

任意の凸多面体は 重なりのない展開図に展開できるだろうか？

堀山 貴史 (埼玉大学大学院理工学研究科)

「任意の凸多面体は、辺を切り開くことで、その面が重ならないように展開することができるだろうか？」これは、計算幾何学の未解決問題の1つである。より正確に言い換えると、「任意の凸多面体は、単純で自己交差のない多角形に辺展開することができるだろうか？」という問いである。

展開図というと、小学校の算数の時間に、立方体や直方体の箱をチョキチョキと切り開いたのを思い出される方が多いだろう。本稿では、その頃には出てこなかった「単純」や「自己交差」、「辺展開」といった見慣れないキーワードの解説から始め、上記の未解決問題へのアプローチと関連研究について述べる。

展開図への誘い

展開図は、先に述べた小学校でのお勉強というだけでなく、ケーキやお菓子の箱など、私たちの身の回りのさまざまな場面に現れる。また、板金加工で機械部品を作るのも、展開図から立体を作る作業といえる。携帯電話は箱に付属品と一緒に詰めてあるが、その間仕切りを分解してみると、ボール紙を器用に折り畳んである。人工衛星の太陽電池パネルは、ミウラ折りと呼ばれる折り方で折り畳んで打ち上げられ、宇宙に出てから展開される。楽しいところでは、1枚の紙から複雑な立体を作る折り紙、紙の部品を組み合わせて作るペーパークラフトも挙げられる^{☆1}。

展開図の歴史は、ルネサンス期に遡る。16世紀の画家であり数学者であるDürerが、“Unterweysung der Messung mit dem Zirkel un Richtscheyt in Linien Ebneuhnd Gantzen Corporen (測定法教則)”に、立方体などの正多面体^{☆2}や、切頭二十面体(サッカーボール形状)などの半正多面体^{☆3}といっ

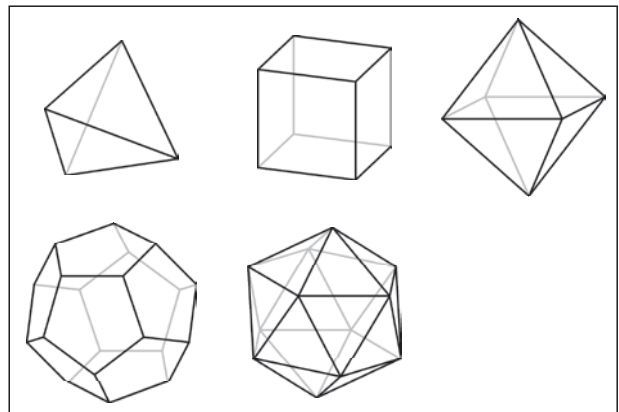


図-1 正多面体 (全5種類)^{☆4}

た凸多面体の展開図を示している。

ここで、2次元の面を組み合わせた多面体のうち、任意の2点を結ぶ線分が多面体内のみを通るもの(直感的には凹みがないもの)が凸多面体である。さらに(i)各面が合同な正多角形、(ii)各頂点の周りの面の数が同じと条件を付け加えたものが正多面体であり、**図-1**のように正四面体、立方体、正八面体、正十二面体、正二十面体の5種類が存在する。

また、サッカーボール形状など、正多面体の条件を以下のように緩和したものが半正多面体である。(i)各面は正多角形であるが、正五角形と正六角形のように2種類以上の組合せも許す、(ii)各頂点の周りの面の形が、正五角形、正六角形、正六角形のように同じ順番で現れる。

多面体を辺に沿って切り、平面に開くことで得ら

^{☆1} 先日ANAの飛行機に乗った際、子供向けの機内のおもちゃとしてポケモン柄のサイコロを配布していた。よくある立方体ではなく、正五角形が12面の正十二面体を組み立てるようになっていた点が興味深い。

^{☆2} プラトンの立体 (Platonic solid) とも呼ばれる。

^{☆3} アルキメデスの立体 (Archimedean solid) とも呼ばれる。

^{☆4} この解説の図はすべて©堀山貴史。

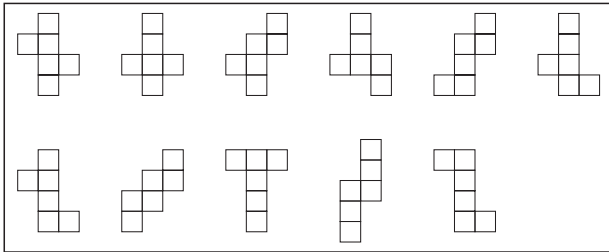


図-2 立方体の辺展開 (全 11 種類) ☆⁴

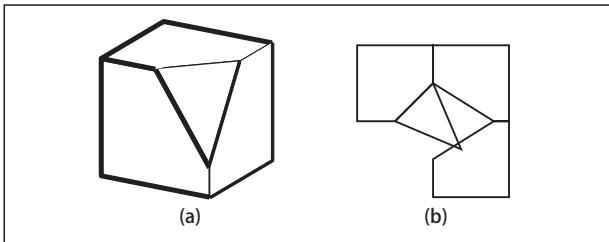


図-3 重なりのある辺展開 ☆⁴

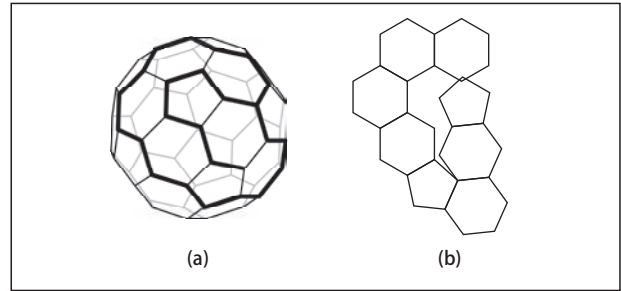


図-4 切頭二十面体の重なりのある辺展開 ☆⁴

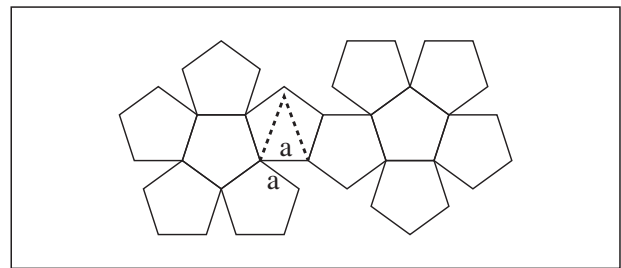


図-5 正十二面体の重なりのある一般展開 ☆⁴

れる多角形が、展開図 (特に辺展開と呼ばれる) である。たとえば、立方体は、**図-2**のように11種類の辺展開を持つ。わざわざ辺展開と呼ぶのは、面の上も自由に切り開いてよいとした一般展開と区別するためである (一般展開については、後でもう少し触れる)。

展開図は重なる？ 重ならない？

図-2を確認すると、いずれの辺展開も単純多角形 (外周に交差のない多角形) であり、自己交差 (面と面との重なり) を持たないことが分かる。1枚の紙から多角形を切り出し、それを折り曲げて多面体を組み立てる工程を考えると、自己交差のある多角形を展開図として認めるのは問題である。本稿の最初に挙げた「任意の凸多面体は、単純で自己交差のない多角形に辺展開することができるだろうか？」との問いの意図はここにある。

この問いを明文化したのは1975年のShephardの論文⁸⁾であり、Dürerがこの問題を認識していた証拠はないが、実際に描いた展開図を通して、そうできそうだと直感を持っていたと言われている。図-2を見ていると、そもそも自己交差を持つ辺展開などなさそうに思われる。

しかし、並木誠と福田公明により、**図-3** (a) の多

面体を図中の太線部で切り開くことで、(b) のように自己交差のある辺展開となることが示された⁶⁾。この図形は、三角形の面の1つの頂点が別の面に食い込んでおり、外周の辺に交差が確認できる (図-3 (a) は立方体の角を切り落とした多面体で、残り3面をどのように切り開いても (b) の4面の関係は変わらないため、この部分だけを図で示した)。**図-4**は、筆者らが見つけた例で、切頭二十面体 (サッカーボール形状) を (a) の太線部で切り開くことで、(b) のように自己交差のある辺展開となることが分かる⁴⁾ (半正多面体では、これ以前に、ねじれ十二面体に自己交差を持つ辺展開があることが知られていた)。なお、図-3、図-4の例は、いずれも別の切り開き方をすれば自己交差のない辺展開が得られるため、これら自体が未解決問題の反例になっているわけではない。

さて、未解決問題の意味が分かってきたところで、そのアプローチとして関連研究に目を向けてみよう。三谷純と上原隆平により、各面の持つ角度を90度に限定した立方体や直方体でも、一般展開を許せば (つまり辺だけでなく面の上を切り開くことを許せば)、自己交差を持つ場合があると示された⁵⁾。筆者らはこれを拡張し、立方体のほかに正八面体や正十二面体、正二十面体にも自己交差を持つ一般展開

があることを示した⁴⁾。図-5は、点線部を無視すれば正十二面体の辺展開であるが、点線部で切ってaで接ぐことで、一般展開となる。この切り接ぎにより、自己交差が生じる。

なお、5種類ある正多面体のうちの残り1種類、正四面体に自己交差を持つ一般展開があるかどうか気になる方もおられるだろう。正四面体については、どのように切り開いても、自己交差を持たない。これは、正四面体の任意の一般展開がタイリングとなる(つまり、繰り返しにより平面を埋め尽くすことができる)という秋山仁の定理による¹⁾。

一般展開は切り開き方の自由度が高く、上述のように意地の悪いことをすると自己交差を持つようにできてしまうが、自己交差のないように凸多面体をうまく切り開くアルゴリズムも提案されている。たとえば星展開と呼ばれるアルゴリズムもその1つで、1点を決めて、そこからすべての頂点への最短経路に沿って切り開く。これにより、ちょうどミカンの皮を剥くように星型の一般展開ができあがり、自己交差のないことが示されている²⁾。

正多面体は、 いかなる辺展開でも重ならない

ここで、問いの方向を少し変えてみる。対象を凸多面体に限らない一般の多面体とすると、どうなるだろうか？ このときには、どのように辺展開しても自己交差を持つような多面体が、いくつも報告されている。では、問いの対象をぐっと限定して、正多面体なら？

対象を正多面体に限定すると、どのように辺展開しても自己交差を持たない⁴⁾。これは、図-2の例からも、一見すると容易に分かることのように見えるが、以下のような否定的な状況証拠も挙げられる。(1) ねじれ十二面体や図-4の切頭二十面体のように、自己交差を持つ辺展開ができる半正多面体も存在する。(2) 上述のように、一般展開を許せば、正四面体以外の4種類の正多面体は自己交差を持つようにできる。これらを考慮に入れると、正多面体の任意の辺展開が自己交差を持たないという性質は、かなり際どい

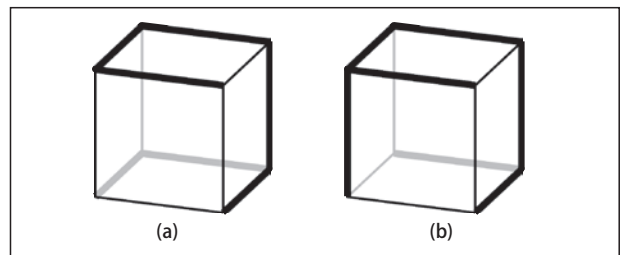


図-6 立方体の辺展開を与える切り開き方^{☆4)}

バランスで成り立っていると言えるだろう。

以下では、この性質をどのように示したかの概略を記す。もちろん、正四面体は2種類、立方体と正八面体はそれぞれ11種類の辺展開が存在することが知られているため、図-2のように手ですべての辺展開を列挙して調べることができる。しかし、正十二面体と正二十面体については、それぞれ43,380種類の辺展開を持つ³⁾ことが知られているが、手作業ですべてを漏れなく調べることは難しく、具体的な形状を列挙するアルゴリズムが必要である。

まず、どの辺を切り開けば辺展開となるだろうか？ たとえば、立方体を図-6 (a) のように太線の辺で切り開くことで、図-2の右上の辺展開が得られる。図-6 (b) のように切り開くことで得られる辺展開については、読者の楽しみとしておく。図-6から、切り開く辺が全域木(すべての頂点を結ぶ木)となっていることが直感的に見てとれる。

この直感を少し確認してみよう。どの頂点においても、接続する辺のうち少なくとも1つ以上を切り開かなければ、その頂点の周りの面を開いて平面に展開することができない。つまり、どの頂点も、切り開く辺を持っている。また、もしも切り開く辺がサイクルを持つならば(つまり切り開く辺をたどってぐるっと1周できるならば)、このサイクルが展開図を2つ以上のパーツに切り分けることになる。したがって、切り開く辺がサイクルを持つてはいけない。さらに、切り開く辺が連結でなければならない(そうでなければ、どこかが輪になったままで、平面に展開できない)。こうして、切り開く辺が「すべての頂点を結び、サイクルを持たない連結な構造」すなわち全域木となることが、辺展開となるための必要十分条件となる。

辺展開として全域木を求める手法については次章で解説するが、各正多面体について頂点と辺からなるグラフから全域木をすべて列挙した後は、同型な辺展開の除去が必要となる。これは、切る辺が違って同じ形の辺展開となる場合があるためである。たとえば図-2の右上の辺展開を得るような立方体の切り方は、48通りある。同型な辺展開の除去には、グラフの同型性判定をすることになる。手間がかかるが、これにより、正四面体は16種類の辺展開から本質的に異なる2種類を、立方体と正八面体は384種類から本質的に異なる11種類を、正十二面体と正二十面体は5,184,000種類から本質的に異なる43,380種類を得ることができる。

こうして得られた辺展開のカタログの一部を、図-7、図-8に示す。すべての辺展開をご覧になりたい方は、<http://www.al.ics.saitama-u.ac.jp/horiyama/research/unfolding/catalog/>を参照されたい。辺展開に番号付けしてあるので、番号で辺展開を指定することもできる。

カタログができあがれば、それぞれについて自己交差の有無を確認することができる。この確認を簡単にするため、各面の外接円の重なりの有無を確認したところ、「どの面の外接円も重ならない」と分かり、「どの面も重ならない」よりも強い結果を得ることができた。なお、数値誤差を危ぶむ方もおられると思うが、外接円の直径を5%増しとしても重ならなかったことを付記する。

全域木の列挙

全域木の列挙には、BDD (Binary Decision Diagram : 二分決定グラフ) を用いる。BDDは有向非巡回グラフによる論理関数の表現法である。図-9のように、変数頂点と定数頂点からなり、二分木に部分グラフの共有を許したものと見なすことができる。この部分グラフの共有により、多くの論理関数をコンパクトに表すことができる。関数の出力は、各変数への割り当てにしたがってグラフを上から順にたどることで得られる。

与えられたグラフのすべての全域木の集合をBDDで表す。このために、グラフの辺 e_i を全域木に採用する／しないを変数 x_i への1/0の割り当てで表し、採用する辺の集合が全域木となるときに1を出力する関数

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & (\{e_i | x_i = 1\} \text{が全域木}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を定義する。この関数を表すBDDが、すべての全域木の集合を表すBDDである。

たとえば、図-9のBDDは、図-10のグラフの全域木の集合を表す。 $(x_1, x_2, \dots, x_5) = (0, 1, 0, 1, 0)$ は0-定数頂点にたどりつくため、辺集合 $\{e_2, e_4\}$ が全域木ではないことが分かる。一方、 $(x_1, x_2, \dots, x_5) = (1, 0, 1, 0, 1)$ は1-定数頂点にたどりつくため、辺集合 $\{e_1, e_3, e_5\}$ を採用すると全域木が得られることが分かる。また、 $(x_1, x_2, \dots, x_5) = (1, 1, 0, 1, 0)$ でも1-定数頂点にたどりつくため、辺集合 $\{e_1, e_2, e_4\}$ を採用すると別の全域木が得られることが分かる。

なお、正多面体の辺展開を得る際には、正多面体の頂点と辺をグラフと見て、切る辺として採用する辺の集合を全域木として求めることは先に述べた通りである。BDDを用いて全域木を列挙する手法は任意のグラフに対して適用可能なため、この章では、簡単なグラフの例として図-10を用いている。

以下では、全域木の集合を表すBDDの構築法として、文献4)で用いた方法ではなく、よりお勧めのアルゴリズムとして関根京子、今井浩、谷誠一郎による手法⁷⁾について紹介する。なお、この手法は、もっと一般化されたTutte多項式を求める手法であるが、ここでは全域木の列挙向けにアレンジして示す。

この手法では、BDDの上側から、1変数ずつ順に構築していく。動的計画法を念頭に置いて図-11をご覧いただくと、分かりやすい。第1ステップとして、 x_1 がラベル付けされた頂点(説明のため、左肩に頂点名aを付けた)を用意し、入力として与えられた図-10のグラフと対応付ける(図-11の吹き出し内のグラフが、BDDの頂点に対応付けられたグラフである)。

第2ステップでは、第1ステップの頂点aに対して、

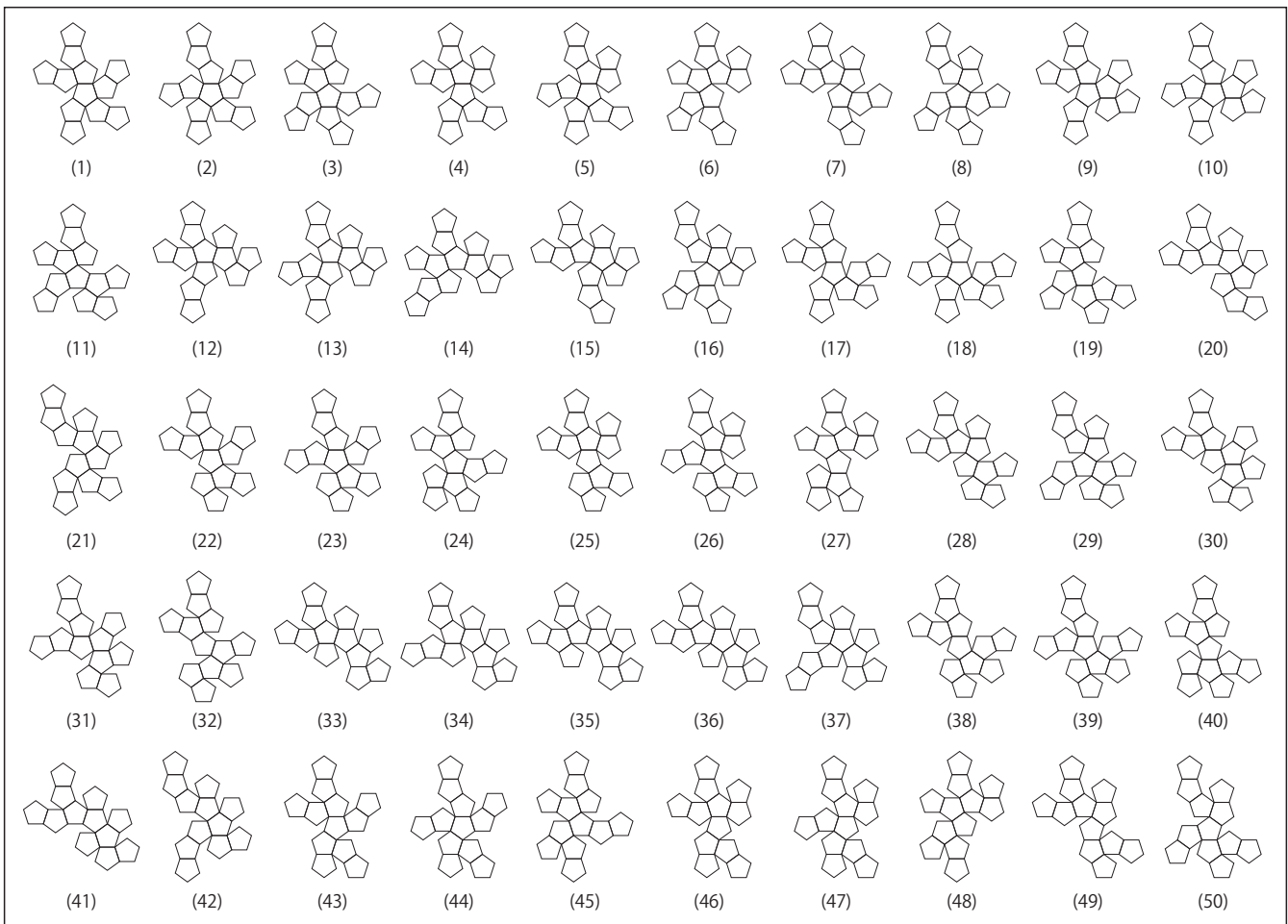


図-7 正十二面体の辺展開 (一部抜粋) ☆⁴

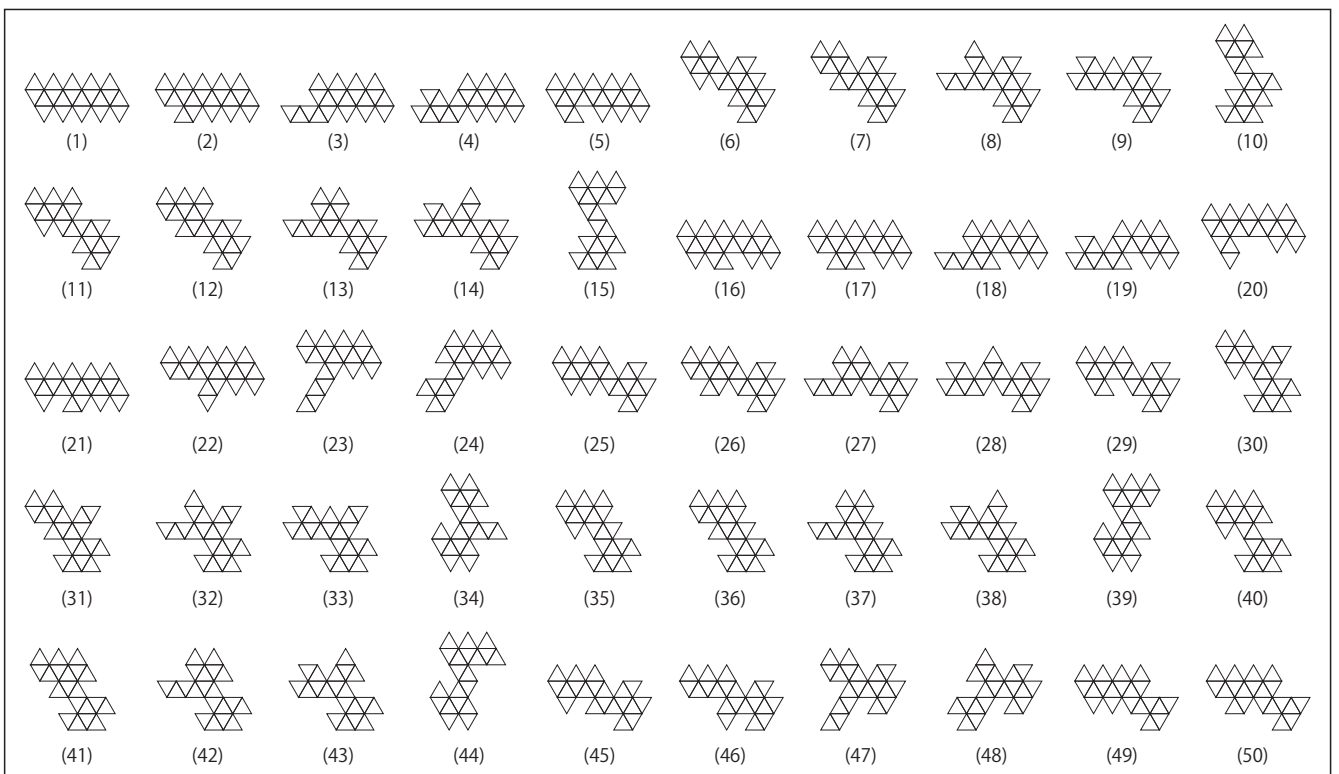


図-8 正二十面体の辺展開 (一部抜粋) ☆⁴

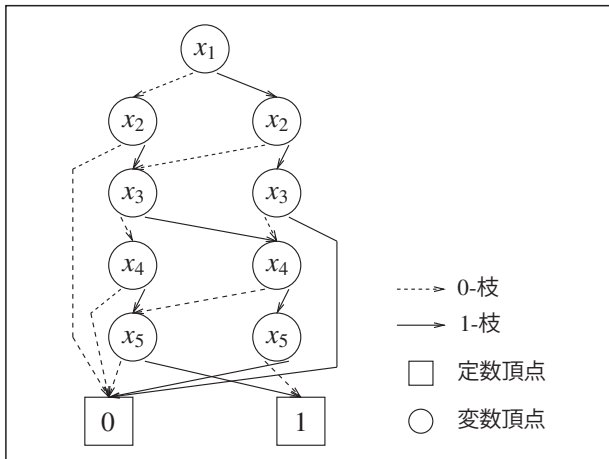


図-9 BDD (二分決定グラフ) ☆4

辺 e_1 を採用する場合と採用しない場合に場合分けし、頂点名 b, c の2つの頂点を得る。頂点 b には、頂点 a に対応するグラフから辺 e_1 を除去したものを対応付ける。また、頂点 c には、頂点 a に対応するグラフにおいて辺 e_1 を採用したものととして、その両端点を1つに縮約したグラフを対応付ける。

第3ステップでは、第2ステップの頂点 b, c に対して辺 e_2 を採用する場合と採用しない場合に場合分けする。図で、頂点 b からの0-枝の先に×印を付けている。これは、図-10のグラフで e_1 も e_2 も採用しなければ、採用した辺のみで頂点 v_1 と他の頂点とを結べないこと、つまり全域木を作れないことが確定し、これ以上の探索が不要なためである。BDDの構築のためには、枝の先が0-定数頂点を指すようにする。

また、頂点 b からの1-枝と頂点 c からの0-枝は、同じ頂点 d を指し、頂点を共有している。これは、図-10のグラフで、 e_1 を採用せずに e_2 を採用する場合も、 e_1 を採用して e_2 を採用しない場合も、辺の削除/縮約を行ったグラフが同じであるためである。動的計画法として解釈すると、これ以降に解くべき部分問題が同じと見なせるためである。

頂点 c からの1-枝は、頂点 e を指す。これに対応するグラフは、セルフループ e_3 を含んでいる。これは、図-10で e_1 と e_2 の両方を採用することで v_1, v_2, v_3 が連結となり、連結成分内の頂点を結ぶ e_3 を採用できないことを示している。このため、頂点 e からの1-

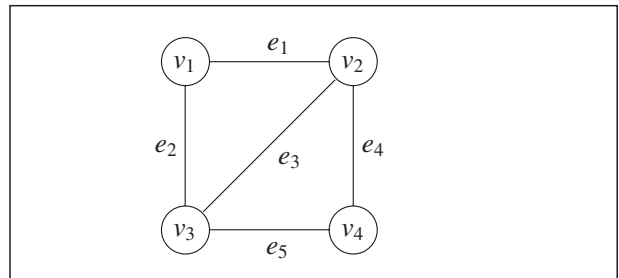


図-10 4頂点からなるグラフ ☆4

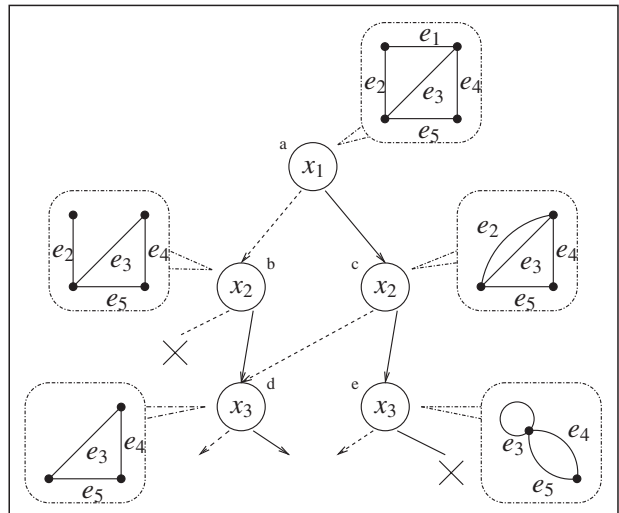


図-11 全域木の集合を表すBDDの構築 (途中で) ☆4

枝の先に×印を付けている (先ほどと同様に、枝の先が0-定数頂点を指すようにする)。

以上のように、頂点からの0-枝と1-枝の展開を繰り返し、探索が不要になった時点での枝刈り、部分問題が同じ頂点の共有を行っていけば、図-9のように全域木の集合を表すBDDを得ることができる。また、1を出力する入力割当を調べることで (つまり1-定数頂点へのパスを調べることで)、図-10の全域木は、 $\{e_1, e_3, e_5\}$ などの8個であることが分かる。

特徴的な辺展開

さて、未解決問題へのアプローチとして、正多面体の辺展開のカタログが「正多面体は、いかなる辺展開でも重ならない」と示す足がかりとなったことは、先に述べた。以下では、このカタログ作成の副産物として、特徴的な形の辺展開について述べる。

たとえば、ケーキやお菓子の箱を、箱組み前の形、つまり箱を辺展開したボール紙の形でお店に納品す

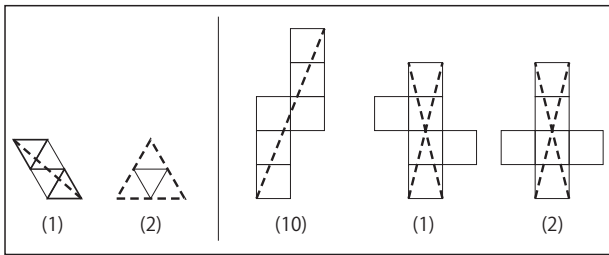


図-12 正四面体と立方体の辺展開の直径^{☆4}

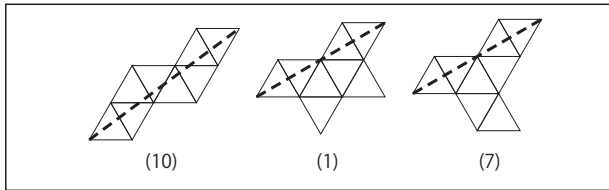


図-13 正八面体の辺展開の直径^{☆4}

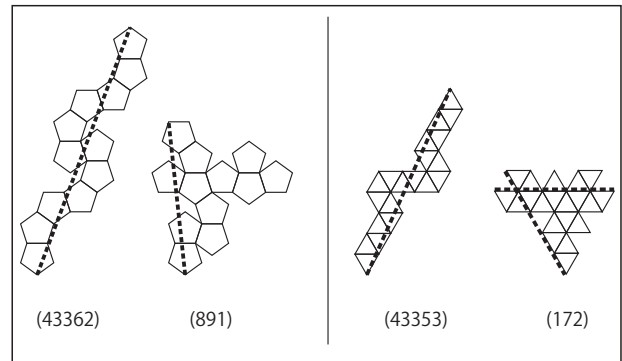


図-14 正十二面体と正二十面体の辺展開の直径^{☆4}

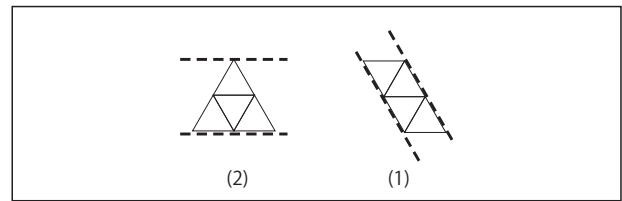


図-15 正四面体の辺展開の幅^{☆4}

るとしよう。まず、ボール紙のロールから辺展開を切り出す必要がある。辺展開の仕方は色々あるが、どのように展開すると、ロールの幅をはみ出さないものができるだろうか？ また、トラックに乗せて運んだり、倉庫に保管したりする必要がある。どのように展開すると、扱いやすいだろうか？ 細長い形のものが良い場合もあるだろうし、逆になるべく丸々とした形のものが良い場合もあるだろう。辺展開のボール紙を何枚も積み重ねたものを箱に入れて保管するなら、その保管する箱を小さくしたいので、辺展開を囲む長方形の面積が小さいものを選びたいだろう。

そこで、特徴的な形の辺展開として、直径、幅、周囲長方形の面積が最大／最小になるものを正多面体の辺展開のカタログから選んで紹介する。

辺展開 P の直径は、 P に含まれる任意の2点間の距離の最大値である。正四面体の2種類の辺展開を図-12に示す。ここで、図中の点線が直径を与えている。図-12(2)の辺展開は対称性を持つため、直径を与える点対を3対示してある。なお、各辺展開の下の数字は、辺展開カタログでの展開図番号を示している。正四面体では、辺展開(1)が最大の直径を持ち、辺展開(2)が最小の直径を持つ。正四面体の1辺の長さを1とすると、直径はそれぞれ $\sqrt{7} =$

2.646, 2.000 である。

立方体については、辺展開(10)が最大の直径 $\sqrt{29} = 5.385$ を、辺展開(1), (2)の2種類が最小の直径 $= \sqrt{17} = 4.123$ を持つ(図-12)。正八面体については、辺展開(10)が最大の直径 $\sqrt{19} = 4.359$ を、辺展開(1), (7)の2種類が最小の直径 $2\sqrt{3} = 3.464$ を持つ(図-13)。正十二面体については、辺展開(43362)が最大の直径12.913を、辺展開(891)などの20種類が最小の直径7.513を持つ(図-14)。正二十面体については、辺展開(43353)が最大の直径 $\sqrt{73} = 8.544$ を、辺展開(172)などの273種類が最小の直径5.000を持つ(図-14)。なお、いずれの正多面体でも、直径が最大になる辺展開は、面が1本のパス状に伸び、点対称な形をしている。

辺展開 P の幅は、 P を両側から挟む2本の平行線の距離の最小値である。正四面体の2種類の辺展開を図-15に示す。ここで、図中の点線が幅を与える平行線を示している。辺展開(2)が最大の幅 $\sqrt{3} = 1.732$ を持ち、辺展開(1)が最小の幅 $\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.866$ を持つ。正四面体では、辺展開の直径と幅は、ちょうど逆の関係にある。

立方体については、辺展開(2), (4), (9)の3種類が最大の幅3.000を、辺展開(10)が最小の幅2.000を持つ(図-16)。正八面体については、辺展開(7)が最

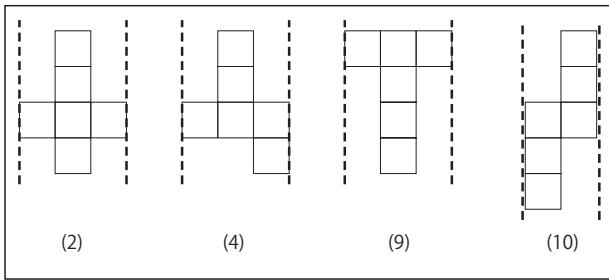


図-16 立方体の辺展開の幅^{☆4}

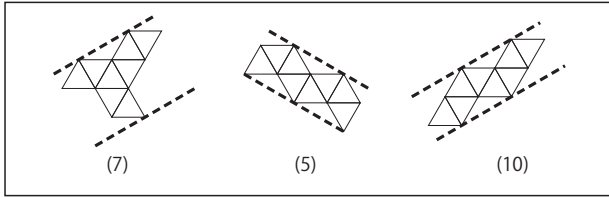


図-17 正八面体の辺展開の幅^{☆4}

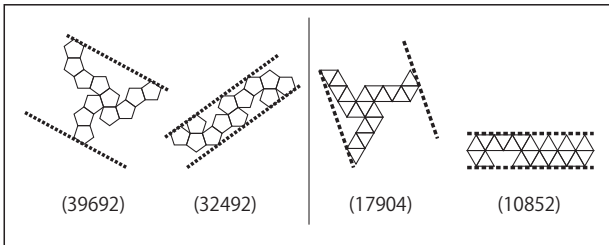


図-18 正十二面体と正二十面体の辺展開の幅^{☆4}

大の幅2.500を、辺展開(5), (10)の2種類が最小の幅1.500を持つ(図-17). 正十二面体については、辺展開(39692)が最大の幅7.217を、辺展開(32492)などの6種類が最小の幅3.078を持つ(図-18). 正二十面体については、辺展開(17904)が最大の幅 $\frac{13}{7}\sqrt{7} = 4.914$ を、辺展開(10852)などの129種類が最小の幅 $\sqrt{3} = 1.732$ を持つ(図-18). 幅を大きくするために3本の足を広げているように見える.

辺展開 P の周囲長方形は、 P の任意の点を含む長方形である。 P に対して、周囲長方形は無数に存在するが、その中でも面積最小の周囲長方形に興味がある。たとえば、図-19では、正四面体の2種類の辺展開それぞれについて、面積最小の周囲長方形を点線で示している。展開の仕方によって、これら2つの周囲長方形の面積も異なるが、その値が最大/最小となる辺展開を調べる^{☆4}。正四面体の2種類の

^{☆4} 直径のときには、辺展開ごとに2点間の距離の最大値(直径)を求め、その最大/最小を調べた。同様に、辺展開ごとに周囲長方形の面積の最小値を求め、その最大/最小を調べる。

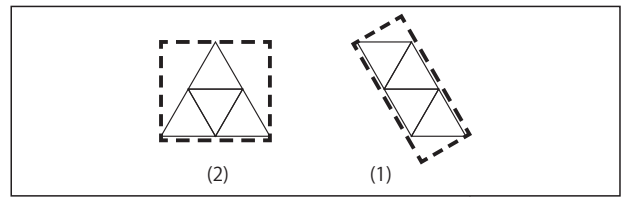


図-19 正四面体の辺展開の面積最小包圍長方形^{☆4}

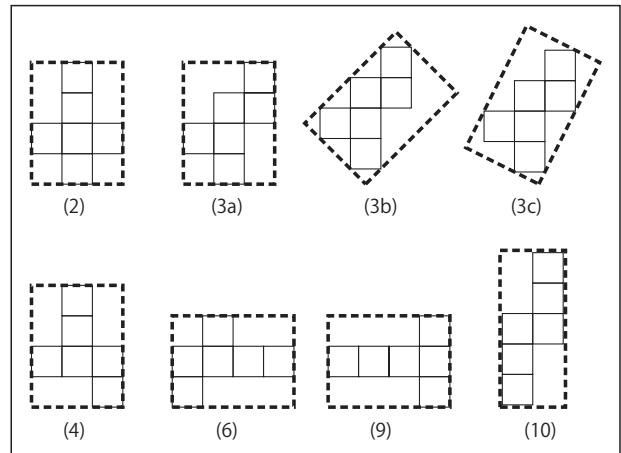


図-20 立方体の辺展開の面積最小包圍長方形^{☆4}

辺展開では、図-19に示すように、辺展開(2)は辺の長さ $2, \sqrt{3}$ の包圍長方形を持ち、最大の面積 $2\sqrt{3} = 3.464$ となる。辺展開1は辺の長さ2.500, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ の包圍長方形を持ち、最小の面積 $\frac{5}{4}\sqrt{3} = 2.165$ となる。

立方体についても同様に、辺展開ごとに面積最小の包圍長方形を求め、その面積の最大値/最小値を与える辺展開を示す。図-20に示す辺展開(2), (3), (4), (6), (9)の5種類が、最大の面積を与える。辺展開(2), (4), (6), (9)の4種類は、辺の長さ4.000, 3.000の包圍長方形を持ち、面積は12.000である。辺展開(3)は、辺の長さ4.000, 3.000の包圍長方形(図-20(3a))のほかに、辺の長さ $3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$ の包圍長方形(図-20(3b))と $2\sqrt{5}, \frac{6}{5}\sqrt{5}$ の包圍長方形(図-20(3c))を持ち、いずれも最大の面積12.000となる。辺展開(3)が面積12.000の包圍長方形を3種類持つ点が面白い。辺展開(10)は辺の長さ5.000, 2.000の包圍長方形を持ち、最小の面積10.000となる。

正八面体については、辺展開(9)が辺の長さ3.000,

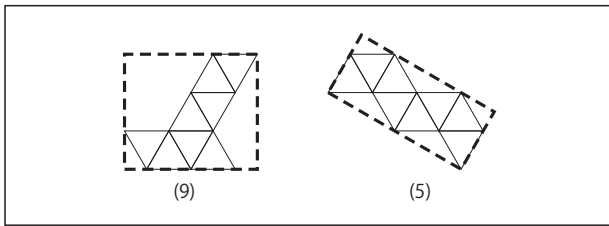


図-21 正八面体の辺展開の面積最小包囲長方形^{☆4}

$\frac{3}{2}\sqrt{3}$ の包囲長方形を持ち、最大の面積 $\frac{9}{2}\sqrt{3} = 7.794$ となる。辺展開(5)が辺の長さ $2\sqrt{3}$ 、1.500 の包囲長方形を持ち、最小の面積 $3\sqrt{3} = 5.196$ となる (図-21)。正十二面体については、辺展開(43361)が辺の長さ 8.781, 7.470 の包囲長方形を持ち、最大の面積 65.593 となる。辺展開(587)などの 231 種類が辺の長さ 8.163, 4.029 の包囲長方形を持ち、最小の面積 32.887 となる (図-22)。正二十面体については、辺展開(17904)が辺の長さ $\frac{17}{14}\sqrt{21}$ 、 $\frac{13}{7}\sqrt{7}$ の包囲長方形を持ち、最大の面積 $\frac{221}{14}\sqrt{3} = 27.342$ となる。辺展開(10852)などの 120 種類が辺の長さ 7 、 $\sqrt{3}$ の包囲長方形を持ち、最小の面積 $7\sqrt{3} = 12.124$ となる (図-22)。なお、この 120 種類の辺展開は、すべて、最小の幅 $\sqrt{3}$ を持つ。

未解決問題

本稿では、「任意の凸多面体は、単純で自己交差のない多角形に辺展開することができるだろうか?」との問いと、その解決に向けたアプローチ、そして少し脱線して展開図カタログの楽しみについて述べた。以下では、結びに代えて、展開図に関連したそのほかの楽しい未解決問題を紹介する。

「任意の多面体は、単純で自己交差のない多角形に一般展開することができるだろうか?」。本稿の未解決問題の一般展開バージョンである。

「2つの正多面体を一般展開して、同じ展開図が得られるだろうか?」。正四面体の一般展開と、その他の正多面体の辺展開、これらの中で共通な展開図が存在しないことは示されている。しかし、その他の

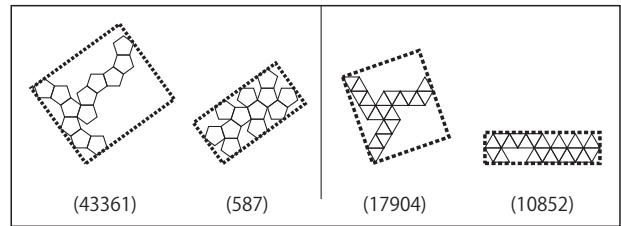


図-22 正十二面体と正二十面体の辺展開の面積最小包囲長方形^{☆4}

正多面体に一般展開を許したら? 正四面体以外の正多面体2つの間での共通な展開図は? など、疑問は尽きない。

「多角形が与えられたときに、どこで折ると凸多面体が作れるか?」。動的計画法で、どの辺とどの辺を接着すると凸多面体が作れるかは求めることができる。そこまでできれば、折り線も求められるはずだと思うが...

ぜひ楽しみながら挑戦していただきたい。

参考文献

- 1) Akiyama, J. : Tile-makers and Semi-tile-makers, Math. Assoc. America, 114:602-609 (2007).
- 2) Aronov, B. and O'Rourke, J. : Nonoverlap of the Star Unfolding, Disc. Comp. Geom., 8:219-250 (1992).
- 3) Hippenmeyer, C. : Die Anzahl der Inkongruenten Ebenen Netze Eines Regulären Ikosaeders, Elem. Math., 34:61-63 (1979).
- 4) Horiyama, T. and Shoji, W. : Edge Unfoldings of Platonic Solids Never Overlap, In Proc. of the 23rd Canadian Conference on Computational Geometry, pp.65-70 (2011).
- 5) Mitani, J. and Uehara, R. : Polygons Folding to Plural Incongruent Orthogonal Boxes, In Proc. of the 20th Canadian Conference on Computational Geometry, pp.31-34 (2008).
- 6) Namiki, M. and Fukuda, K. : Unfolding 3-dimensional Convex Polytopes : A Package for Mathematica 1.2 or 2.0, Mathematica Notebook, University of Tokyo (1993).
- 7) Sekine, K., Imai, H. and Tani, S. : Computing the Tutte Polynomial of a Graph of Moderate Size, In Proc. of the 6th Annual International Symposium on Algorithms and Computation, LNCS 1004, pp.224-233 (1995).
- 8) Shephard, G. C. : Convex Polytopes with Convex Nets, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 78:389-403 (1975).
(2012年2月7日受付)

堀山 貴史 horiyama@al.ics.saitama-u.ac.jp

1997年京都大学大学院工学研究科修士課程修了。奈良先端科学技術大学院大学助手、京都大学助手を経て、2007年より埼玉大学大学院理工学研究科准教授。アルゴリズム設計論、計算幾何学、組合せ最適化に関する研究に従事。博士(情報学)。