

5-正則グラフの連結支配集合への分割の NP-困難性について

森 本 崇 恭^{†1} 山 田 敏 規^{†1}

G をグラフとし, $V(G)$ と $E(G)$ をそれぞれ G の点集合と辺集合とする. 以下の条件を満たす $S \subseteq V(G)$ を G の支配集合と呼ぶ: 任意の点 $v \in V(G) - S$ に対して, $(u, v) \in E(G)$ である $u \in S$ が存在する. さらに, S によって誘導される G の部分グラフが連結であるならば, S は G の連結支配集合 (CDS) と呼ばれる. 各ブロックが G の連結支配集合であるような $V(G)$ の分割を G の連結支配分割 (CDP) と呼ぶ. 特に, ブロックの数が k である連結支配分割を k -連結支配分割 (k -CDP) と呼ぶ. 与えられたグラフ G が 2-CDP を持つか否かを判定する問題は, G が 7-正則グラフに限定したとしても NP-完全であることが知られている. 小文では, グラフ G が 5-正則グラフに限定したとしても, G が 2-CDP を持つか否かを判定する問題が NP-完全であることを証明する.

On NP-hardness of Connected Domatic Partition of 5-Regular Graphs

TAKAYUKI MORIMOTO^{†1} and TOSHINORI YAMADA^{†1}

Let G be a graph, and let $V(G)$ and $E(G)$ be the vertex set and the edge set of G , respectively. $S \subseteq V(G)$ is a dominating set of G if there exists $u \in S$ with $(u, v) \in E(G)$ for any vertex $v \in V(G) - S$. A dominating set S of G is said to be connected if a subgraph of G induced by S is connected. A partition of $V(G)$ is a connected domatic partition of G , CDP for short, if each block of the partition is a connected dominating set of G . A CDP with k blocks is called a k -CDP. The problem of deciding whether a given graph G has a 2-CDP is NP-complete even if G is restricted to a 7-regular graph. In this paper, this problem is proved to be NP-complete even for 5-regular graphs.

1. はじめに

G をグラフとし, $V(G)$ と $E(G)$ をそれぞれ G の点集合と辺集合とする. 以下の条件を満たす $S \subseteq V(G)$ を G の支配集合と呼ぶ: 任意の点 $v \in V(G) - S$ に対して, $(u, v) \in E(G)$ である $u \in S$ が存在する. さらに, S によって誘導される G の部分グラフが連結であるならば, S は G の連結支配集合 (connected dominating set, CDS) と呼ばれる.^{4),8)} 各ブロックが G の連結支配集合であるような $V(G)$ の分割を G の連結支配分割 (connected domatic partition, CDP) と呼ぶ.^{6),7)} 特に, ブロックの数が k である連結支配分割を k -連結支配分割 (k -CDP) と呼ぶ. k が最大である k -CDP を最大 CDP と呼び, そのときの k の値を $d_c(G)$ で表す.

CDS はアドホックネットワークにおける時間効率的なメッセージルーティングや, センサネットワークにおける省電力通信のような, コンピュータネットワークの分散資源管理に対して重要な役割を果たすことが, これまで多くの研究者によって指摘されてきた. 加えて, CDP はそのような通信の耐故障性やリスク回避の性能を改善する方法の一つとして近年注目を浴びている.

小文では, 以下の問題について考える.

k -連結支配分割問題 (k -CDP 問題)

入力: 連結グラフ $G = (V, E)$

質問: G の k -CDP は存在するか?

最大連結支配分割問題 (最大 CDP 問題)

入力: 連結グラフ $G = (V, E)$

仕事: G の最大 CDP を求めよ. すなわち, G の点集合 $V(G)$ を $d_c(G)$ 個の連結支配集合に分割せよ.

これらの問題に関してこれまで多くの研究が行われている.^{1),2),5),9),11)} 特に以下のことが知られている.

(1) 一般に, 最大 CDP 問題は NP-困難である.¹⁾

^{†1} 埼玉大学 大学院理工学研究科 数理電子情報部門

Graduate School of Science and Engineering, Division of Mathematics, Electronics and Informatics, Saitama University

ics, Saitama University

- (2) G が 7-正則グラフ、すなわち、全ての点の次数が 7 であるグラフに制限された場合でさえ、2-CDP 問題は NP-完全である。したがって、 G が 7-正則グラフに制限された場合でさえ、最大 CDP 問題は NP-困難である。²⁾

小文では、5-正則グラフ G に対する 2-CDP 問題が NP-完全であることを示すことによって、 G が 5-正則グラフに制限された場合でさえも最大 CDP 問題が NP-困難であることを示す。

2. TWO-IN-FOUR 4SAT の NP-完全性

本節ではまず TWO-IN-FOUR 4SAT が NP-完全であることを示す。次節で、TWO-IN-FOUR 4SAT からの多項式時間還元を示すことで、5-正則グラフ G に対する 2-CDP 問題が NP-完全であることを示す。

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ をブール変数の集合とする。 U に対する真理値割当てとは関数 $t: U \rightarrow \{T, F\}$ である。 $u \in U$ であるとき、 u と $\bar{u}$ は U 上のリテラルと呼ばれる。 $t(u) = T$ であるとき、 t の下で u は真、 $\bar{u}$ は偽であると言われる。 $t(u) = F$ であるとき、 t の下で u は偽、 $\bar{u}$ は真であると言われる。 U 上の節とは U 上のリテラルの集合である。このとき、以下に示す問題が NP-完全であることを示す。

TWO-IN-FOUR 4SAT

入力: 変数集合 U , 各節 $c \in C$ の要素数 $|c| = 4$ である節集合 C

質問: 各 $c \in C$ のちょうど 2 つのリテラルが真となるような U に対する真理値割当てが存在するか?

TWO-IN-FOUR 4SAT が NP に属することは自明であるので、NP-完全であることを示すためには、NP-完全であることが知られている NOT-ALL-EQUAL 3SAT^{3),10)} からの多項式時間還元を与えればよい。

NOT-ALL-EQUAL 3SAT

入力: 変数集合 U' , 各節 $c' \in C'$ の要素数 $|c'| = 3$ である節集合 C'

質問: 各 $c' \in C'$ の少なくとも 1 つのリテラルが真、少なくとも 1 つのリテラルが偽となるような U' に対する真理値割当てが存在するか?

NOT-ALL-EQUAL 3SAT の入力 U' と C' が与えられたとき、各 $c' \in C'$ に対して U'

に含まれない変数 $z_{c'}$ を用意し、

$$U = U' \cup \{z_{c'} : c' \in C'\}, \quad C = \{c' \cup \{z_{c'}\} : c' \in C'\}$$

とおく。このとき、 U, C は TWO-IN-FOUR 4SAT の入力である。また、各 $c' \in C'$ の少なくとも 1 つのリテラルが真、少なくとも 1 つのリテラルが偽となるような変数集合 U' に対する真理値割当てが存在するとき、かつそのときに限り、各 $c' \cup \{z_{c'}\} \in C$ のちょうど 2 つのリテラルが真となるような変数集合 U に対する真理値割当てが存在することは明らかである。よって以下の定理を得る。

定理 1. TWO-IN-FOUR 4SAT は NP-完全である。

3. 5-正則グラフに対する 2-CDP 問題の NP-完全性

本節では、以下の定理を証明する。

定理 2. 5-正則グラフに対してさえ 2-CDP 問題は NP-完全である。すなわち、与えられた 5-正則グラフが 2-CDP を持つか否かを判定する問題は NP-完全である。

また、この定理から以下の系が得られる。

系 1. グラフ G が 5-正則グラフに制限された場合でさえ、最大 CDP 問題は NP-困難である。

2-CDP 問題は明らかに NP に属する。以下では、定理 2 の証明のために前節で NP-完全性が示された TWO-IN-FOUR 4SAT から 2-CDP 問題への多項式時間還元を与える。

3.1 TWO-IN-FOUR 4SAT から 2-CDP 問題への多項式時間還元

TWO-IN-FOUR 4SAT の入力 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ が与えられたとき、以下のように 5-正則グラフ $G_{U,C}$ を構成する。

- (1) ベースグラフ B_n を、 $2n \times 2$ トーラス $D_{2n,2}$ から各 $i = 1, 2, \dots, 2n$ に対して $b_{i,1}$ と $b_{i,2}$ の間を図 2 のアダプタグラフを接続して得られるグラフ (図 3) とする。ここで、 $D_{2n,2}$ は以下のように定義されるグラフである (図 1):

$$\begin{aligned} V(D_{2n,2}) &= \{b_{i,j} : i = 1, 2, \dots, 2n \text{ かつ } j = 1, 2\}; \\ E(D_{2n,2}) &= \{(b_{i,j}, b_{i',j}) : |i - i'| = 1 \text{ または } |i - i'| = 2n - 1, j \in \{1, 2\}\} \\ &\quad \cup \{(b_{i,1}, b_{i,2}) : i = 1, 2, \dots, 2n\}. \end{aligned}$$

- (2) 各変数 $u_i \in U$ に対して、 m_i を変数 u_i を正のリテラルとして含む節の数と負のリテラルとして含む数の総和とする。このとき、 D'_i を $(m_i + 1, 2)$ トーラスから 1 本の

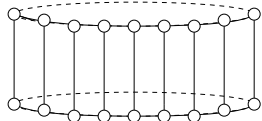


図 1 $2n \times 2$ トーラス $D_{2n,2}$



図 2 アダプタグラフ

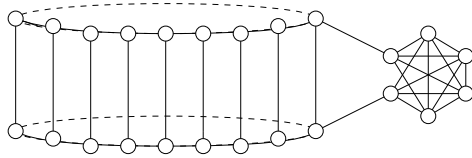


図 3 ベースグラフ B_n

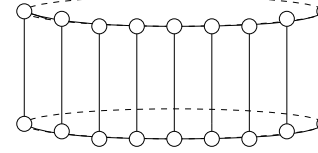


図 4 グラフ D'_i

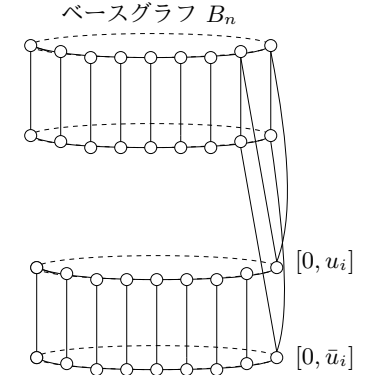


図 5 変数 u_i に対する真理値割当てグラフ T_i

辺を取り除いた以下のグラフとする (図 4).

$$\begin{aligned} V(D'_i) &= \{[k, u_i], (k, \bar{u}_i) : k = 0, 1, \dots, m_i\}; \\ E(D'_i) &= \{([k, x], [k', x]) : k' = (k \pm 1) \bmod (m_i + 1), x \in \{u_i, \bar{u}_i\}\} \\ &\quad \cup \{([k, u_i], [k, \bar{u}_i]) : k = 1, 2, \dots, m_i\}. \end{aligned}$$

さらに、各 $k = 0, 1, \dots, m_u$ に対して、 D'_i の 2 点 $[k, u_i]$ と $[k, \bar{u}_i]$ を図 2 で接続して得られるグラフを T_i とおき、これを u_i に対する真理値割当てグラフと呼ぶ。

- (3) 各 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して、 B_n と T_i の間の以下の 4 つの対の間を辺で結ぶ:
- B_n の $b_{2i-1,1}$ と T_i の $[0, u_i]$
 - B_n の $b_{2i-1,2}$ と T_i の $[0, u_i]$
 - B_n の $b_{2i,1}$ と T_i の $[0, \bar{u}_i]$
 - B_n の $b_{2i,1}$ と T_i の $[0, \bar{u}_i]$
- (4) 各節 $c_l = \{c_{l,1}, c_{l,2}, c_{l,3}, c_{l,4}\}$ に対して、節グラフ H_l を図 6 のグラフとして定義する。
- (5) T_i と H_l の間を以下のように接続する。
- $c_{l,j} = u_i$ であるとする。もし C_l が変数 u_i を (正または負のリテラルとして) 含む k 番目の節であるならば、 $[k, u_i]$ と $c_{l,j,1}$ を辺で結び、 $[k, \bar{u}_i]$ と $c_{l,j,1}$ を図 2 のアダプタグラフで結ぶ (図 7(a) 参照)。
 - $c_{l,j} = \bar{u}_i$ であるとする。もし C_l が変数 u_i を (正または負のリテラルとして) 含む k 番目の節であるならば、 $[k, \bar{u}_i]$ と $c_{l,j,1}$ を辺で結び、 $[k, u_i]$ と $c_{l,j,1}$ を図 2 のアダプタグラフで結ぶ (図 7(b) 参照)。

以下の補題は簡単に確認できる。

補題 1. TWO-IN-FOUR 4SAT の入力 U, C が与えられたとき、グラフ $G_{U,C}$ は多項式時間で構成可能である。また、グラフ $G_{U,C}$ は 5-正則グラフである。

したがって、定理 2 を示すためには以下の補題を証明すればよい。

補題 2. TWO-IN-FOUR 4SAT の入力 U, C に対して、各節 $c \in C$ のちょうど 2 個のリテラルが真となる U に対する真理値割当てが存在するための必要十分条件は、グラフ $G_{U,C}$ が 2-CDP を持つことである。

3.2 補題 2 の必要性の証明

TWO-IN-FOUR 4SAT の入力 U, C に対して、各節 $c \in C$ のちょうど 2 個のリテラルが真となる U に対する真理値割当て t が存在すると仮定する。このとき、 $G_{U,C}$ の 2-CDP (S_1, S_2) を以下のように定義する。

- 各 $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ に対して、ベースグラフ B_n の各点 $b_{i,j}$ を S_j に追加する。ここで、 $j \in \{1, 2\}$ である。
- 各 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して、 u_i の真理値割当てグラフ T_i の各点を以下のように S_1, S_2 へ追加する。
 - $t(u_i) = T$ であるならば、全ての $k \in \{0, 1, \dots, m_i\}$ に対して $[k, u_i]$ を S_1 に、 $[k, \bar{u}_i]$ を S_2 に追加する (図 8(a) 参照)。
 - $t(u_i) = F$ であるならば、全ての $k \in \{0, 1, \dots, m_i\}$ に対して $[k, \bar{u}_i]$ を S_1 に、 $[k, u_i]$ を S_2 に追加する (図 8(b) 参照)。

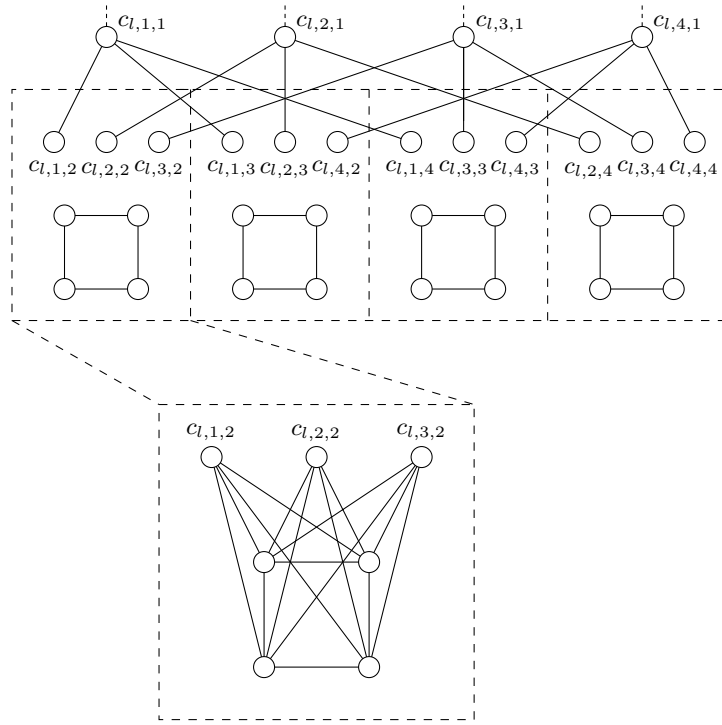


図 6 節グラフ H_l

- 各 $l \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対して, t において節 $c_l = \{c_{l,1}, c_{l,2}, c_{l,3}, c_{l,4}\}$ のちょうど 2 つのリテラルが真である. 一般性を失うことなく $c_{l,1}$ と $c_{l,2}$ が真であると仮定する. このとき, 図 9 の節グラフ H_l において, 黒い点を S_1 へ, 白い点を S_2 へ追加する.
- 各アダプタグラフに接続されている 2 つの点は, 一方が S_1 に, 他方が S_2 に加えられているので, アダプタグラフの各点は, 図 10 のように黒い点と白い点に分けて, 一方を S_1 へ, 他方を S_2 へ追加する.

このとき, (S_1, S_2) が $G_{U,C}$ であることは簡単に確認できる. よって, $G_{U,C}$ は 2-CDP を持つ.

3.3 補題 2 の十分性の証明

$G_{U,C}$ が 2-CDP (S_1, S_2) を持つと仮定する. アダプタグラフに接続されている両端点が

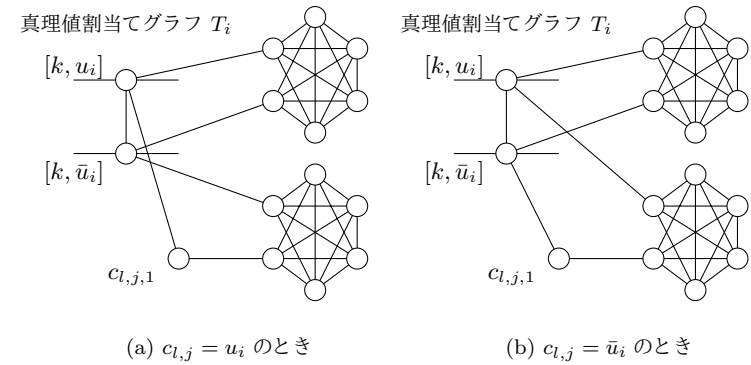


図 7 真理値割当てグラフ T_i と節グラフ H_l の接続

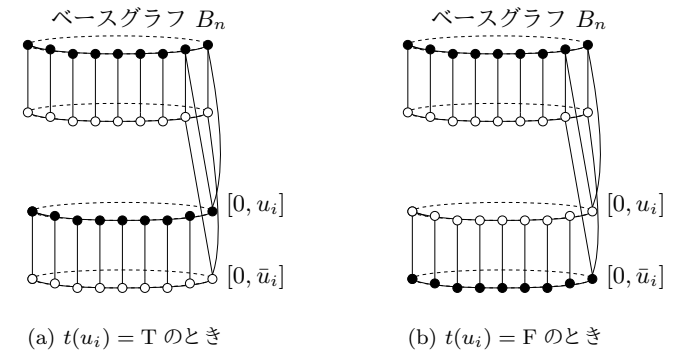


図 8 真理値割当てグラフ T_i の点の分割

同一のブロックに属することは S_j ($j \in \{1, 2\}$) が連結支配集合であることに反するので, 以下の事実が成り立つ.

事実 1. もし u_i の正もしくは負のリテラル x に対して $(c_{l,j,1}, [k, x]) \in E(G_{U,C})$ ($j \in \{1, 2, 3, 4\}, k \in \{1, 2, \dots, m_i\}$) であるならば, 以下のいずれか一方が成り立つ.

- $\{c_{l,j,1}, [k, x]\} \subset S_1$ かつ $[k, \bar{x}] \in S_2$
- $[k, \bar{x}] \in S_1$ かつ $\{c_{l,j,1}, [k, x]\} \subset S_2$

また, 節グラフ H_l の性質から以下の事実が成り立つ (図 11 参照).

事実 2. 任意の $l \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対して $|\{c_{l,1,1}, c_{l,2,1}, c_{l,3,1}, c_{l,4,1}\} \cap S_1| = 2$ かつ

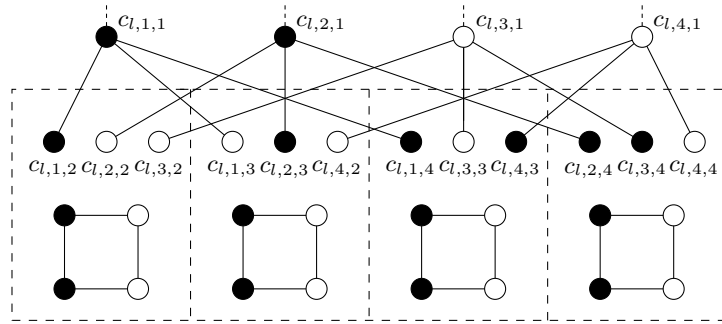


図 9 節グラフ H_l の点の分割

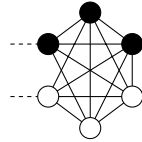


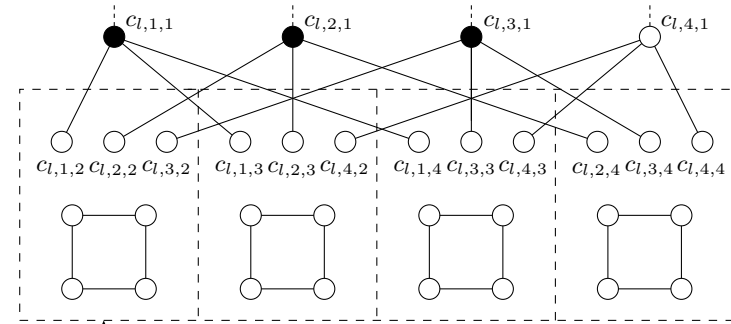
図 10 アダプタグラフのノード分割

$|\{c_{l,1,1}, c_{l,2,1}, c_{l,3,1}, c_{l,4,1}\} \cap S_2| = 2$ である.

事実 2 と節グラフ H_l の 4 つの点 $c_{l,1,1}, c_{l,2,1}, c_{l,3,1}, c_{l,4,1}$ の対称性により, $c_{l,1,1}, c_{l,2,1} \in S_1$ かつ $c_{l,3,1}, c_{l,4,1} \in S_2$ として一般性を失わない. このとき, 以下の補題が成り立つ.

補題 3. $S_1 \cap V(H_l)$ によって誘導される H_l の部分グラフは $c_{l,1,1}$ と $c_{l,2,1}$ を結ぶパスを含まない.

証明. $S_1 \cap V(H_l)$ によって誘導される H_l の部分グラフが $c_{l,1,1}$ と $c_{l,2,1}$ を結ぶパスを含むと仮定する. このとき, $c_{l,1,2}, c_{l,2,2} \in S_1$ もしくは $c_{l,1,3}, c_{l,2,3} \in S_1$ でなければならない. 一般性を失うことなく $c_{l,1,2}, c_{l,2,2} \in S_1$ と仮定する. また, S_1 が $G_{U,C}$ の連結支配集合であるので, $c_{l,1,3} \in S_1$ または $c_{l,2,3} \in S_1$ でなければならない. 再び, 一般性を失うことなく $c_{l,1,3} \in S_1$ であると仮定する. S_1 が $G_{U,C}$ の連結支配集合であるためには $c_{l,1,4} \in S_1$ でなければならない. 一方, 事実 1 より, H_l にない $c_{l,1,1}$ の隣接点も S_1 の要素でなければならない. したがって, $c_{l,1,1}$ 自身と $c_{l,1,1}$ の全ての隣接点が S_1 の要素であるので, $c_{l,1,1}$ は S_2 によって支配されない. これは (S_1, S_2) が 2-CDP であることに矛盾する. 図 12 参照. ■



白い点の集合に支配されないか, 誘導部分グラフが非連結になる

図 11 事実 2 の正当性

補題 3 とグラフ $G_{U,C}$ の構成から, S_1 によって誘導される $G_{U,C}$ の部分グラフにおいて, $c_{l,1,1}$ と $c_{l,2,1}$ を結ぶパスはベースグラフ上を通らなければならない. 一般性を失うことなく $c_{l,1} = u_i$ とする. このとき, H_l 上の点 $c_{l,1,1}$ と T_i 上の点 $[k, u_i]$ ($k \in \{1, 2, \dots, m_i\}$) は辺で結ばれており, 事実 1 より $[k, u_i] \in S_1$ である. さらに事実 1 より任意の $k' \in \{0, 1, \dots, m_i\}$ に対して $[k', u_i] \in S_1$ でなければならない, $[k', \bar{u}_i] \in S_2$ でなければならない. したがって, 以下の補題が成立する.

補題 4. 任意 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して以下のいずれか一方が成り立つ.

- 全ての $k \in \{0, 1, \dots, m_i\}$ に対して $[k, u_i] \in S_1$ かつ $[k, \bar{u}_i] \in S_2$
- 全ての $k \in \{0, 1, \dots, m_i\}$ に対して $[k, \bar{u}_i] \in S_1$ かつ $[k, u_i] \in S_2$

補題 4 は U に対する真理値割当て t を決定する. 各 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して,

- 全ての $k \in \{0, 1, \dots, m_i\}$ に対して $[k, u_i] \in S_1$ であるならば $t(u_i) = \text{T}$ とする.
- 全ての $k \in \{0, 1, \dots, m_i\}$ に対して $[k, \bar{u}_i] \in S_1$ であるならば $t(u_i) = \text{F}$ とする.

このとき, 事実 1 と 2 より, t は各節 $c \in C$ のちょうど 2 つのリテラルを真にする.

4. ま と め

小文では, TWO-IN-FOUR 4SAT からの多項式時間還元を与えることにより, 5 正則グラフに対する 2-CDP 問題, すなわち, 5 正則グラフが 2-CDP を持つか否かを判定する問題が NP-完全であることを示した. その系として, グラフ G を 5-正則グラフに限定したとしても最大 CDP 問題が NP-困難であることを示した. 今後の課題としては, r -正則グラフ

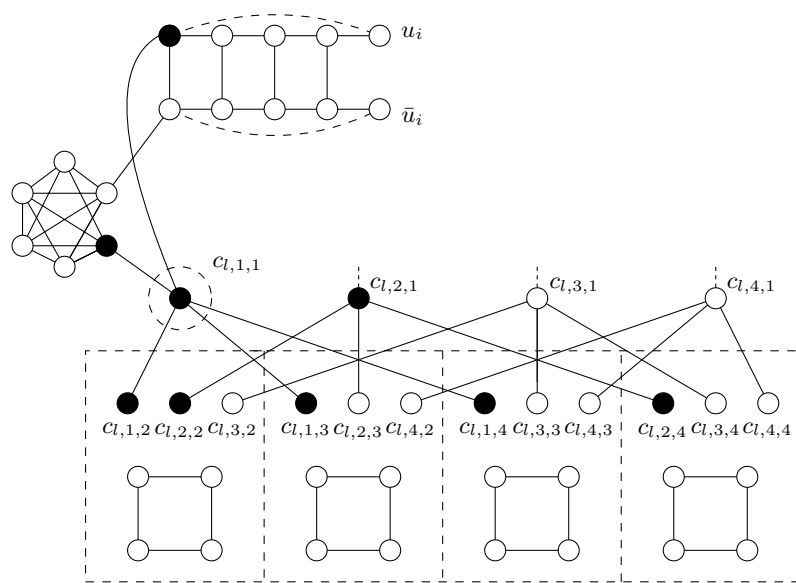


図 12 補題 3 の正当性

($r = 3$ または 4) に対する 2-CDP 問題の難しさと単位円グラフ (Unit Disk Graph, UDG) に対する最大 CDP 問題の難しさを調べることで、最大 CDP 問題に対する近似アルゴリズムを開発することが挙げられる。

参考文献

- 1) Dong, Q.: Maximizing System Lifetime in Wireless Sensor Networks, *Proc. 4th International Symposium on Information Processing in Sensor Networks*, pp.13–19 (2005).
- 2) Fujita, S.: On Connected Domatic Partition of Regular Graphs, *Proc. 2011 Korea-Japan Joint Workshop on Algorithms and Computation (WAAC 2011)*, pp.164–169 (2011).
- 3) Garey, M.R. and Johnson, D.S.: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman & Company, New York, NY (1979).
- 4) Guha, S. and Khuller, S.: Approximation Algorithms for Connected Dominating Sets, *Proc. European Symposium on Algorithms*, pp.179–193 (1996).

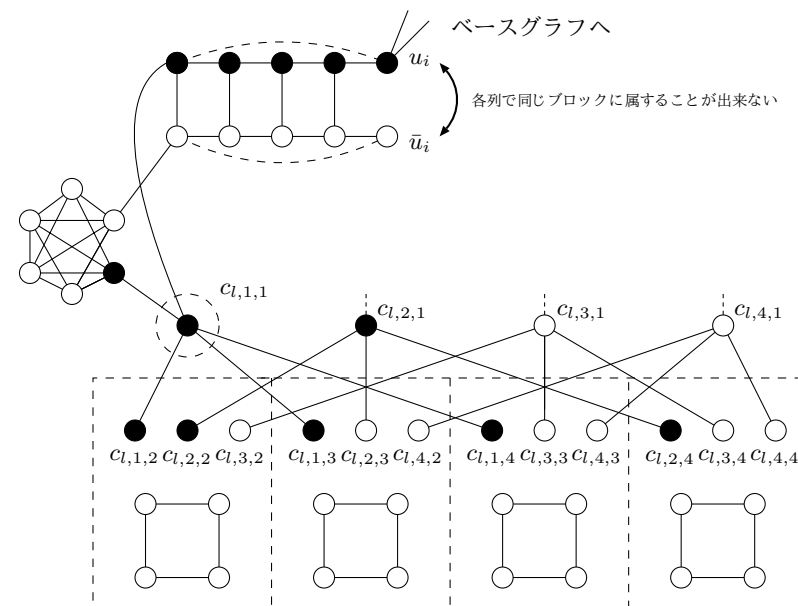


図 13 補題 4 の正当性

- 5) Hartnell, B.L. and Rall, D.F.: Connected Domatic Number in Planar Graphs, *Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol.51, No.1, pp.173–179 (2001).
- 6) Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T. and Slater, P.J.: *Domination in Graphs: Advanced Topics*, Marcel Dekker, Inc. (1998).
- 7) Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T. and Slater, P.J.: *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, Inc. (1998).
- 8) Hedetniemi, S. and Laskar, R.: *Graph Theory and Combinatorics*, pp.209–218, Academic Press (1984).
- 9) Mito, M. and Fujita, S.: Maximum Connected Domatic Partition of Directed Path Graphs with Single Junction, *Computing and Combinatorics, 14th Annual International Conference, COCOON 2008*, LNCS, Vol.5092, pp.425–433 (2008).
- 10) Schaefer, T.J.: The Complexity of Satisfiability Problems, *Proc. 10th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp.216–226 (1978).
- 11) Zelinka, B.: Connected Domatic Number of a Graph, *Math. Slovaca*, Vol.36, pp.387–392 (1986).