

講座

FINITE ELEMENT METHOD†

(2) 応用編

高瀬 啓元†† 増田 潔††

まえがき

前回は FEM の基礎編として弾性体の解析を中心として有限要素法の概要を示した。FEM は過去十数年のうちに電算技術の進歩と共に非常な発展を遂げ成果を挙げた。この手法は主として建築、土木、航空、船舶等の静的構造物設計のための解析に用いられてきたが、その優れた技術はこれら静的弾性体力学系のものに止まらず、動的力学系、弾塑性体、粘熱弾性体、非線形流体等連続体をあつかうあらゆる分野に応用される可能性をもつ。実際最近の研究発表例をあげてみる。

- ヘルムホルツ型電磁場の解析、
- 土の浸透圧と弾性体との連成問題、
- 圧縮性粘性流体と弾性体の連成振動問題、
- 生体の応力解析 (眼球他)

等々あらゆる“場”およびそれらの連成場に、適用が試みられている様子がわかる。今回の応用編の主旨は、FEM の広い可能性・発展性を示すことである。筆者らは建設物の構造解析にたずさわっているので、あまり目新しい応用にはふれられないことをお断りしておく。

それでも単なる弾性体の静的な解析に止まらない例もいくつか経験しているので、それらにもとづいて話を進めよう。第Ⅰ節では動的問題に対する適用についてのべる。第Ⅱ節では弾塑性体解析の例として鉄筋コンクリート構造物の解析について、第Ⅲ節では非力学系の例として定常温度分布を求める解析を説明しよう。

Ⅰ. 動的問題

ここで動的というのは時刻変化のある系のことであ

る。筆者らのたずさわる土木建築構造物設計ではタワー、タンク、ダム、橋等の耐震、耐風、機械基礎の防振等が重要な問題であり、FEM の利用が始まっている。FEM を用いる解析では、静的な釣合式である偏微分方程式は連立方程式におきかえられた。動的な釣合式は連立常微分方程式に帰着させることができる。

実際、振動問題等に対して FEM の初期より現在に至るまでよく利用される方法として、FEM による剛性行列をそのまま採用し、分割点に適当な判断で質量を付加し、減衰項も工学的判断で加えて連立常微分方程式を定め解析することは多い。弾性体の場合なら、下の運動方程式のうち第 3 項にのみ FEM を部分的に利用するわけで、FEM の動的問題はとりたてて研究する必要もないようにみえる。

$$[M]\ddot{y} + [C]\dot{y} + [K]y = P(t).$$

ここに第 1 項は慣性力の項、第 2 項は減衰力の項、第 3 項が弾性復元力、右辺は時刻変化のある外乱項。

しかしながらこのような定式化そのものにも、数値記法上もやはりいくつかの特有の問題点が生じ残されている。ここではそれらを列挙して事情を説明しよう。

- a) 質量行列の評価法。
- b) 減衰力の定式化。
- c) 自由度の縮退法。
- d) 固有振動の計算法。
- e) 常微分方程式の数値解析法。
- f) 常微分方程式の数値解析法を利用しない解法。

質量に関しては集中質量と適合質量とがあり、前者は格子点周辺の質量を適当に見積って質点としたものである。後者は FEM の考え方すなわち要素内の変位分布を仮定してひずみエネルギーを処理したことに忠実に速度の分布も仮定して速度エネルギーを処理して質量行列を定める方法である。前者の質量行列が対角行列になるのに対し後者は非対角要素が零にならず、数式のとりあつかい上複雑となる。いずれによるべき

† Finite Element Method (2) Applied Course, by Hiromoto Takase and Kiyoshi Masuda (Kajima Corp. Computation Center and Muto Inst.)

†† 鹿島建設(株) 電子計算センター兼武蔵研究室

か議論の分れる点である。減衰力に関しては FEM の問題というよりは構造物振動解析そのものの残された問題であり、内部減衰、履歴減衰、各部分で異なる減衰等の定式化には難点が多い。(c)の Reduction の必要性についてのべれば、なめらかな応力、変形の分布を求めるのに用いる自由度と、振動系の性状をあらわすのに十分な自由度とは当然異なり、両者を等しくするのは合理的でないからである。その縮退法にも工学的判断をとり入れる方法、ほとんど自動的に自由度を低下させる方法等いくつかあるが評価は定まっていない。

固有振動、常微分の数値解法共一般論としてはよく研究されている分野である。が自由度が大きいこと、行列として零の多い特殊な形をしていること、あまり高次成分は必要ないこと、数値積分はステップ数が多いこと等の特殊性もあり、数値解析の常用手段をそのまま用いることは得策とはいえず、研究の余地がある。

なお最後にあげたのは常微分方程式を経過せずに有限差分方程式を導く方法で、空間的要素および変位分布の仮定を時間的にも拡張したものである。ユニークな考えであるが近似式としての実用性はまだいえる段階ではない。このように多くの問題を残しながら動的問題に対しての FEM の利用は増す一方であり、設計に利用されている。筆者等の解析した動的問題で FEM を一部または全面的に適用した例を挙げれば、

- a) 沈埋函(河底トンネル)の地震応答解析、
- b) 傾斜地盤の地震特性、
- c) コンクリート地下タンクの地震応答解析、
- d) 超高タワーの振動解析、
- e) 建物基礎地盤系の振動解析

等があり、地盤、コンクリート等の部分を FEM でモデル化している。ここでは例として地下タンクの解析についてのべよう。図 1 に略図を示したのは地下に埋込まれたコンクリート円形タンクであり、可燃物等の貯蔵のため高い安全性が要求されている。耐震上の検討も必要であり地盤との相互作用を考慮して研究が進められている。ここでは軸対称構造物の非対称荷重解析用の FEM を利用した例を示す。これは円周方向にはフーリエ級数を利用し、立体を平面的な要素で解くものである。質量に関しては適合質量を利用し、さらにいくつかの加速度分布パターンのみを採用して自由度を低下させている。図 2, 3, 4 は 1 次、5 次、7 次の固有振動形を示す。実線は静止状態の FEM メッシュ

を示し、点線がモードである。静荷重の解析、固有振動の解析後、地震時の動的解析として実地震波によるシミュレーションを行なった。基盤より Elcentro 地震波加速度を入力し、タンク、地盤の時々刻々の変位、加速度、応力度等を計算して設計の資料とするものである。図 5 はこの地震応答結果の最大変位を、図 6 は最大応力の例としてせん断応力度の最大値分布を示す。このような単純化されたモデルの結果をうのみにするのは危険であるが、FEM ならではと思われる使用分野である。

II. 非線形弾塑性問題

いままであつかった線形弾性問題と異なり、塑性状態ではひずみと応力の関係が線形とならない。しかも同一のひずみで同一の応力状態が得られるとはかぎらず、その状態に達するまでの経過もまた応力状態を支配する。一方変位、変形が進むと微小変位、変形を仮定した解析に不都合が生ずることもある。大きな変位に対しては変位後の座標での釣合を考えねばならないし、大きなひずみに関しては高次の微分項が無視できない。

この他特殊な材料特性、特殊な構造メカニズム等をモデル化するのに非線形なモデルが必要となる。これらの非線形モデルを解くのに広く用いられるのは増分法といわれる手法で、外力を微小ずつ増しながら弾性定数を変更しつつ追跡する方法である。この類に外挿内挿反復法等常微分方程式の数値解法上の各種の手法を用いた方法がある。いずれにせよ微小な変位増分に対する荷重増分の式を導く必要があり、これは線形の場合の剛性行列にかわる局所的な勾配を示す行列である。

この行列の性質によっては解法に工夫が必要であるが、通常オイラー法がよく用いられる他、中点則、ルンゲクッタ法、台形則に基づく方法もとられる。

増分法以外の方法としては、応力、ひずみ関係を直接用いて反復する方法や剛性行列は変えずに外力の不釣合分を修正していく方法等があり各々長所をもつ。

いずれにせよ非線形問題は計算方法まで含めた検討が必要で研究が進められている段階であるが、FEM を用いて初めて数値的に可能となった問題も多く、今後注目すべき分野である。

ここでは最近筆者等の開発した鉄筋コンクリート部材の弾塑性クラック解析プログラムを紹介し、そのコンクリート容器実験モデルへの適用例をのべる。

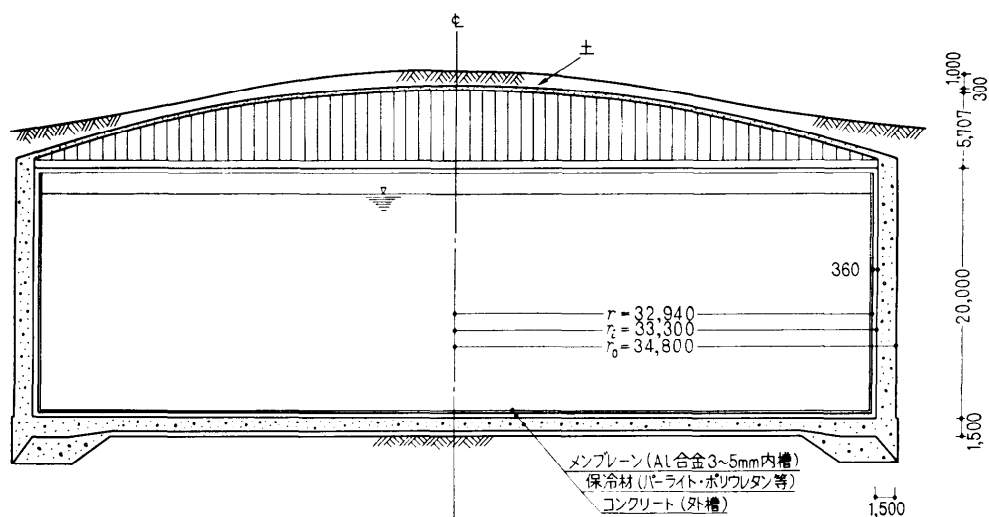


図1 LNG 地下タンク概要

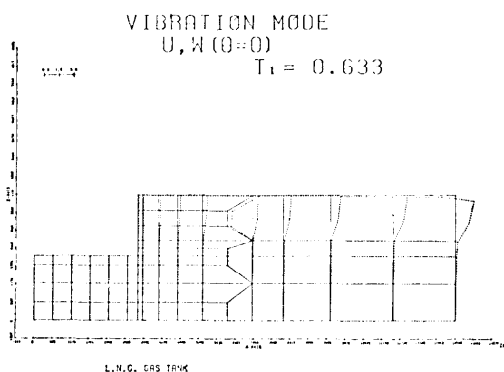


図2 1次モード

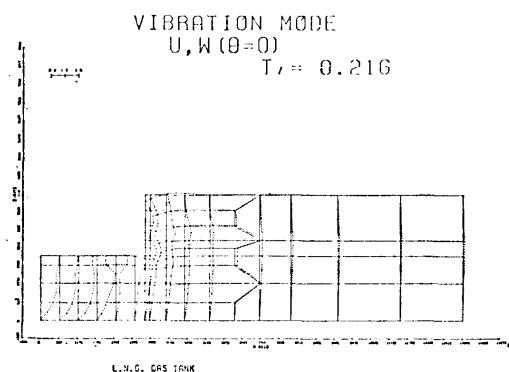


図4 7次モード

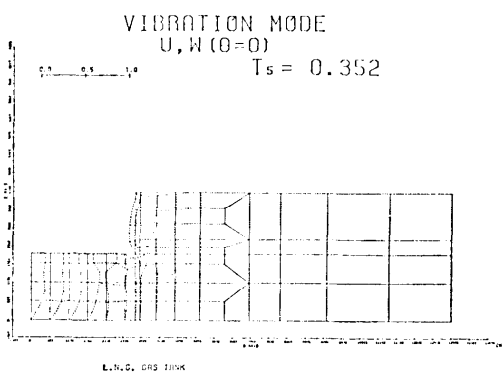


図3 5次モード

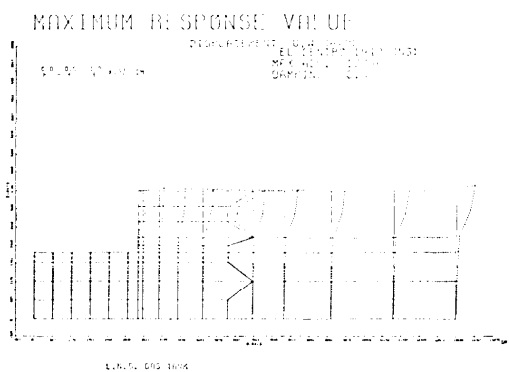


図5 応答最大変位

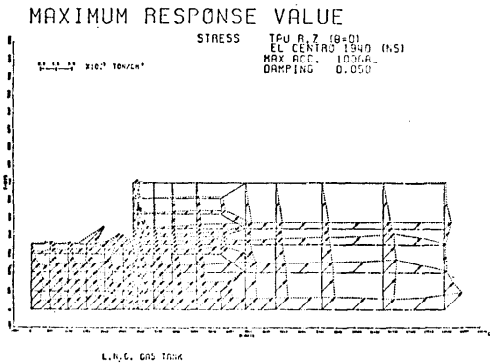


図6 応答最大せん断応力度

ここであつかう対象は、鉄筋、コンクリート、両者を結びつけるボンド等の複合物であり、解析上もこれらを異なる特性をもつ要素と考えてあつかう。図7に示すようにコンクリート要素は任意4辺形要素で、鋼材(PC線、鉄筋)を線材要素で分割し、両者を結ぶボンドをバネ要素として三者に独自の非線形性および破壊性を考慮する。増分法に基づき荷重を微小単位ずつ上げて各ステップ毎に各要素の降伏、破壊の判定を行ない剛性を変更していく。コンクリートの単軸応力状態での応力ひずみ関係は図8に示すような3線分で近似する。これを2軸状態に変換するのに図9に示すような降伏破壊域を考える。降伏、破壊は要素中央の有効歪より判定する。弾塑性、片方向亀裂状態等では異方性体としてあつかう。線材要素、バネ要素はよく用いられるバイリニア特性に破断を考慮したものを採用する。ここで応用例としてRC単純梁の解析結果を一部紹介する。図10は実験用のRC梁供試体である。これをモデル化し荷重を1tonずつ増加させて計算した。図11, 12, 13, 14に $P=10, 16, 20, 23$ tonでの降伏、破壊状況を示す。まず梁下部より引張亀裂が生じ進展していくようすがわかる。 $P=23$ tonでは上部で圧縮亀裂が生じ、下部で鉄筋降伏、両方向亀裂がみられる。

図15は実験値と比較したものである。なお繰返し荷重に対する解析は複雑ではあるが最近計算可能となった。

次に前編でも紹介した原子炉压力容器(PCRV)の内圧実験の解析に利用した結果の一部を示す。図16はPCRVモデルのスケッチである。この試験体に外周と垂直にプレストレスを与えた後、内圧を加え応力、変位を追跡した。この実験結果は種々の解析的検討がなされたが、ここでは腹部シリンダーの円周方向クラ

ックの進展に注目し、その過程をシミュレートしようとした解析である。解析モデルは図17に示すように中央面の1/12を分割した。クラックの進行状況は、図18~20に示すように、内穴部分に発生し、次第に進展しやがて外壁面まで達して貫通する。その領域も徐々に内部へ拡大していく。実験結果もクラック検知ゲージで推定した値でみるとかなりよく一致している。変形状態は図21~23に示すが、変形前が実線、変形後が点線である。内圧0ではプレストレスのみにより圧縮されている。内圧を加えていけば内側から引張にかわり、亀裂発生に至る。図24は、外壁面でみた径方向変位の実験値を比較する。図25は円周方向の内部平均ひずみ度推移を示したものである。これらの図に示す如くコンクリート部分の応力分布、鉄筋の応力分布、クラック発生の方向および進行状況、剛性低下、強度等が解析的に追跡でき破壊までの性状が導かれる。

以上非線形弾塑性問題では材料自体の非線形性に加えて一般に幾何学的非線形性も加わり、解析的に非常に煩雑になると同時に解析結果の内容を判読することが困難となってくる。従って解析に当っては解析目標をはっきり定め、適切にして簡潔なモデルを作ることが大切と思われる。また必要によっては工学的に近似できるようなディスクリットなモデルを作ることでも好ましいと考えられる。いずれにせよ非線形弾塑性問題の解析にFEMは最も有効な方法と考えられるので、今後ますます各種の問題に適用されていくと思われる。

III. 温度分布解析問題

ここであつかうのは適当な境界条件のもとで連続体内部の温度分布を求める問題である。構造解析ではこの問題の解を入力として応力解析に利用する場合も多い。ここで温度分布解析をあつかうのは、今までの節であつかったような力学系の問題以外にもFEMが適用できることを示すためである。少なくとも温度分布が解ければ数式的に類似な諸問題、例えば電磁場、重力場等各種ポテンシャル問題も解けるわけである。これらの問題にFEMの長所が生かされればその実用性は力学系以上であろう。さて温度分布を求めるのは熱流の問題であり熱量の平衡方程式を解くことである。これをFEMであつかうのに仮想仕事の原理またはエネルギーの原理をそのまま用いることはできない。そのかわり、平衡方程式をそれと同値な汎関数の停留値問

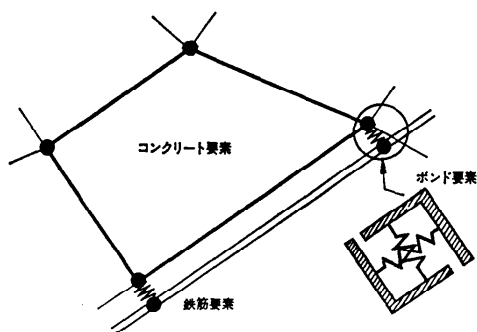


図7 FEM 要素

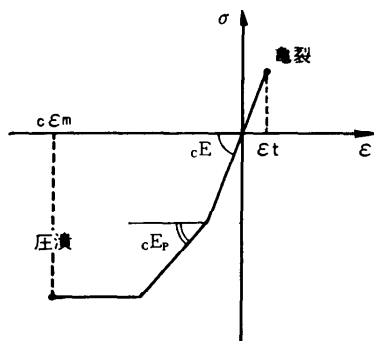


図8 コンクリートの応力-ひずみ曲線

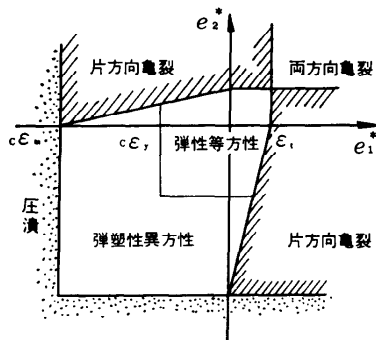


図9 コンクリートの降伏破壊域

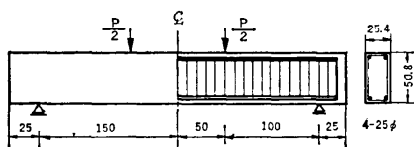


図10 供試体の概要

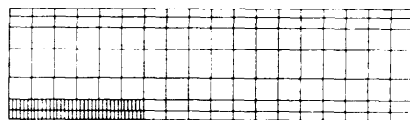


図11 降伏, 破壊状況 P=10 ton

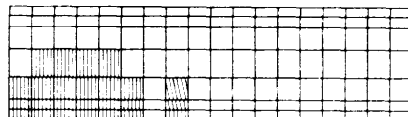


図12 降伏, 破壊状況 P=16 ton

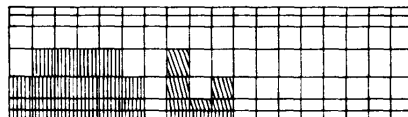


図13 降伏, 破壊状況 P=20 ton

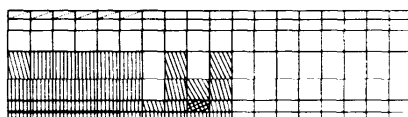


図14 降伏, 破壊状況 P=23 ton

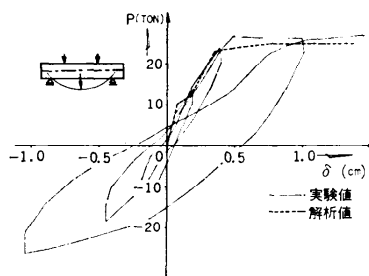


図15 中央点での荷重-たわみ曲線

題におきかえて近似する。この汎関数が力学系の問題ではエネルギーの単位であったが、これにはとらわれず自由なものとすれば温度問題は FEM の最も単純な適用範囲となる。熱量の平衡方程式は次の通りである。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q = 0.$$

ここに、 ϕ ；温度(°C) Q ；熱量 (Kcal/m³hr) $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ ；各方向の熱伝導率 (Kcal/°Cmhr),

境界条件は境界層で

$$\lambda_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \lambda_z \frac{\partial \phi}{\partial z} + \alpha(\phi - \phi_0) = 0.$$

ここに、 α ；境界層熱伝達率 (Kcal/°Cm²hr) ϕ_0 ；境界層温度。

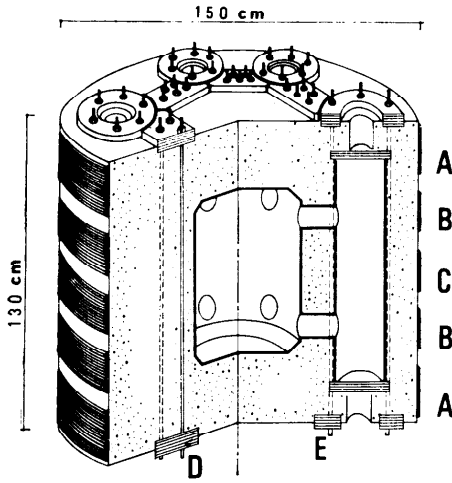


図16 PCR-V モデル

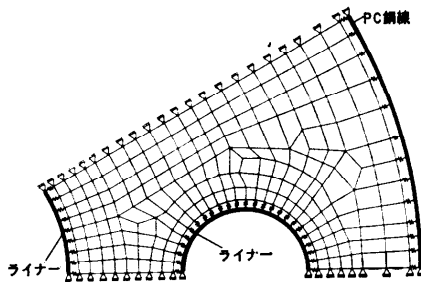


図17 解析モデル (1/2)

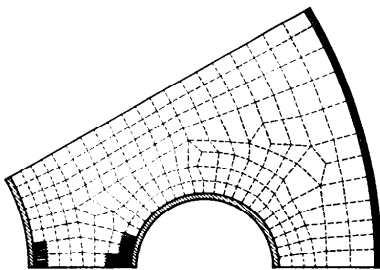


図18 クラックの進行状況 (内圧 70 kg/cm²)

固定温度境界で $\phi = \phi_0$.

(1) (2) 式は下記の汎関数の変分 $\delta X = 0$ と等価であることはよく知られている.

$$X = \int \left[\frac{1}{2} \left\{ \lambda_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \lambda_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \lambda_z \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} - Q\phi \right] dV \\ - \int \alpha \phi_0 \phi dS + \int \frac{1}{2} \alpha \phi^2 dS = 0.$$

通常の変分法 (レーレーリッツ法等) では領域内で

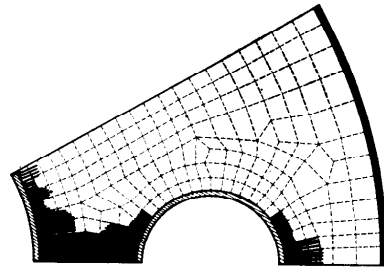


図19 クラックの進行状況 (内圧 85 kg/cm²)

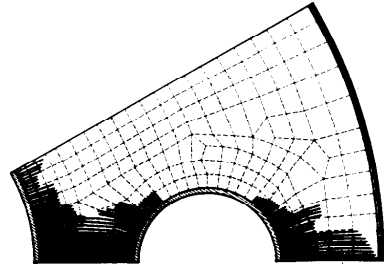


図20 クラックの進行状況 (内圧 100 kg/cm²)

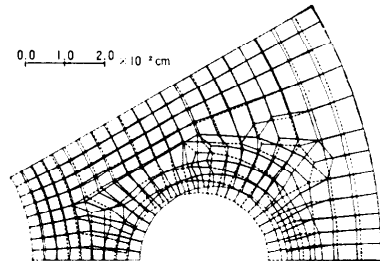


図21 変形性状 (内圧 0 kg/cm²)

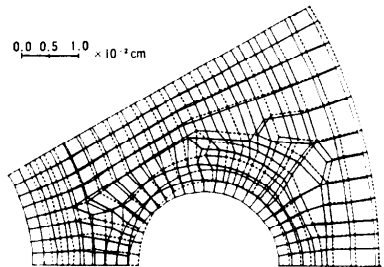


図22 変形性状 (内圧 140 kg/cm²)

定義された近似関数のベキ級数で ϕ が展開されるものとしてそのパラメータを定めている. FEM ではまず領域を要素に分解し, 要素内で適当な関数に展開して各要素ごとにいくつかの未知数を残したまま解き, 全体で解くという手順をとる. 応力解析では各要素に残すパラメータに節点変位を選んだ. 温度分布解析では

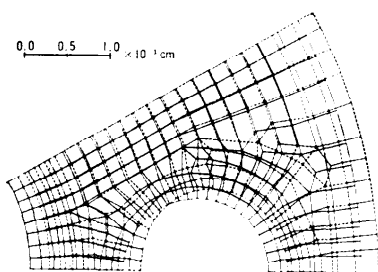
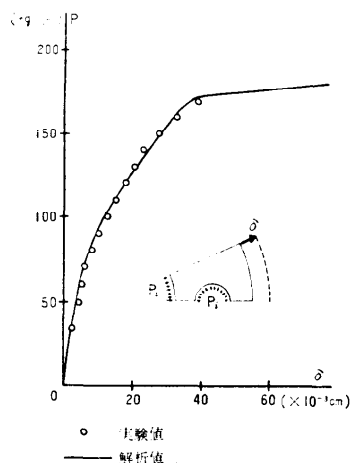
図23 変形状状 (内圧 140 kg/cm²)

図24 外壁面の径方向変位

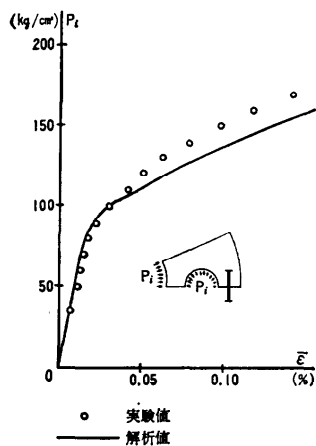


図25 内部平均歪度

節点温度を選ぶことが自然である。すなわち各要素内で

$$\phi = \sum_{i=1}^{ne} N_i \phi_i.$$

ここに、 ϕ_i は節点での温度、 N_i は要素内で定義された関数であり節点 i で 1, 他の節点で 0 の値をとる。

このような関数は力学系でも利用しているものであり、3 角形要素、6 節点要素等力学系の場合と同様に用いられる。温度分布を求め、それを入力として応力解析をする場合、同じ要素分割を用いて両問題を一貫して解くことができる。ここでは前編でも紹介した 20 節点アイソパラメトリック-エレメントを用いた簡単な例を示し、次に原子炉圧力容器の内部熱による熱応力解析をのべる。図26 はやはり前編でもふれた厚肉完全球殻をモデル化したものである。

この球殻内面に 10°C、外表面 0°C を与えて温度分布を求め温度応力を解析する。熱伝導率は等方性で、1.0 Kal/°Cmhr、ヤング率 2.0×10^3 t/cm²、ポアソン比 0.3 とした。図27 は温度分布結果を半径方向にプロットしたものである。図28 は応力解析結果のうち変位分布結果を、図29 は応力度を示す。図示したように温度は理論解と全く一致している。変位もかなりの精度である。応力度のうち σ_r は誤差がめだつがそのあらわれかたはこの要素特有のそりかえるようなパターンをとり興味深い。

この例では理論解の求まる単純な問題で使用性を検討したにすぎない。実用上は勿論このような解析解が得られない所にあるわけで、応力解析の場合と同様な特徴をもつ。すなわち、境界の形状が複雑なもの、境界の条件が種々なもの、材料特性が連続または不連続にかわるもの等に対して一般的なプログラムで利用できるわけである。

次に実用例として PCR-V の熱応力解析の結果を示す。先に述べたように原子炉圧力容器は高温高压に耐えるべく、高精度の安全性をもって設計されねばならない。熱応力に関しては炉内部からの伝導熱、放射線によるコンクリートの発熱が考えられる。これらも運転時、事故時等の温度条件は時刻変化も含めて種々考えるべきである。

ここでは内壁面温度一定 (100°C)、外壁面温度一定 (0°C) とし、縦、横穴周辺と対称面上では断熱条件 ($d\phi/dn=0$) を与えた。境界条件を図30 に示す。計算結果の温度分布図を図31, 32 に示す。そこで生じた各要素節点ひずみ度を外力として温度応力を求めた。境界条件は前章と同様に対称面上でローラ支持とした。

求められた変位、応力度の一部を図33~38 にそれぞれ示す。

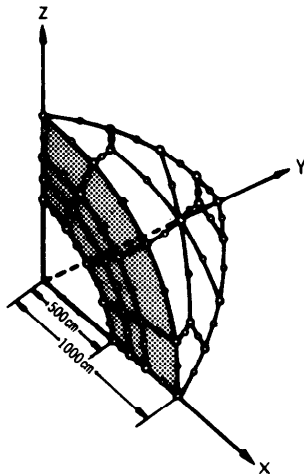


図26 厚肉完全球殻モデル

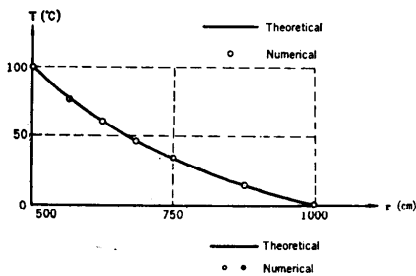


図27 径方向温度分布

(a) 温度分布 図31, 32より温度は内壁面から外壁面になめらかに流れる。縦穴まわりで温度勾配がやや大きくなる。

(b) 変位 全体がほぼ一様に膨張する。円筒部内壁面で0.27cm, 外壁面で0.58cmである。床板部中央では, 内壁面で0.29cm, 実壁面で0.63cmであった。

(c) rz 面主応力度 内壁面近傍では面に平行に大きな圧縮応力度が分布しており, ハンチ部で最大 290kg/cm^2 である。外壁面近傍では応力度は引張りに変わる。最大値は円筒中央部, 床板中央部で 125kg/cm^2 である。

(d) 円周方向応力度 縦穴を含む断面については内壁面の横穴近傍に圧縮力の集中が大きく, 最大 460kg/cm^2 にもなる。しかしこのゾーンを平均的にみると, 200kg/cm^2 程度となる。他の位置では円筒部で大略 200kg/cm^2 , 床板下部で 160kg/cm^2 となり外部に移るにつれ減少して引張りに変わる。引張応力度は円筒部中央の縦穴面で最大 180kg/cm^2 にも達し, 床板部外壁面では 130kg/cm^2 程度である。穴の含まな

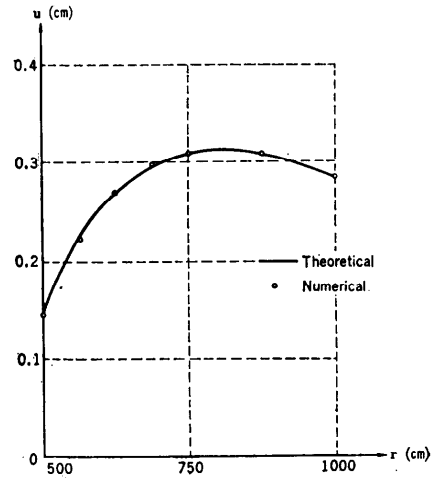


図28 径方向変位

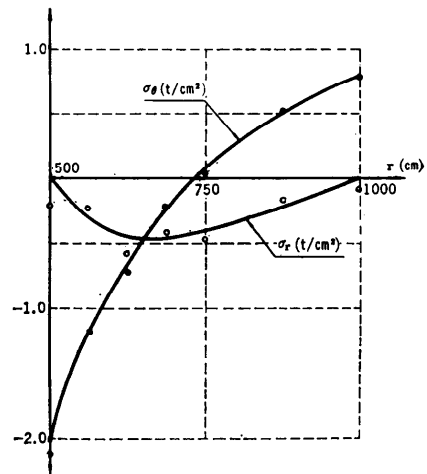


図29 各方向応力度

い断面については内壁面の圧縮応力度が大きく, ハンチ部で最大 160kg/cm^2 , 円筒中央部で 180kg/cm^2 , 床板中央部で 160kg/cm^2 である。外壁面近傍ではすべて引張りで円筒部中央では 130kg/cm^2 , 床板部中央では 120kg/cm^2 である。

このような応力度を PS 力等で消去しうるかを検討したり, 時間的な効果を考慮したりして設計が可能となる。すなわち以上では定常温度分布解析について述べたが, 動的問題の考え方を導入して非定常問題の解析も可能である。

この節で力学系以外の系へも FEM が有効であることを示したつもりである。FEM の利用分野は増大の一途をたどり意外な方面に適用されていこう。

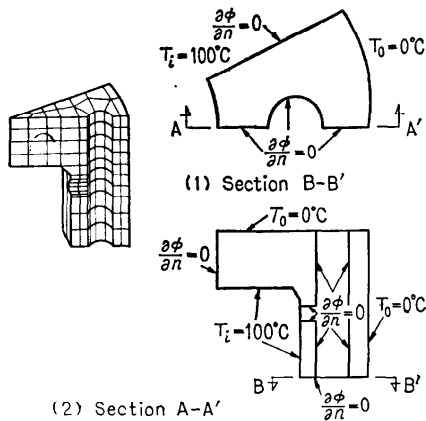


図30 解析モデルおよび境界条件

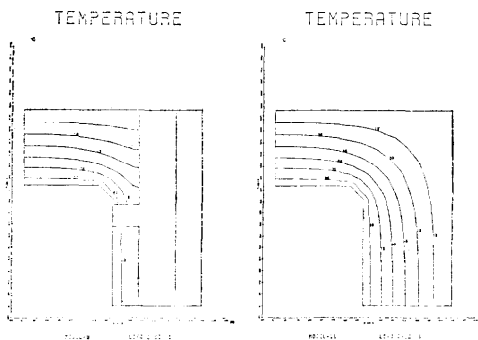


図31 温度分布

図32 温度分布

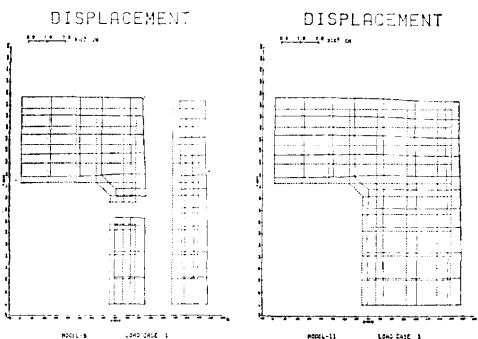


図33 変位

図34 変位

これと共に基礎方程式に対する理解もやはり必要とされるし、前回の付録でのべたようなガラキン流のアプローチも重要な手段となろう。

IV. 結 び

筆者等の限られた経験でとられた FFM について紹介した。現在 FEM は数多くの分野の研究者、工学者

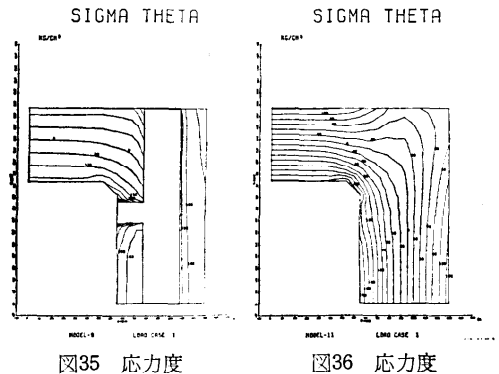


図35 応力度

図36 応力度

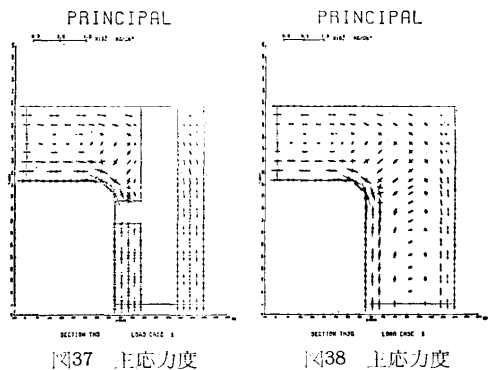


図37 主応力度

図38 主応力度

の興味を呼び、利用されつつあるが未解決の問題も多いこと、数値解析面でも電算機利用技術面でも十分研究の余地を残していることを再度強調して不備な講座を終りたい。

参考文献

- 1) 武藤清; Information Packet, Muto Inst.
- 2) 高瀬啓元; PCPV に関する研究開発, 鹿島建設技術研究所年報第20号.
- 3) 宮下丘; FEM による PC 部材の弾塑性解析, 鹿島建設技術研究所年報第20号.
- 4) 津川恒久; FEM による鉄筋コンクリート部材の弾塑性解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和46, 47.
- 5) P. W. Clough; Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Response, Japan-U.S. Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, 1969.
- 6) B. M. Iron; A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, No. 1.
- 7) O. C. Zienkiewicz; The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw Hill.
- 8) J. T. Oden; Finite Elements of Nonlinear

Continua, McGraw Hill.

- 9) C. V. Girijavallabhan; Stress-Strain Relationship from Compression Tests on Nonlinear Materials, Proceedings of the Symposium on Application of Finite Element Methods in civil Engineering, 1969.
- 10) J. N. Ramasden; Mass Condensation a Semi-automatic Method for Reducing the Size of Vibration Problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 1, No. 4.
- 11) J. T. Oden; Finite Element Approximation in Nonlinear Thermoviscoelasticity and Nonlinear Elasticity, NATO Advanced Study Institute on Finite Element Methods in Continuum Mechanics, 1971.
- 12) O. C. Zinkiewicz; Transient Field Problems Two-Dimensional and Three-Dimensional Analysis by Iso-Parametric Finite Element, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, No. 1.

(昭和 47 年 10 月 16 日)