 2$ をみたす $\boldsymbol{L}$ の縮小言語 $\boldsymbol{M}$ が存在する．

む す び

すでに述べたように，拡大言語の存在を論ずる場合にくらべて縮小言語の存在性を一般的に論ずることはやさしくない．文脈空間における距離は多くの場合それぞれの言語の特殊性に応じているからだと思われる．今後の計画としては，自然言語に関して議論をおこないたいがその前提として文脈自由型言語（context-free language）について論じておく必要があるように思われる．なお，本稿でとりあつかった諸概念の言語学的な意義づけに関しては S. Marcus の著書（1）および筆者の論文（2）を参照されたい．

参 考 文 献

1) S. Marcus: Introduction mathématique à la linguistique structurale, Dunod, 1967.
2) M. Ito: Quelques remarques sur l'espace contextuel, 計量国語学第 57 号, 1971, pp. 18～28.