《論　文》

行列の式の並列計算について*

丸　山　　清** D. J. Kuck***

Abstract

In this paper we consider the parallel evaluation of matrix expressions using arbitrarily many independent processors. We first give upper bounds on the time required to perform binary matrix operations: addition, subtraction and multiplication. Second, we give upper bounds on the time required to evaluate matrix expressions with on inversions, and then give bounds for expressions with inversions. Finally, we consider the time required to evaluate polynomial forms of matrices.

1. まえがき

APL および **PL/I** は行列の式を直接書き表わすことを許しており，将来この種の要素をより多く含む新しい言語[1]の開発がなされるものと思われる．行列の式が与えられる場合，そのより効率の良いコードを発生するコンパイラーの目的は，計算に必要なワークスペイスの縮少[3,10]および処理に必要な演算回数の減小[9,11]と思われる．最近の Muraoka および Kuck[8]の研究は掛算のみより構成される行列の式を仮定し，処理時間および演算回数を最小とする行列の式に変換するパースアルゴリズム (parsing algorithm) を与えている．

本論文では，数多くの独立な演算処理装置が与えられるものと仮定し，4 種類の行列演算（加算，減算，掛算およびインバージョン）を含む**行列の式の並列計算**について考えてみる．ここでは，行列の掛算は**可換でない** (non-commutative) ものとし，現実から遠くはなるが，行列の**逆行列が常に存在する**もの (non-singularity) と仮定する．したがって本論文が他の項式の論文[2,4,5,6,7]と異なる点は，掛算が不可換であるという点にある．

まず行列の基本演算に必要な計算時間の上限について考え，それらの上限を満すところの**行列処理装置** (matix processors) を仮定することにより，種々なクラスの行列の式の並列計算に必要な処理時間の上限について考えてみる．

2. 行列の基本演算

ここでは限られた数の処理装置 (processors or arithmetic units)を使用し，行列，ベクトルおよびスカラーの間の加算，減算および掛算に必要な時間の上限について考える．ただし，おのおのの処理装置はスカラー間の加算，減算，掛算のいずれをも行なえるものとし，加算ないし減算に t_a，掛算に t_m の時間が必要なものと仮定する．

下記の補題において，任意の n 次の正方行列をAで表わし，n次の行 (row) および列 (column) ベクトルをRおよびCで表わし，α をもって任意のスカラーを表わす．さらに，K個の処理装置を用いて行列の式 fを計算するに必要な時間を $T_K(f)$ で表わす．必要でない限り補題の証明ははぶく．

〔補題 1〕*

i) $T_K(A\pm A)=\lceil n^2/K\rceil t_a\equiv\tau_A$ for $1\leq K\leq n^2$,

ii) $T_K(R\pm R)=\lceil n/K\rceil t_a$ for $1\leq K\leq n$,

iii) $T_K(C\pm C)=\lceil n/K\rceil t_a$ for $1\leq K\leq n$.

〔補題 2〕

i) $T_K(\alpha A)=T_K(A\alpha)=\lceil n^2/K\rceil t_m\equiv\tau_{SM}$ for $1\leq K\leq n^2$,

ii) $T_K(\alpha R)=T_K(R\alpha)=\lceil n/K\rceil t_m$ for $1\leq K\leq n$,

* The Parallel Eualuation of Matrix Expressions, by Kiyoshi Maruyama (IBM Thomas J. Watson Research Center) and D. J. Kuck (Department of Computer Science, University of Illinois)

** IBM トーマス J. ワトソン研究所

*** イリノイ大学コンピュータ・サイエンス部

* x を実数とすれば $\lceil x\rceil$ は $x+1>\lceil x\rceil\geq x$ を満足する整数を表わし，$\lfloor x\rfloor$ は $x\geq\lfloor x\rfloor>x-1$ を満足する整数を表わす．

iii) $T_K(\alpha C)=T_K(C\alpha)=\lceil n/K\rceil t_m$

for $1\leq K\leq n$.

〔補題 3〕

i) $T_K\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\leq(\lceil n/K\rceil-1+\lceil\log_2 K\rceil)t_a$

for $1\leq K\leq\lfloor n/2\rfloor$,

ii) $T_K\left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\leq(\lceil n/K\rceil-1+\lceil\log_2 K\rceil)t_m$

for $1\leq K\leq\lfloor n/2\rfloor$.

ただし，$\sum_{i=1}^{n}$ は n 個の加算および（ないし）減算を表わし $\prod_{i=1}^{n}$ は n 個の掛算を表わす．

〔補題 4〕

証明は**補題 3** を用いて簡単に行なえる．

i) $T_K(RC)\leq\lceil n/K\rceil t_m+(\lceil n/K\rceil-1+\lceil\log_2 K\rceil)t_a$

for $1\leq K\leq n$,

ii) $T_K(CR)\leq\lceil n^2/K\rceil t_m$ for $1\leq K\leq n^2$.

〔補題 5〕

$$T_K(RA)=T_K(AC)$$
$$\leq\lceil n^2/K\rceil t_m+(n-1)\lceil n/K\rceil t_a \quad \text{for } 1\leq K\leq n,$$
$$\leq\lceil n^2/K\rceil t_m+(\lceil n/\lfloor K/n\rfloor\rceil-1+\lceil\log_2(K/n)\rceil)t_a \quad \text{for } n\leq K\leq n^2.$$

〔証明〕

RA について考える．

$1\leq K\leq n$ を仮定する．n^2 個の掛算は $\lceil n^2/K\rceil t_m$ の時間内に行なえる．行ベクトルの各値を導くための加算は 1 個の処理装置を用いて $(n-1)t_a$ 内に行なえる．ここで K 個の処理装置が与えられていることより，行ベクトルの n 個の値は $\lceil n/K\rceil(n-1)t_a$ 時間内に求まる．ゆえに全体として $\lceil n^2/K\rceil t_m+\lceil n/K\rceil(n-1)t_a$ となる．

$n\leq K\leq n^2$ を仮定する．n^2 個の掛算は $\lceil n^2/K\rceil t_m$ 時間内に行なえる．行ベクトルの各要素に $\lfloor K/n\rfloor$ 個の処理装置を割り当てることにより，n 個のスカラーの加算は**補題 3** を用いて

$$(\lceil n/\lfloor K/n\rfloor\rceil-1+\lceil\log_2(K/n)\rceil)t_a$$

時間内に行なえる．したがって全体として，

$$\lceil n^2/K\rceil t_m+(\lceil n/\lfloor K/n\rfloor\rceil-1+\lceil\log_2(K/n)\rceil)t_a$$

となる．$T_K(AC)$ の証明も $T_K(RA)$ の証明と同様にして行なえる． (Q. E. D)

〔補題 6〕

$$T_K(AA)$$
$$\leq\lceil n^3/K\rceil t_m+(n-1)\lceil n^2/K\rceil t_a\equiv\tau_M \quad \text{for } 1\leq K\leq n^2,$$
$$\leq\lceil n^3/K\rceil t_m+(\lceil n/\lfloor K/n^2\rfloor\rceil-1+\lceil\log_2(K/n^2)\rceil)t_a\equiv\tau_M \quad \text{for } n^2\leq K\leq n^3.$$

〔証明〕

$1\leq K\leq n^2$ を仮定する．K 個の処理装置を用いて n^3 個の掛算を $\lceil n^3/K\rceil t_m$ 時間内に行なえる．結果となる行列の各要素は更に n 個のスカラーの加算で求まるゆえ，1 個の処理装置を用いて $(n-1)t_a$ 時間内に求まる．したがって K 個の処理装置を用い，n^2 個のエレメントを $\lceil n^2/K\rceil(n-1)t_a$ 時間内に求めることができる．ゆえに全体として $\lceil n^3/K\rceil t_m+(n-1)\lceil n^2/K\rceil t_a$ となる．

$n^2\leq K\leq n^3$ を仮定する．K 個の処理装置を用いて n^3 個の掛算は $\lceil n^3/K\rceil t_m$ 時間内に行なえる．結果となる行列の各要素に $\lfloor K/n^2\rfloor$ 個の処理装置を割り当てることにより，**補題 3** を用いて，n 個のスカラーの加算が $(\lceil n/\lfloor K/n^2\rfloor\rceil-1+\lceil\log_2(K/n^2)\rceil)t_a$ 時間内に行なえることより補題が導ける． (Q. E. D.)

3. インバース演算を含まぬ行列の式の計算

ここでは，行列の演算として加算(+)，減算(−)および掛算(*)の 3 つを考える．さらに，行列処理装置 (matrix-processors) が数多く与えられるものと仮定し，各行列処理装置は行列の加算ないし減算を τ_A 時間内に終了できるものとし，また行列の掛算を τ_M 時間内に終了できるものとする．τ_A および τ_M は**補題 1** および**補題 6** に示されている．

問題の簡単化のために，以後，行列を正方行列 (matrices of order n) とする．**行列の式**とは行列演算子および n 次行列より構成される**ウェルフォームドストリング** (well-formed string) とし，m 個の異なる n 次正方行列より構成される行列の式を $f(m)$ で表わすものとする．ここで行列の式 f に含まれる行列の数を $|f|$ で表わし，$\|f\|$ をもって f に含まれるパレンセシス (pairs of parentheses) の数を表わす．さらに $f(m|p)$ をもって多くとも p 個のパレンセシスを含む行列の式 $f(m)$ を表わす．

つぎの補題は Maruyama[5] の補題 2 の証明および行列の掛算が一般に可換でないことより明らかとなる．

〔補題 7〕

インバース演算を含まぬ行列の式 $f(m|p)$ は

$f_1 g f_2+f_3$

の形に変換できる．ただし

$|f_1|+|f_2|\leq m-|g|$, $|f_3|\leq m-|g|$,

$\|f_1\|+\|f_2\|\leq p-\|g\|$, $\|f_3\|\leq p-\|g\|$

であり，g は $f(m|p)$ の任意の部分行列の式であり，f_1, f_2 および f_3 は g を含まぬ行列の式である．

〔補題 8〕（丸山，Kuck[4]）

任意の s, $1<s\leq m$, および行列の式 $f(m)$ において，つぎの条件を満す行列の式 $f_L\theta f_R$ を常にみつけることができる．

$|f_L|<s$, $|f_R|<s$, そして $|f_L|+|f_R|\geq s$.

ただし，$\theta\in\{+,-,*\}$.

つぎに示す定理は**補題 7** および**補題 8** を用いて帰納法により証明できる．また，その証明はつぎに示す**定理 2** の証明と非常に類似しているため，**定理 1** の証明は略す．

〔**定理 1**〕

m 個の正方行列より構成されるインバース演算を含まぬ任意の行列の式 $f(m)$ は

$2(\lceil\log_2 m\rceil-1)(\tau_M+\tau_A)$

時間内に計算できる．ここで $m\geqq 3$.

〔系 1〕

m 個の n 次正方行列より構成されるインバース演算を含まない任意の行列の式 $f(m)$ はもしも $n\geq m/2$, $m\geq 4$, そして $t_m\geq t_a$ であるならば $2\lceil\log_2 m\rceil\tau_M$ 時間内に計算できる．

〔証明〕

補題 1 および**補題 6** において $t_m\geq t_a$ を仮定すれば $\tau_M\geq(\lceil\log_2 n\rceil+1)\tau_A$ が成立する．したがって $n\geq m/2$ を仮定すれば**定理 1** より系は明らかとなる．

(Q. E. D.)

以上は行列の式 $f(m)$ 内に含まれるパレンセシスの数を考えないで議論を行なったが，つぎにパレンセシスの数を考えた場合の計算時間の上限について議論を行なう．Maruyama[5] は，任意の行列の式 $f(m)$ に対し，つぎの条件を満すアルゴリズム A^0 を述べている．

$|A^0[f(m)]|=|f(m)|$

かつ

$\|A^0[f(m)]\|\leq\lfloor m/2\rfloor$.

したがって，以後与えられる行列の式 $f(m|p)$ に対し，前もってアルゴリズム A^0 を用いることにより，常に $p\leq\lfloor m/2\rfloor$ が成立するものと仮定する．しかしながら，以下に示す補題および定理は任意の p, $p\geq 0$ について成立することは明らかである．

〔**補題 9**〕（Maruyama[5]）

任意の行列の式 $f(m|p)$ において，$p\geq s\geq 0$ とすれば，つぎの条件を満す行列の式 $f(m|p)$ の部分行列の式 $f_L\theta f_R$ ないし $(f_L\theta f_R)$ を常に見つけることができる．

$\|f_L\|\leq s$, $\|f_R\|\leq s$ かつ $\|f_L\|+\|f_R\|\geq s$,

ただし $\theta\in\{+,-,*\}$.

つぎに示す補題は，**補題 7** および**補題 9** を用い，m に対して帰納法を適用することにより簡単に証明できる．

〔**補題 10**〕（Muraoka[7]）

m 個の正方行列より構成されるインバース演算を含まない任意の行列の式 $f(m|0)$ は $\tau_A+\lceil\log_2 m\rceil\tau_M$ 時間内に計算できる．

〔**定理 2**〕

m 個の正方行列より構成されるインバース演算を含まない任意の行列の式 $f(m|p)$ は

$2(\lceil\log_2 p\rceil+1)(\tau_M+\tau_A)+\lceil\log_2 m\rceil\tau_M$

時間内に計算できる．

〔**証明**〕

帰納法により定理を証明する．

$p\leq 2^k$ とする．$k=0$ においてパレンセシスに囲まれている $f(m|1)$ の部分行列の式を g とすれば $\|g\|=0$, $\|(g)\|=1$ であることより g は $g(m|0)$ と書き表わすことができる．$g(m|0)$ とは定義より，多くとも m 個の正方行列より構成されるインバース演算もパレンセシスも含まない任意の行列の式である．したがって**補題 7** より $f(m|1)$ は

$f_1(m|0)g(m|0)f_2(m|0)+f_3(m|0)$

と変換できる．ここで**補題 10** より，f_1, g, f_2 および f_3 は，それぞれ $\lceil\log_2 m\rceil\tau_M+\tau_A$ 時間内に計算できるから，$f(m|1)$ は $\lceil\log_2 m\rceil\tau_M+2(\tau_M+\tau_A)$ 時間内に計算できる．したがって定理が $k=0$ の時に成立する．

定理が $k\leq r-1$ の時に成立するものと仮定し，定理が $k=r$, $2^{r-1}<p\leq 2^r$ の時にも成立することを示す．

与えられる任意の行列の式 $f(m|2^r)$ に $s=2^{r-1}$ として**補題 9** を適用すれば $\|f_L\|\leq 2^{r-1}$, $\|f_R\|\leq 2^{r-1}$ および $\|f_L\|+\|f_R\|\geq 2^{r-1}$ を満す $f(m|2^r)$ の部分行列の式 $f_L\theta f_R$ ないし $(f_L\theta f_R)$ を見つけることができる．ただし $\theta\in\{+,-,*\}$. したがって f_L および f_R は $f_L(m|2^{r-1})$ および $f_R(m|2^{r-1})$ として書き表わせるから $f(m|2^r)$ は**補題 7** より

$f_1(m|2^{r-1})[f_L(m|2^{r-1})\theta f_R(m|2^{r-1})]f_2(m|2^{r-1})$

$+f_3(m|2^{r-1})$

と交換できる．ここで帰納法の仮定より，f_1, f_L, f_R, f_2 および f_3 は $2r(\tau_M+\tau_A)+\lceil\log_2 m\rceil\tau_A$ 時間内に計算できる．$f(m|2^r)$ は，さらに $2(\tau_M+\tau_A)$ 時間内に計算できる．ゆえに定理が $k=r$ の時にも成立する．

(Q. E. D.)

4. インバース演算を含む行列の式の計算

前章では，行列の加算，減算および掛算のみから構成される行列の式の計算時間の上限について議論したが，この章では行列の式のもう一つの演算であるインバージョンをも含め，インバース演算も含む行列の式の計算時間の上限について考えてみる．本章でも前章と同様に正方行列より構成される行列の式を考え，行列のインバースが常に存在すると仮定し，また n 次正方行列の逆行列が1個の行列処理装置を用いて τ_I 時間内に計算できるものと仮定する．

〔定理 3〕 (Muraoka[7])

m個の正方行列より構成される任意の行列の式 $f(m)$ は行列の式の associativity および commutativity のみ使用し，m 個の行列処理装置を使用して $(2d+\lceil\log_2 m\rceil)\tau_M+\tau_A+l\tau_I$ 時間内に計算できる．ただし，dはパレンセシス・ネスティングの深さ (the depth of parenthesis nesting) であり，l はインバース演算の深さであり，$l\leq d+2$ となる．

〔補題 11〕 (Brent[2]，丸山，Kuck[6])

m個の正方行列より構成される任意の行列の式 $f(m)$ の任意の1個の行列をXとすれば，$m\geq s>1$，を満す s に対し，つぎの条件を満す $f(m)$ の部分行列の式 $f_X=f_L\theta f_R$ を見つけることができる．ただし，$\theta\in\{+,-,*\}$．条件とはXが f_X の中に含まれ $|f_X|\geq s$ であり (a) ないし (b) が成立する．

(a) Xが f_L に含まれるならば $|f_L|<s$.

(b) Xが f_R に含まれるならば $|f_R|<s$.

〔定理 4〕

m個の正方行列より構成される任意の行列の式 $f(m)$ は $O(m)$ 個の行列処理装置を用いて，$\lceil\log_2 m\rceil\cdot(3\tau_M+2\tau_A+\tau_I)-\tau_M-\tau_A+\tau_I$ 時間内に計算できる．

〔証明〕

$\alpha=3\tau_M+2\tau_A+\tau_I$ とし，定理を証明するために，つぎに示すクレイムを証明する．

クレイム

$f(m)$ は $g_1g_2^{-1}$ ないし $g_1^{-1}g_2$ に変換でき g_1 および g_2 は $\alpha\lceil\log_2 m\rceil-2\tau_M-\tau_A$ 時間内に計算できる．

さらに $f(m)$ に含まれる任意の行列をXとすれば，$f(m)$ は $(f_1X+f_2)(f_3X+f_4)^{-1}$ ないし $(f_1X+f_2)^{-1}\cdot(f_3X+f_4)$ に変換でき各 f_1, f_2, f_3 および f_4 が $\alpha\lceil\log_2 m\rceil+\tau_I$ 時間内に計算できる．

クレイムの証明

帰納法によりクレイムを証明する．

$k=\lceil\log_2 m\rceil$ とする．$k=1$ とすれば2個の行列より構成される任意の行列の式 $f(2)$ の g_1 および g_2 は $\tau_M+\tau_A+\tau_I=\alpha-2\tau_M-\tau_A$ 時間内に計算できることはあきらかである．さらに $f(2)$ の f_1, f_2, f_3 および f_4 は明らかに $3\tau_M+2\tau_A+2\tau_I=\alpha+\tau_I$ 時間内に計算できる．したがってクレイムが $k=1$ の時に成立する．そこで，クレイムが $1\leq k\leq r-1$ の時に成立するものと仮定し，クレイムが $k=r$ の時にも成立することを示す．

まず，クレイムの前半を証明する．与えられる $f(2^r)$ に $s=2^{r-1}+1$ として補題8を適用し $|f_L|\leq 2^{r-1}$，$|f_R|\leq 2^{r-1}$ および $|f_L|+|f_R|\geq 2^{r-1}+1$ となる $f(2^r)$ の部分行列の式 $f_X=f_L\theta f_R$，$\theta\in\{+,-,*\}$ を見つければ，帰納法仮定の後半より $f(2^r)$ は

$$f(2^r)=(f_1'f_X+f_2')(f_3'f_X+f_4')^{-1}$$

ないし

$$=(f_1'f_X+f_2')^{-1}(f_3'f_X+f_4') \tag{4.1}$$

と変換でき，各 f_1', f_2', f_3' および f_4' は $\alpha(q-1)+\tau_I$ 時間内に計算できる．さらに帰納法仮定の前半を f_L および f_R に適用すれば，f_L および f_R は

$$f_L=g_{L1}g_{L2}^{-1} \text{ ないし } g_{L1}^{-1}g_{L2} \tag{4.2}$$

$$f_R=g_{R1}g_{R2}^{-1} \text{ ないし } g_{R1}^{-1}g_{R2} \tag{4.3}$$

と変換でき，各 g_{L1}, g_{L2}, g_{R1} および g_{R2} は $\alpha(r-1)-2\tau_M-\tau_A$ 時間内に計算できる．ここで (4.2) および (4.3) を (4.1) に代入すれば $f(2^r)$ は

$$f(2^r)=g_1g_2^{-1} \text{ ないし } g_1^{-1}g_2 \tag{4.4}$$

に変換できる．ここで$f_L\theta f_R$は $\alpha(r-1)+\tau_I=\alpha(r-1)-2\tau_M-\tau_A+(2\tau_M+\tau_A+\tau_I)$ 時間内に計算できるから，g_1 も g_2 も $\alpha r-2\tau_M-\tau_A=\alpha(r-1)+\tau_I+(\tau_M+\tau_A)$ 時間内に計算できる．(クレイムの前半の証明終り)．

つぎにクレイムの後半の証明を行なう．$f(2^r)$ の任意の行列Xに対し $s=2^{r-1}+1$ として補題 11 を適用し，つぎの条件を満す $f(2^r)$ の部分行列式 $f_X=f_L\theta f_R$，$\theta\in\{+,-,*\}$ を見つける．条件とは f_X がXを含み $|f_X|\geq s$ であり，

(a) f_L がXを含むならば $|f_L|<s$,

(b) f_R がXを含むならば $|f_R|<s$.

一般性を失うことなくして，(a)が成立するものと

仮定する．したがって帰納法仮定の後半より $f(2^r)$ は

$$f(2^r)=(f_1'f_X+f_2')(f_3'f_X+f_4')^{-1}$$

ないし

$$=(f_1'f_X+f_2')^{-1}(f_3'f_X+f_4') \qquad (4.5)$$

に変換でき，各 f_1', f_2', f_3' および f_4' は$\alpha(r-1)+\tau_I$ 時間内に計算できる．同様にして，f_L は

$$f_L=(f_{L1}X+f_{L2})(f_{L3}X+f_{L4})^{-1}$$

ないし

$$=(f_{L1}X+f_{L2})^{-1}(f_{L3}X+f_{L4}) \qquad (4.6)$$

に変換でき，各 f_{L1}, f_{L2}, f_{L3} および f_{L4} は $\alpha(r-1)+\tau_I$ 時間内に計算できる．

つぎに，$|f_R|\leq 2^r$ であるから f_R に帰納法の前半（証明済み）を適用すれば f_R は

$$f_R=g_{R1}g_{R2}^{-1} \quad \text{ないし} \quad g_{R1}^{-1}g_{R2} \qquad (4.7)$$

と変換でき，g_{R1} も g_{R2} も $\alpha r-2\tau_M-\tau_A$ 時間内に計算できる．そこで (4.6) および (4.7) を (4.5) に代入すれば $f(2^r)$ は

$$f(2^r)=(f_1X+f_2)(f_3X+f_4)^{-1}$$

ないし

$$=(f_1X+f_2)^{-1}(f_3X+f_4) \qquad (4.8)$$

と変換でき，各 f_1, f_2, f_3 および f_4 が $\alpha r-2\tau_M-\tau_A+(\tau_I+2\tau_M+\tau_A)=\alpha r+\tau_I$ 時間内に計算できることが示せる．（クレイムの証明終了）．

詳しい議論は行なわないが，上記の方法にて $f(m)$ を $\alpha\lceil\log_2 m\rceil-\tau_M-\tau_A+\tau_I$ 時間内に計算するには $O(m)$ 個の行列処理装置が必要となる． (Q.E.D.)

5. 行列 *m* 次多項式形の計算

この章では，n 次の正方行列より構成される m 次の多項式形 (*m*-th degree polynomial form of matrices of oder *n*) の並列計算を考える．n 次の行列より構成される m 次多項式形を

$$p(m)=(\cdots((\alpha_m A_m+\alpha_{m-1}I_n)A_{m-1}+\alpha_{m-2}I_n)A_{m-2}+\cdots+\alpha_1 I_n)A_1+\alpha_0 I_n$$

と書き表わす．ただし，$\alpha_i, i=0,1,\cdots,m$ は相異なるスカラーであり，$A_j, j=1,2,\cdots,m$ は相異なる n 次の正方行列を表わすものとする．したがって，証明は略すが，つぎの定理が直ちに導ける．

〔定理 5〕

任意の n 次正方行列より構成される m 次多項式形は1個の行列処理装置を用いて $(m-1)\tau_M+m\tau_A+\tau_{SM}$ 時間内に計算できる．τ_{SM} に関しては補題2を参照．

〔補題 12〕

$\left\{\prod_{i=k}^{1} A_i \text{ for } k=m,m-1,\cdots,1\right\}$ は $\{A_m, A_{m-1},\cdots,A_1\}$ より Q 個の行列処理装置を用いて $\lceil\log_2 m\rceil\lceil m/(2Q)\rceil\tau_M$ 時間内に計算できる．ただし，$\lceil(\log_2 m)/2\rceil<Q\leq\lfloor m/2\rfloor$．同一の性質が $\left\{\sum_{i=k}^{1} A_i \text{ for } k=m,m-1,\cdots,1\right\}$ の場合にも成立する．

〔証明〕

まず $\left\{\prod_{i=k}^{1} A_i \text{ for } k=m,m-1,\cdots,1\right\}$ が $\lfloor m/2\rfloor$ 個の行列処理装置を用いて $\lceil\log_2 m\rceil\tau_M$ 時間内に計算できることを示し，つぎに Q，$\lceil(\log_2 m)/2\rceil<Q\leq\lfloor m/2\rfloor$ 個の行列処理装置を用いて $\lceil\log_2 m\rceil\lceil m/(2Q)\rceil\tau_M$ 時間内に計算できることを示す．

$r=\lceil\log_2 m\rceil$ とすれば，$r=1$ の場合 $\left\{\prod_{i=k}^{1} A_i \text{ for } k=2,1\right\}=\{A_2A_1, A_1\}$ が1個の行列処理装置を用いて τ_M 時間内に計算できることは明らかである．そこで $1\leq r\leq s-1$ の場合に，上述の関係が成立するものとし，$r=s$ の場合にも成立することを示す．

帰納法の仮定より，まず

$$\left\{\prod_{i=k}^{1} A_i \text{ for } k=2^{s-1},2^{s-1}-1,\cdots,1\right\}$$

および

$$\left\{\prod_{i=k}^{2^{s-1}+1} A_i \text{ for } k=2^s,2^s-1,\cdots,2^{s-1}+1\right\}$$

を $2\cdot 2^{s-2}=2^{s-1}$ 個の行列処理装置を用いて $(s-1)\tau_M$ 時間内に計算する．つぎに

$$\left\{\prod_{i=k}^{1} A_i=\left(\prod_{i=k}^{2^{s-1}+1} A_i\right)\left(\prod_{j=2^{s-1}}^{1} A_j\right) \text{ for } k=2^s,2^s-1,\cdots,2^{s-1}+1\right\}$$

を，すなわち 2^{s-1} 個の行列の掛算を，2^{s-1} 個の行列処理装置を用いて，τ_M 時間内に計算する．したがって，

$$\left\{\prod_{i=k}^{1} A_i \text{ for } k=2^s,2^s-1,\cdots,1\right\}$$

が 2^{s-1} 個の行列処理装置を用いて $\tau_M+(s-1)\tau_M=s\tau_M$ 時間内に計算できる．

つぎに，$Q\leq 2^{s-1}$ の場合には，おのおのの計算ステップを $\lceil 2^{s-1}/Q\rceil=\lceil 2^s/(2Q)\rceil$ 個のサブステップに分割し，各サブステップがQ個の行列処理装置を用いて τ_M 時間に計算を終了できるから，

$$\left\{\prod_{i=k}^{1} A_i \text{ for } k=2^s,2^s-1,\cdots,1\right\}$$

が $s\lceil 2^s/(2Q)\rceil\tau_M=\lceil\log_2 m\rceil\lceil m/(2Q)\rceil\tau_M$ 時間内に計算できる．最後に，1個の行列処理装置を用いて

$$\left\{\prod_{i=k}^{1} A_i \quad \text{for} \quad k=2^s, 2^s-1, \cdots, 1\right\}$$

が明らかに $(2^s-1)\tau_M$ 時間内に計算できる．

したがって，$Q>1$ において $s\lceil 2^s/(2Q)\rceil\tau_M<(2^s-1)\cdot\tau_M$ となることが望ましいから $s<2Q$ が求まる．以上より補題が成り立つ． (Q. E. D.)

〔定理 6〕

任意の n 次正方行列より構成される m 次の多項式形 $p(m)$ は Q 個の行列処理装置を用いて $\lceil\log_2 m\rceil\lceil m/(2Q)\rceil\tau_M+(\lceil m/Q\rceil+\lceil\log_2 Q\rceil)\tau_A+\lceil m/Q\rceil\tau_{SM}$ 時間内に計算できる．ただし $\lceil(\log_2 m)/2\rceil<Q\leq\lfloor m/2\rfloor$.

〔証明〕

$p(m)$ を $p(m)=\alpha_m A_m A_{m-1}\cdots A_1+\cdots+\alpha_1 A_1+\alpha_0 I_n$ と表わす．**補題 12** を用いて

$$\left\{\prod_{i=k}^{1} A_i\equiv A_k', \text{ for } \quad k=m, m-1, \cdots, 1\right\}$$

を $\lceil\log_2 m\rceil\lceil m/(2Q)\rceil\tau_M$ 時間内に計算する．つぎに $\{\alpha_k A_k'\equiv A_k'', \text{ for } \quad k=m, m-1, \cdots, 1\}$ を $\lceil m/Q\rceil\tau_{SM}$ 時間内に計算し，最後に**補題 3** を用いて

$$p(m)=\sum_{k=m}^{1} A_k''+\alpha_0 I_n$$

を $(\lceil(m+1)/Q\rceil-1+\lceil\log_2 Q\rceil)\tau_A\leq(\lceil m/Q\rceil+\lceil\log_2 Q\rceil)\cdot\tau_A$ 時間内に計算する．したがって定理が導ける．

(Q. E. D.)

定理 6 は処理装置の数 Q に $Q>\lceil(\log_2 m)/2\rceil$ という制限があるが，この制限を m に無関係とすることにより，**定理 6** の一般化を行なってみる．

〔定理 7〕

任意の n 次正方行列より構成される m 次の多項式形 $p(m)$ は Q 個，$Q\geq 3$，の行列処理装置を用いて

$$(2\lceil m/Q\rceil-2+\lceil\log_2 Q\rceil)\tau_M$$
$$+(\lceil m/Q\rceil+\lceil\log_2 Q\rceil)\tau_A+2\tau_{SM}$$

時間内に計算できる．

〔証明〕

任意の $p(m)$ を $k=\lceil m/Q\rceil$ として，つぎのように書き換える．

$$p(m)=\sum_{j=1}^{Q-1}\prod_{i=j}^{Q-1} f_{Q-i}\, p_{Q-j}(k)+p_0(k) \qquad (6.1)$$

ただし，$p_0(k), p_1(k), \cdots, p_{Q-1}(k)$ は行列の k 次多項式形を示し，$f_1, f_2, \cdots, f_{Q-1}$ は $\{A_m, A_{m-1}, \cdots, A_1\}$ より構成される，k 個以内の積行列を示す．

まず，各 $p_j(k), j=0, 1, \cdots, Q-1$ に1個の行列処理装置を割り当て，**定理 5** を用いて，すべての $p_j(k)$ を $(k-1)\tau_M+k\tau_A+\tau_{SM}$ 時間内に計算する．つぎに各 $f_j, j=1, 2, \cdots, Q-1$ に1個の行列処理装置を割り当て，すべての f_j を $(k-1)\tau_M$ 時間内に計算する．この段階ですべての $p_j(k)$ および f_j の計算が終了するから (6.1) 式を n 次行列より成る $(Q-1)$ 次の多項式形として考えられる．したがって**定理 6** より，さらに

$$\lceil\log_2 Q\rceil\tau_M+\lceil\log_2 Q\rceil\tau_A+\tau_{SM}$$

時間内に計算できる．ゆえに定理が導ける．ここで $Q\geq 3$ という条件は，いま求めた上限が**定理 5** $(Q=1)$ で与えられる上限より小さくなることを望むことにより導ける． (Q. E. D.)

6. まとめ

Muraoka および Kuck[8] の図1に示されている結果の一般化を第2章に示した．これらの結果を行列処理装置が必要とする行列の基本演算の上限とし，種々のクラスの行列の式の並列計算に適用し，おのおののクラスの計算時間の上限を**定理 1** から**定理 7** に示した．これら定理の証明は，与えられる任意の行列の式を計算時間の上限を満す行列の式に変換する方法を示すことにより行なった．第4章で，詳しい議論をせず，行列のインバースの計算時間の上限として τ_I を用いたが，τ_I の上限に関してはオープンクェスチョンである．

参考文献

1) N. Abel, et al.: TRANQUIL: A Language for an Array Processing Computer, Proc. AFIP, 1969 SJCC, Vol. 34, AFIP Press, Montvale, N. J., pp. 57~73.
2) R. P. Brent: The Parallel Evaluation of General Arithmetic Expressions, (submitted for publication).
3) B. A. Galler and A. J. Perlis: Compiling Matrix Operations, CACM, Vol. 5, No. 12, Dec. 1962, pp. 590~594.
4) 丸山 清, D. J. Kuck: 割算を含まない項式の並列計算について, 情報処理, Vol. 13, No. 12, 1972, pp. 862~864 (also appears on IEEE-TC, Vol. C-22, No. 5, 1973).
5) K. Maruyama: Upper Bounds on the Time Required to Evaluate Arithmetic Expressions, IBM T. J. Watson Researcn Center Report RC 4260, 1973.
6) 丸山 清, D. J. Kuck: 項式の並列計算について, 情報処理, Vol. 14, No. 7, 1973, pp. 490~

494.

7) Y. Muraoka: Parallelism Exposure and Exploitation in Programs, Ph. D. Thesis, University of Illinois, Department of Computer Science Report No. 424, Feb. 1971.

8) Y. Muraoka, and D. J. Kuck: On The Time Required for a Sequence of Matrix Products, CACM, Vol. 16, No. 1, Jan. 1973, pp. 22～26.

9) Y. Strassen: Gaussian Elimination is not Optimal, Numer. Math. Vol. 13, 1969, pp. 354～356.

10) R. Wagner: Some Techniques for Algorithm Optimization with Application to Matrix Arithmetic Expression, Ph. D. Thesis, Department of Computer Science, Carnegie-Mellon University, June 1969.

11) S. Winograd: A New Algorithm for Inner Product, IEEE-TC, Vol. C-17, No. 7, July 1968, pp. 693～694.

(昭和 48 年 9 月 25 日受付)