

## プログラムのページ

担当 鈴木 誠 道

## 7405 高速 sine 変換, cosine 変換

鳥居達生・入沢 実 (大阪大学工学部応用物理学科)

高速フーリエ変換 (FFT) において, 入力データが実数で, かつ対称 (歪対称) ならば, これらの性質を利用して, FFT に比べ, 演算回数を  $1/4$  に減らせる<sup>1)</sup>.

標本数  $N$  を 2 のべき乗として, 文献 1) の算法をプログラムしたので, ここに報告する.

入力データ  $X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$  の, 離散型複素フーリエ係数は, 次式で定義される.

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} X_j \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} jk\right), \quad 0 \leq k < N.$$

実数データ  $X_j$  の対称性あるいは歪対称性は, フーリエ変換によって変わらない. すなわち, つぎの関係が成立する.

$X_{N-j} = X_j, j > 0$  ならば, 各  $C_k$  は実数で,  $C_{N-k} = C_k, k > 0$ .

$X_0 = 0, X_{N-j} = -X_j$  ならば, 各  $C_k$  は虚数で,  $C_0 = 0, C_{N-k} = -C_k, k > 0$ .

いま,  $X_j = X((2\pi/N)j)$  と考え,  $X(t)$  の cosine フーリエ係数を  $A_k$  として,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(X(t) + X(-t)) \\ = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{(1/2)N-1} A_k \cos \frac{2\pi}{N} kt + \frac{1}{2}A_N \cos \pi t \end{aligned}$$

と表わせば,  $A_k = 2C_k$ .

$X(t)$  の sine フーリエ係数を  $B_k$  として,

$$\frac{1}{2}(X(t) - X(-t)) = \sum_{k=1}^{(1/2)N-1} B_k \sin \frac{2\pi}{N} kt$$

とすれば,  $B_k = -2\text{Im } C_k$ .

すなわち, 偶関数  $(X(t) + X(-t))/2$ , 奇関数  $1/2(X(t) - X(-t))$  の複素フーリエ変換は,  $\pm 2$  倍することを無視すれば,  $X(t)$  の cosine 変換, sine 変換である.

## プログラムの使用法

高速 cosine 変換, CALL CFFT ( $N, C, X, Y$ )

$N$ : 標本数, 2 のべき乗.

$C$ :  $\cos(2\pi/N)j, j=1, 2, \dots, N/4$  が格納されていること.

$X$ :  $X_0, X_1, \dots, X_{N/2}$  の順序に入力され,  $C_0, C_1, \dots, C_{N/2}$  の順序に出力される.  $1/N$  倍することとは省略.

$Y$ : 中間結果のための配列.  $(N/2)+1$  語.

高速 sine 変換, CALL SFFT ( $N, C, X, Y$ )

$N$  および  $C$  は, 上と同じ定義.

$X$ :  $X_1, X_2, \dots, X_{(N/2)-1}$  が入力され,  $C_1, C_2, \dots, C_{(N/2)-1}$  が出力される.  $1/N$  倍することは省略.

$Y$ : 中間結果のための配列.  $(N/2)-1$  語.

上で使用する三角関数表の作成, CALL COSINE ( $N, C$ )

$N$  および  $C$  は, CFFT のものと同じ.

若干の例について, 計算時間を示す.

表 1 計算時間 (NEAC-2200 Model 700)

| $N$  | cosine 変換 | sine 変換   |
|------|-----------|-----------|
| 256  | 37 (msec) | 34 (msec) |
| 512  | 82        | 74        |
| 1024 | 179       | 162       |
| 2048 | 389       | 356       |

## 参考文献

- 1) 鳥居達生: 入力データの対称性を用いた高速フーリエ変換法, 情報処理, 15, pp. 516~523 (1974).

## 〈付録〉

計算例を示す. 離散型フーリエ係数が, 本来のフー

表 2 計算結果

| $N$ | cosine変換           | sine変換             | $2^{-N}$           |
|-----|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0   | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 1   | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 2   | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 3   | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 4   | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 5   | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 6   | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 7   | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 8   | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 9   | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 10  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 11  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 12  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 13  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 14  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 15  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 16  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 17  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 18  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 19  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 20  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 21  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 22  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 23  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 24  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 25  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 26  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 27  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 28  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 29  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 30  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 31  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |
| 32  | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 | 1.0000000000000000 |

リエ係数に速く収束し、かつ正解がわかっている問題として、第1種、第2種チェビシェフ多項式の母関数を取り上げた。すなわち、

$$\frac{1-t^2}{1-2t\cos\theta+t^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n\theta,$$

$$\frac{\sin\theta}{1-2t\cos\theta+t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sin n\theta.$$

$t=1/2$ ,  $N=64$  としたときの、計算結果を示す。

(昭和49年1月21日受付)

```

0001 C SUBROUTINE CFFT(N,C,X,Y)
0002 C FAST FOURIER COSINE TRANSFORM
0003 C N NUMBER OF SYMMETRIC DATA
0004 C C(1/4) TABLE OF COSINE FUNCTION
0005 C X(N/2+1) INPUT AND OUTPUT DATA
0006 C Y(N/2+1) WORKING MEMORY
0007 C DIMENSION C(1),X(1),Y(1)
0008 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0009 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0010 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0011 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0012 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0013 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0014 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0015 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0016 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0017 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0018 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0019 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0020 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0021 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0022 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0023 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0024 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0025 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0026 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0027 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0028 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0029 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0030 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0031 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0032 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0033 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0034 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0035 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0036 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0037 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0038 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0039 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0040 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0041 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0042 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0043 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0044 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0045 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0046 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0047 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0048 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0049 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0050 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0051 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0052 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0053 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0054 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0055 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0056 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0057 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0058 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0059 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0060 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0061 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0062 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0063 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0064 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0065 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0066 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0067 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0068 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0069 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0070 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0071 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0072 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0073 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0074 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0075 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0076 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0077 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0078 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0079 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0080 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0081 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0082 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0083 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0084 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0085 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0086 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0087 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0088 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0089 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0090 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0091 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0092 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0093 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0094 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0095 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0096 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0097 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0098 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0099 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0100 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0101 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0102 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0103 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0104 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4

```

```

0001 C SUBROUTINE CFFT(N,C,X,Y)
0002 C FAST FOURIER SINE TRANSFORM
0003 C N NUMBER OF SINE-SYMMETRIC DATA
0004 C C(1/4) TABLE OF COSINE FUNCTION
0005 C X(N/2+1) INPUT AND OUTPUT DATA
0006 C Y(N/2+1) WORKING MEMORY
0007 C DIMENSION C(1),X(1),Y(1)
0008 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0009 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0010 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0011 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0012 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0013 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0014 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0015 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0016 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0017 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0018 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0019 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0020 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0021 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0022 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0023 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0024 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0025 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0026 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0027 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0028 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0029 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0030 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0031 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0032 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0033 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0034 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0035 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0036 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0037 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0038 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0039 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0040 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0041 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0042 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0043 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0044 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0045 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0046 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0047 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0048 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0049 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0050 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0051 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0052 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0053 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0054 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0055 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0056 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0057 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0058 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0059 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0060 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0061 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0062 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0063 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0064 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0065 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0066 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0067 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0068 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0069 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0070 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0071 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0072 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0073 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0074 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0075 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0076 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0077 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0078 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0079 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0080 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0081 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0082 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0083 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0084 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0085 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0086 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0087 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0088 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0089 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0090 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0091 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0092 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0093 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0094 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0095 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0096 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0097 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0098 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0099 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0100 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0101 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0102 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0103 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4
0104 C IF (N/4) 1, 2, 3, 4

```