資　　料

入力データの対称性を用いた高速フーリエ変換法*

鳥　居　達　生**

Abstract

In the discrete Fourier transform for the complex data, the operation number is greatly reduced by the Cooley-Tukey Algorithm.

In this paper the operation number can be halved not only for real data, but for Hermite symmetrical or skew symmetrical complex data.

For example, if the number of samples N is power of 2, the number of complex multiplication is reduced to $N\log_2 N/8$ for the real valued even or odd function.

1. はじめに

フーリエ変換の1つの近似が，離散型フーリエ変換である．現在，離散型フーリエ変換の計算法として，高速フーリエ変換法 (FFT) がさかんに使われている．FFT の算法によれば，複素数値標本数 N が $r_1r_2\cdots r_n$ と因数分解できるとき，(複素数) 乗算回数を，多くとも $N(r_1+r_2+\cdots+r_n)$ とできる[1]．ここでは，三角関数の周期性が本質的役割を果たしているが，三角関数の対称性を用いれば，演算回数を約 1/4 に減らすことができる．さらに，入力データが実数ならば，半分に減らせる．実際，$N=2^r$ のとき．このことはよく知られ，現在利用されている[2~5]．入力データが実数で対称性をもつならば，FFT にちなみ，高速 sine 変換，cosine 変換とも呼ぶべき算法が得られて，演算回数をさらに半分にできることを示す．

2. 入力データの性質と FFT テーブル

N 次方程式 $z^N-1=0$ の根を，$W(j)=\exp((2\pi i/N)j)$ とするとき，標本数Nの離散型フーリエ変換は，

$$C_k=\frac{1}{N}\sum_{0\le j<N}X_j\overline{W}(jk),\quad 0\le k<N \tag{1}$$

によって定義される．定数 $1/N$ は，しばしば省略される．この逆変換は，

$$X_j=\sum_{0\le k<N}C_k W(jk) \tag{2}$$

となる．

いま，$N=r_1r_2\cdots r_n$ と分解されたとしよう．ここで，

$$N_0=1,\ N_{l+1}=r_{l+1}N_l,\ l=0,1,\cdots,n-1,$$
$$\tilde{N}_n=1,\ \tilde{N}_l=N/N_l$$

によって $N_l, \tilde{N}_l$ を定め，標本数 r_l のフーリエ変換を行ない，回転因子 $W(\cdot)$ をかけることを n 回繰り返す．便宜上，$C_k=C(k)$ $(X_j=X(j))$ と書けば，

$$X^n(0,k)=C(k),\quad 0\le k<N,$$
$$X^{l-1}(j+t\tilde{N}_l,k)$$
$$=W(kt\tilde{N}_l)\sum_{0\le s\le r_l}X^l(j,k+sN_{l-1})W\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$
$$0\le t<r_l,\ 0\le j<\tilde{N}_l,\ 0\le k<N_{l-1},$$
$$l=n,n-1,\cdots,1.$$

こうして作った $\{X^l(j,k)\}$ を，FFT テーブルとよぶ．これは，次の意味をもつ．

$$\left.\begin{array}{l}X^l(j,k)=\displaystyle\sum_{0\le p<\tilde{N}_l}C(k+pN_l)W(j(k+pN_l)),\\ 0\le k<N_l,\ 0\le j<\tilde{N}_l.\end{array}\right\} \tag{3}$$

帰納法で証明する．$l=n$ で成立，l 段階で成立するとすれば，$X^{l-1}(j+t\tilde{N}_l,k)$ の定義より，

$$X^{l-1}(j+t\tilde{N}_l,k)$$
$$=W(k(j+t\tilde{N}_l))\sum_{s<r_l}\sum_{p<\tilde{N}_l}C(k+sN_{l-1}+pN_l)$$

---

* On the Algorithm of Fast Fourier Transform Using the Symmetry of Input Data, by Tatsuo TORII (Faculty of Engineering, Osaka University)

** 大阪大学工学部応用物理学科

$$\times W((js+jpr_l+st\tilde{N}_l)N_{l-1}).$$

ところで，三角関数の周期性から，

$$W((s+pr_l)(j+t\tilde{N}_l)N_{l-1})$$
$$=W((js+jpr_l+st\tilde{N}_l)N_{l-1})$$

であるから，

$$X^{l-1}(j+t\tilde{N}_l,k)$$
$$=W(k(j+t\tilde{N}_l))\sum_p\sum_s C(k+(s+pr_l)N_{l-1})$$
$$\times W((s+pr_l)(j+t\tilde{N}_l)N_{l-1})$$
$$=W(k(j+t\tilde{N}_l))\sum_{p<\tilde{N}_{l-1}} C(k+pN_{l-1})$$
$$\times W((j+t\tilde{N}_l)pN_{l-1}).$$

すなわち，$l-1$ 段階で成立した（証明終り）.

上式において，$l=0$ とおけば，明らかに

$$X(j)=X^0(j,0),\quad 0\le j<N. \tag{4}$$

これで，離散型フーリエ逆変換(2)が得られたことになる．FFT テーブルを作る漸化式は，Cooley-Tukey の算法[1,6]にほかならないが，$X^l(\cdot,\cdot)$ と行列表示したことにより，Cooley-Tukey の表現はいちじるしく簡略化され，FFT テーブルの意味が明確になった[2,3,7].

Cooley-Tukey の算法において，$X^{l-1}(\cdot,\cdot)$ を与えて $X^l(\cdot,\cdot)$ を求めると，

$$X^l(j,k+sN_{l-1})$$
$$=\sum_{0\le t<r_l} X^{l-1}(j+t\tilde{N}_l,k)\overline{W}(kt\tilde{N}_l)\overline{W}\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$
$$0\le s<r_l,\ 0\le j<\tilde{N}_l,\ 0\le k<N_{l-1},\ l=1,2,\cdots,n.$$

ただし，定数 $1/r_l$ をかけることを省略した．これは，Sande-Tukey の算法とよばれる[2]．$X^l(j,k)$ を，関数値 X_j を用いて表わすと，

$$X^l(j,k)=\sum_{0\le q<N_l} X(j+q\tilde{N}_l)\overline{W}(kq\tilde{N}_l). \tag{5}$$

(1)と(3)から上式を導くことはできるが，証明は略す．

いずれの漸化式も，添字 k,j,s,t,l の動く範囲を考えると，必要な複素数乗算回数の限界は，$N(r_1+r_2+\cdots+r_n)$ である．

以上準備して，入力データ $\{X_j\}$ の性質が，FFT テーブルにどのような形で保存されているかをみよう．3つの基本的性質を考える．

i）実数性；入力データが実数であること．

ii）Hermite 対称；X_0 は実数で，

$$X_{N-j}=\overline{X}_j,\quad j>0.$$

iii）Hermite 歪対称；X_0 は虚数で，

$$X_{N-j}=-\overline{X}_j,\quad j>0.$$

その外，これらの組み合わせも考えられる．

入力データが実数ならば，FFT テーブルにおいて，次の関係が成立する．

$$\left.\begin{array}{l} X^l(j,0)\text{；実数,}\\ X^l(j,N_l-k)=\overline{X}_l(j,k),\\ 0\le j<\tilde{N}_l,\quad 0<k<N_l. \end{array}\right\} \tag{6}$$

(5)より容易に導くことができる．

入力データが Hermite 対称ならば，

$$\left.\begin{array}{l} X^l(0,k)\text{；実数,}\\ X^l(\tilde{N}_l-j,k)=\overline{X}^l(j,k)W(k\tilde{N}_l),\\ 0<j<\tilde{N}_l,\quad 0\le k<N_l. \end{array}\right\} \tag{7}$$

(5)を用いて証明する．$j=0$ ならば，N_l を奇数として，

$$X^l(0,q)=X(0)+\sum_{0<2q<N_l}\{X(q\tilde{N}_l)\overline{W}(kq\tilde{N}_l)$$
$$+X((N_l-q)\tilde{N}_l)$$
$$\times\overline{W}(k(N_l-q)\tilde{N}_l)\}$$
$$=X(0)+\sum_{0<2q<N_l}2R_l\{X(q\tilde{N}_l)$$
$$\times\overline{W}(kq\tilde{N}_l)\}.$$

N_l が偶数ならば，$(-1)^k X(N/2)$ が末項に追加される．

$j\neq 0$ ならば，

$$X^l(\tilde{N}_l-j,k)$$
$$=\sum_{0\le q<N_l} X(\tilde{N}_l-j+q\tilde{N}_l)\overline{W}(kq\tilde{N}_l).$$

ここで，q を N_l-q-1 で置き換えると，

$$X^l(\tilde{N}_l-j,k)$$
$$=\sum_{0\le q<N_l} X(N-(j+q\tilde{N}_l))W(k\tilde{N}_l)W(kq\tilde{N}_l)$$
$$=\overline{X}^l(j,k)W(k\tilde{N}_l)\ \text{（証明終り）}.$$

入力データが Hermite 歪対称ならば，

$$\left.\begin{array}{l} X^l(0,k)\text{；虚数,}\\ X^l(\tilde{N}_l-j,k)=-\overline{X}^l(j,k)W(k\tilde{N}_l),\\ 0<j<\tilde{N}_l,\quad 0\le k<N_l. \end{array}\right\} \tag{8}$$

証明は，(7)の場合と同様にできるので略す．

3. 対称性を用いた FFT の算法

高速フーリエ変換の算法から，FFT テーブルの対称性を用いた算法を，以下順次導く．N の因数 r_l は，2あるいは1より大なる奇数と考えて，一般性を失わない．また，各 r_l は，小さい方から $r_1\le r_2\le\cdots\le r_n$ と番号をうつことにする．

N が奇数ならば，毎回，r_l が奇数の場合の算法を用いることはいうまでもない．

N が偶数ならば，適当な $m\le n$ をとり，$N=2^m\tilde{N}_m$（$\tilde{N}_m$ は奇数）と表わされるので，r_l が2の場合の算法を m 回，r_l が奇数の場合の算法を $n-m$ 回用いなければならない．したがって，回数 r_l が2の場合

と，奇数の場合に分けて述べる．初期値は，以後いずれの場合も，$X^0(j,0)=X_j$ で与える．

3.1 因数 r_l が2の場合の FFT

a）入力データが複素数の場合

$$X^l(j,k)=X^{l-1}(j,k)+X^{l-1}(j+\tilde{N}_l,k)\overline{W}(k\tilde{N}_l),$$
$$X^l(j,k+N_{l-1})$$
$$=X^{l-1}(j,k)-X^{l-1}(j+\tilde{N}_l,k)\overline{W}(k\tilde{N}_l),$$
$$0\le j<\tilde{N}_l,\quad 0\le k<N_{l-1}.$$

N が，因数2を m 個もつならば，添字 l の動く範囲は1から m までである．以下同じ．

b）実数の場合

$$X^l(j,0)=X^{l-1}(j,0)+X^{l-1}(j+\tilde{N}_l,0),$$
$$X^l(j,N_{l-1})=X^{l-1}(j,0)-X^{l-1}(j+\tilde{N}_l,0),$$
$$X^l(j,k)=X^{l-1}(j,k)+X^{l-1}(j+\tilde{N}_l,k)\overline{W}(k\tilde{N}_l),$$
$$X^l(j,N_{l-1}-k)$$
$$=\overline{X}^{l-1}(j,k)-\overline{X}^{l-1}(j+\tilde{N}_l,k)W(k\tilde{N}_l),$$
$$X^l\left(j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)=X^{l-1}\left(j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)$$
$$+X^{l-1}\left(j+\tilde{N}_l,\frac{N_{l-1}}{2}\right)\overline{W}\left(\frac{N}{4}\right),$$
$$0\le j<\tilde{N}_l,\quad 0<2k<N_{l-1}.$$

c）Hermite 対称の場合

$$X^l(0,k)=X^{l-1}(0,k)$$
$$+\left(X^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_{l-1}}{2},k\right)\overline{W}\left(\frac{k\tilde{N}_{l-1}}{2}\right)\right),$$
$$X^l(0,k+N_{l-1})$$
$$=X^{l-1}(0,k)-\left(X^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_{l-1}}{2},k\right)\overline{W}\left(\frac{k\tilde{N}_{l-1}}{2}\right)\right),$$
$$X^l(j,k)=X^{l-1}(j,k)+\overline{X}^{l-1}(\tilde{N}_l-j,k)W(k\tilde{N}_l),$$
$$X^l(j,k+N_{l-1})$$
$$=X^{l-1}(j,k)-\overline{X}^{l-1}(\tilde{N}_l-j,k)W(k\tilde{N}_l),$$
$$X^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2},k\right)\overline{W}\left(\frac{k\tilde{N}_l}{2}\right)$$
$$=2\,\mathrm{Re}\left\{X^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_l}{2},k\right)\overline{W}\left(\frac{k\tilde{N}_l}{2}\right)\right\},$$
$$X^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2},k+N_{l-1}\right)\overline{W}\left(\frac{(k+N_{l-1})}{2}\tilde{N}_l\right)$$
$$=2\,\mathrm{Im}\left\{X^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_l}{2},k\right)\overline{W}\left(\frac{k\tilde{N}_l}{2}\right)\right\}i\overline{W}\left(\frac{N}{4}\right),$$
$$0<2j<\tilde{N}_l,\quad 0\le k<N_{l-1}.$$

d）Hermite 歪対称の場合

$$X^l(0,k)=X^{l-1}(0,k)-\left(\overline{X}^{l-1}(\tilde{N}_l,k)W\left(\frac{k\tilde{N}_{l-1}}{2}\right)\right),$$
$$X^l(0,k+N_{l-1})$$
$$=X^{l-1}(0,k)+\left(\overline{X}^{l-1}(\tilde{N}_l,k)W\left(\frac{k\tilde{N}_{l-1}}{2}\right)\right),$$
$$X^l(j,k)=X^{l-1}(j,k)-\overline{X}^{l-1}(\tilde{N}_l-j,k)W(k\tilde{N}_l),$$
$$X^l(j,k+N_{l-1})$$
$$=X^{l-1}(j,k)+\overline{X}^{l-1}(\tilde{N}_l-j,k)W(k\tilde{N}_l),$$
$$\overline{X}^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2},k\right)W\left(\frac{k\tilde{N}_l}{2}\right)$$
$$=2i\,\mathrm{Im}\left\{\overline{X}^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_l}{2},k\right)W\left(\frac{k\tilde{N}_l}{2}\right)\right\},$$
$$\overline{X}^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2},k+N_{l-1}\right)W\left(\frac{(k+N_{l-1})}{2}\tilde{N}_l\right)$$
$$=2\,\mathrm{Re}\left\{\overline{X}^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_l}{2},k\right)W\left(\frac{k\tilde{N}_l}{2}\right)\right\}W\left(\frac{N}{4}\right),$$
$$0<2j<\tilde{N}_l,\quad 0\le k<N_{l-1}.$$

e）実数かつ Hermite 対称の場合（高速 cosine 変換）

$$X^l(0,0)=X^{l-1}(0,0)+X^{l-1}(\tilde{N}_l,0),$$
$$X^l(0,N_{l-1})=X^{l-1}(0,0)-X^{l-1}(\tilde{N}_l,0),$$
$$X^l(0,k)=X^{l-1}(0,k)$$
$$+\left(X^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_{l-1}}{2},k\right)\overline{W}\left(\frac{k\tilde{N}_{l-1}}{2}\right)\right),$$
$$X^l(0,N_{l-1}-k)$$
$$=X^{l-1}(0,k)-\left(X^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_{l-1}}{2},k\right)\overline{W}\left(\frac{k\tilde{N}_{l-1}}{2}\right)\right),$$
$$X^l\left(0,\frac{N_{l-1}}{2}\right)=X^{l-1}\left(0,\frac{N_{l-1}}{2}\right),$$
$$X^l(j,0)=X^{l-1}(j,0)+X^{l-1}(\tilde{N}_l-j,0),$$
$$X^l(j,N_{l-1})=X^{l-1}(j,0)-X^{l-1}(\tilde{N}_l-j,0),$$
$$X^l(j,k)=X^{l-1}(j,k)+\overline{X}^{l-1}(\tilde{N}_l-j,k)W(k\tilde{N}_l),$$
$$X^l(j,N_{l-1}-k)$$
$$=\overline{X}^{l-1}(j,k)-X^{l-1}(\tilde{N}_l-j,k)\overline{W}(k\tilde{N}_l),$$
$$X^l\left(j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)=X^{l-1}\left(j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)$$
$$+X^{l-1}\left(\tilde{N}_l-j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)W\left(\frac{N}{4}\right),$$
$$X^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2},0\right)=2X^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_l}{2},0\right),$$
$$X^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2},N_{l-1}\right)=0,$$
$$X^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2},k\right)\overline{W}\left(\frac{k\tilde{N}_l}{2}\right)$$
$$=2\,\mathrm{Re}\left\{X^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_l}{2},k\right)\overline{W}\left(\frac{k\tilde{N}_l}{2}\right)\right\},$$
$$X^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2},N_{l-1}-k\right)\overline{W}\left(\frac{(N_{l-1}-k)}{2}\tilde{N}_l\right)$$

$$=-2\,\mathrm{Im}\left\{X^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_l}{2}, k\right)\overline{W}\left(\frac{k\tilde{N}_l}{2}\right)\right\}i\overline{W}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$X^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2}, \frac{N_{l-1}}{2}\right)\overline{W}\left(\frac{N}{8}\right)$$
$$=2\,\mathrm{Re}\left\{X^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_l}{2}, \frac{N_{l-1}}{2}\right)\overline{W}\left(\frac{N}{8}\right)\right\},$$

$$0<2j<\tilde{N}_l,\quad 0<2k<N_{l-1}.$$

f) 実数かつ Hermite 歪対称の場合（高速sine変換）

$$X^l(0,0)=X^l(0,N_{l-1})=0,$$

$$X^l(0,k)=X^{l-1}(0,k)$$
$$+\left(X^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_{l-1}}{2}, k\right)\overline{W}\left(\frac{k\tilde{N}_{l-1}}{2}\right)\right),$$

$$X^l(0,N_{l-1}-k)$$
$$=\overline{X}^{l-1}(0,k)-\left(\overline{X}^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_{l-1}}{2}, k\right)W\left(\frac{k\tilde{N}_{l-1}}{2}\right)\right),$$

$$X^l\left(0, \frac{N_{l-1}}{2}\right)=X^{l-1}\left(\tilde{N}_l, \frac{N_{l-1}}{2}\right)\overline{W}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$X^l(j,0)=X^{l-1}(j,0)-X^{l-1}(\tilde{N}_l-j,0),$$

$$X^l(j,N_{l-1})=X^{l-1}(j,0)+X^{l-1}(\tilde{N}_l-j,0),$$

$$X^l(j,k)=X^{l-1}(j,k)-\overline{X}^{l-1}(\tilde{N}_l-j,k)W(k\tilde{N}_l),$$

$$X^l(j,N_{l-1}-k)$$
$$=\overline{X}^{l-1}(j,k)+X^{l-1}(\tilde{N}_l-j,k)\overline{W}(k\tilde{N}_l),$$

$$X^l\left(j, \frac{N_{l-1}}{2}\right)=X^{l-1}\left(j, \frac{N_{l-1}}{2}\right)$$
$$-X^{l-1}\left(\tilde{N}_l-j, \frac{N_{l-1}}{2}\right)W\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$X^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2}, 0\right)=0,$$

$$X^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2}, N_{l-1}\right)=2X^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_l}{2}, 0\right),$$

$$\overline{X}^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2}, k\right)W\left(\frac{k\tilde{N}_l}{2}\right)$$
$$=2i\,\mathrm{Im}\left\{\overline{X}^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_l}{2}, k\right)W\left(\frac{k\tilde{N}_l}{2}\right)\right\},$$

$$\overline{X}^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2}, N_{l-1}-k\right)W\left(\frac{(N_{l-1}-k)}{2}\tilde{N}_l\right)$$
$$=2\,\mathrm{Re}\left\{X^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_l}{2}, k\right)\overline{W}\left(\frac{k\tilde{N}_l}{2}\right)\right\}W\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$X^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2}, \frac{N_{l-1}}{2}\right)W\left(\frac{N}{8}\right)$$
$$=2i\,\mathrm{Im}\left\{\overline{X}^{l-1}\left(\frac{\tilde{N}_l}{2}, \frac{N_{l-1}}{2}\right)W\left(\frac{N}{8}\right)\right\},$$

$$0<2j<\tilde{N}_l,\quad 0<2k<N_{l-1}.$$

以上の諸式の中で，$l=1$ のとき $N_{l-1}=N_0=1$ だから，$N_{l-1}/2$ を含む式は用いない．$l=m$ のとき，$\tilde{N}_m$ が奇数となるので，$\tilde{N}_l/2$ を含む式は用いない．以下同様．

3.2 因数 r_l が奇数の場合の FFT

FFT において用いられる三角関数 $W(Nst/r_l)$ は，r_l が2の場合，1あるいは -1 の値しかとらないので，三角関数の対称性を意識する必要はなかったが，r_l が奇数の場合，意識的にこれを利用して，複素乗算回数を約 1/4 減らせる．

以下，添字の動く範囲は，$m+1$ から n までである．また，記法の便宜上，$W(k)=C(k)+iS(k)$, $\bar{t}=r_l-t$, $\bar{s}=r_l-s$ とおく．

a′) 入力データが複素数の場合

$$Z(j,k)=X^{l-1}(j,k),$$

$$Z(t\tilde{N}_l+j,k)=X^{l-1}(j+t\tilde{N}_l,k)\overline{W}(kt\tilde{N}_l)$$
$$+X^{l-1}(j+\bar{t}\tilde{N}_l,k)\overline{W}(k\bar{t}\tilde{N}_l),$$

$$Z(t\tilde{N}_l-j,k)=X^{l-1}(j+t\tilde{N}_l,k)\overline{W}(kt\tilde{N}_l)$$
$$-X^{l-1}(j+\bar{t}\tilde{N}_l,k)\overline{W}(k\bar{t}\tilde{N}_l),$$

$$X^l(j,k)=Z(j,k)+\sum_t Z(j+t\tilde{N}_l,k),$$

$$C=Z(j,k)+\sum_t Z(j+t\tilde{N}_l,k)C\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$

$$S=\sum_t Z(j+\bar{t}\tilde{N}_l,k)S\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$

$$X^l(j,k+sN_{l-1})=C-iS,$$

$$X^l(j,k+\bar{s}N_{l-1})=C+iS,$$

$$0<2t<r_l,\quad 0<2s<r_l,\quad 0\leq j<\tilde{N}_l,\quad 0\leq k<N_{l-1}.$$

ここで，添字 s, t の動く範囲が，Sande-Tukey の算法に比べ半分になっていることを注意しておく．

b′) 実数の場合

$$Z(j,0)=X^{l-1}(j,0),$$

$$Z(j+t\tilde{N}_l,0)=X^{l-1}(j+t\tilde{N}_l,0)$$
$$+X^{l-1}(j+\bar{t}\tilde{N}_l,0),$$

$$Z(j+\bar{t}\tilde{N}_l,0)=X^{l-1}(j+t\tilde{N}_l,0)$$
$$-X^{l-1}(j+\bar{t}\tilde{N}_l,0),$$

$$Z(j,k)=X^{l-1}(j,k),$$

$$Z(j+t\tilde{N}_l,k)=X^{l-1}(j+t\tilde{N}_l,k)\overline{W}(kt\tilde{N}_l)$$
$$+X^{l-1}(j+\bar{t}\tilde{N}_l,k)\overline{W}(k\bar{t}\tilde{N}_l),$$

$$Z(j+\bar{t}\tilde{N}_l,k)=X^{l-1}(j+t\tilde{N}_l,k)\overline{W}(kt\tilde{N}_l)$$
$$-X^{l-1}(j+\bar{t}\tilde{N}_l,k)\overline{W}(k\bar{t}\tilde{N}_l),$$

$$Z\left(j, \frac{N_{l-1}}{2}\right)=X^{l-1}\left(j, \frac{N_{l-1}}{2}\right),$$

$$Z\left(j+t\tilde{N}_l, \frac{N_{l-1}}{2}\right)=X^{l-1}\left(j+t\tilde{N}_l, \frac{N_{l-1}}{2}\right)$$
$$-X^{l-1}\left(j+\bar{t}\tilde{N}_l, \frac{N_{l-1}}{2}\right),$$

$$Z\left(j+\tilde{t}\tilde{N}_l, \frac{N_{l-1}}{2}\right)=X^{l-1}\left(j+t\tilde{N}_l, \frac{N_{l-1}}{2}\right)$$
$$+X^{l-1}\left(j+\tilde{t}\tilde{N}_l, \frac{N_{l-1}}{2}\right),$$
$$X^l(j, 0)=Z(j, 0)+\sum_t Z(j+t\tilde{N}_l, 0),$$
$$X^l(j, k)=Z(j, k)+\sum_t Z(j+t\tilde{N}_l, k),$$
$$X^l\left(j, \frac{N_l}{2}\right)=Z\left(j, \frac{N_{l-1}}{2}\right)$$
$$+\sum_t(-1)^t Z\left(j+t\tilde{N}_l, \frac{N_{l-1}}{2}\right),$$
$$C_1=Z(j, k)+\sum_t Z(j+t\tilde{N}_l, k)C\left(\frac{Nst}{r_l}\right).$$
$$S_1=\sum_t Z(j+\tilde{t}\tilde{N}_l, k)S\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$
$$X^l(j, sN_{l-1}+k)=C_1-iS_1,$$
$$X^l(j, sN_{l-1}-k)=\bar{C}_1-i\bar{S}_1,$$
$$C_2=Z\left(j, \frac{N_{l-1}}{2}\right)$$
$$+\sum_t Z\left(j+t\tilde{N}_l, \frac{N_{l-1}}{2}\right)C\left(\frac{Nt(2s-1)}{2r_l}\right),$$
$$S_2=\sum_t Z\left(j+\tilde{t}\tilde{N}_l, \frac{N_{l-1}}{2}\right)S\left(\frac{Nt(2s-1)}{2r_l}\right),$$
$$X^l\left(j, \frac{2s-1}{2}N_{l-1}\right)=C_2-iS_2,$$
$$0<2s<r_l,\ 0<2t<r_l,\ 0\le j<\tilde{N}_l, 0<2k<N_{l-1}.$$

c′) Hermite 対称の場合

$$Z(0, k)=X^{l-1}(0, k),$$
$$Z(t\tilde{N}_l, k)=X^{l-1}(t\tilde{N}_l, k)\overline{W}(kt\tilde{N}_l),$$
$$Z(j, k)=X^{l-1}(j, k),$$
$$Z(t\tilde{N}_l+j, k)=X^{l-1}(t\tilde{N}_l+j, k)\overline{W}(kt\tilde{N}_l)$$
$$+\bar{X}^{l-1}(t\tilde{N}_l-j, k)W(kt\tilde{N}_l),$$
$$Z(t\tilde{N}_l-j, k)=X^{l-1}(t\tilde{N}_l+j, k)\overline{W}(kt\tilde{N}_l)$$
$$-\bar{X}^{l-1}(t\tilde{N}_l-j, k)W(kt\tilde{N}_l),$$
$$X^l(0, k)=Z(0, k)+2\sum_t \mathrm{Re}\, Z(t\tilde{N}_l, k),$$
$$X^l(j, k)=Z(j, k)+\sum_t Z(t\tilde{N}_l+j, k),$$
$$C_0=Z(0, k)+2\sum_t \mathrm{Re}\, Z(t\tilde{N}_l, k)C\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$
$$S_0=2\sum_t \mathrm{Im}\, Z(t\tilde{N}_l, k)S\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$
$$X^l(0, k+sN_{l-1})=C_0+S_0,$$
$$X^l(0, k+\tilde{s}N_{l-1})=C_0-S_0,$$
$$C_1=Z(j, k)+\sum_t Z(t\tilde{N}_l+j, k)C\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$
$$S_1=\sum_t Z(t\tilde{N}_l-j, k)S\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$
$$X^l(j, k+sN_{l-1})=C_1-iS_1,$$
$$X^l(j, k+\tilde{s}N_{l-1})=C_1+iS_1,$$
$$0<2s<r_l,\ 0<2t<r_l,\ 0<2j<\tilde{N}_l, 0\le k<N_{l-1}.$$

d′) Hermite 歪対称の場合

$$Z(0, k)=X^{l-1}(0, k),$$
$$Z(t\tilde{N}_l, k)=X^{l-1}(t\tilde{N}_l, k)\overline{W}(kt\tilde{N}_l),$$
$$Z(j, k)=X^{l-1}(j, k),$$
$$Z(t\tilde{N}_l+j, k)=X^{l-1}(t\tilde{N}_l+j, k)\overline{W}(kt\tilde{N}_l)$$
$$-\bar{X}^{l-1}(t\tilde{N}_l-j, k)W(kt\tilde{N}_l),$$
$$Z(t\tilde{N}_l-j, k)=X^{l-1}(t\tilde{N}_l+j, k)\overline{W}(kt\tilde{N}_l)$$
$$+\bar{X}^{l-1}(t\tilde{N}_l-j, k)W(kt\tilde{N}_l),$$
$$X^l(0, k)=Z(0, k)+2i\sum_t \mathrm{Im}\, Z(t\tilde{N}_l, k),$$
$$X^l(j, k)=Z(j, k)+\sum_t Z(t\tilde{N}_l+j, k),$$
$$C_0=Z(0, k)+2i\sum_t \mathrm{Im}\, Z(t\tilde{N}_l, k)C\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$
$$S_0=2\sum_t \mathrm{Re}\, Z(t\tilde{N}_l, k)S\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$
$$X^l(0, k+sN_{l-1})=C_0-iS_0,$$
$$X^l(0, k+\tilde{s}N_{l-1})=C_0+iS_0,$$
$$C_1=Z(j, k)+\sum_t Z(t\tilde{N}_l+j, k)C\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$
$$S_1=\sum_t Z(t\tilde{N}_l-j, k)S\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$
$$X^l(j, k+sN_{l-1})=C_1-iS_1,$$
$$X^l(j, k+\tilde{s}N_{l-1})=C_1+iS_1,$$
$$0<2s<r_l,\ 0<2t<r_l,\ 0<2j<\tilde{N}_l, 0\le k<N_{l-1}.$$

e′) 実数かつ Hermite 対称の場合（高速 cosine 変換）

$$Z(0, 0)=X^{l-1}(0, 0),$$
$$Z(t\tilde{N}_l, 0)=2X^{l-1}(t\tilde{N}_l, 0),$$
$$Z(0, k)=X^{l-1}(0, k),$$
$$Z(t\tilde{N}_l, k)=X^{l-1}(t\tilde{N}_l, k)\overline{W}(kt\tilde{N}_l),$$
$$Z\left(0, \frac{N_{l-1}}{2}\right)=X^{l-1}\left(0, \frac{N_{l-1}}{2}\right),$$
$$Z\left(t\tilde{N}_l, \frac{N_{l-1}}{2}\right)=2X^{l-1}\left(t\tilde{N}_l, \frac{N_{l-1}}{2}\right),$$
$$Z(j, 0)=X^{l-1}(j, 0),$$
$$Z(t\tilde{N}_l+j, 0)=X^{l-1}(t\tilde{N}_l+j, 0)$$
$$+X^{l-1}(t\tilde{N}_l-j, 0),$$
$$Z(t\tilde{N}_l-j, 0)=X^{l-1}(t\tilde{N}_l+j, 0)$$
$$-X^{l-1}(t\tilde{N}_l-j, 0),$$
$$Z(j, k)=X^{l-1}(j, k),$$

$$Z(t\tilde{N}_l+j,k)=X^{l-1}(t\tilde{N}_l+j,k)\overline{W}(kt\tilde{N}_l)+\overline{X}^{l-1}(t\tilde{N}_l-j,k)W(kt\tilde{N}_l),$$

$$Z(t\tilde{N}_l-j,k)=X^{l-1}(t\tilde{N}_l+j,k)\overline{W}(kt\tilde{N}_l)-\overline{X}^{l-1}(t\tilde{N}_l-j,k)W(kt\tilde{N}_l),$$

$$Z\left(j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)=X^{l-1}\left(j,\frac{N_{l-1}}{2}\right),$$

$$Z\left(t\tilde{N}_l+j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)=X^{l-1}\left(t\tilde{N}_l+j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)+X^{l-1}\left(t\tilde{N}_l-j,\frac{N_{l-1}}{2}\right),$$

$$Z\left(t\tilde{N}_l-j,\frac{N_{1-l}}{2}\right)=X^{l-1}\left(t\tilde{N}_l+j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)-X^{l-1}\left(t\tilde{N}_l-j,\frac{N_{l-1}}{2}\right),$$

$$X^l(0,0)=Z(0,0)+\sum_t Z(t\tilde{N}_l,0),$$

$$X^l(0,k)=Z(0,k)+2\sum_t \mathrm{Re}\,Z(t\tilde{N}_l,k),$$

$$X^l\left(0,\frac{N_l}{2}\right)=Z\left(0,\frac{N_{l-1}}{2}\right)+\sum_t(-1)^t Z\left(t\tilde{N}_l,\frac{N_{l-1}}{2}\right),$$

$$X^l(0,sN_{l-1})=Z(0,0)+\sum_t Z(t\tilde{N}_l,0)C\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$

$$X^l\left(0,\frac{2s-1}{2}N_{l-1}\right)=Z\left(0,\frac{N_{l-1}}{2}\right)+\sum_t Z\left(t\tilde{N}_l,\frac{N_{l-1}}{2}\right)\times C\left(\frac{Nt(2s-1)}{2r_l}\right),$$

$$C_0=Z(0,k)+2\sum_t \mathrm{Re}\,Z(t\tilde{N}_l,k)C\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$

$$S_0=2\sum_t \mathrm{Im}\,Z(t\tilde{N}_l,k)S\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$

$$X^l(0,sN_{l-1}+k)=C_0+S_0,$$
$$X^l(0,sN_{l-1}-k)=C_0-S_0,$$

$$X^l(j,0)=Z(j,0)+\sum_t Z(t\tilde{N}_l+j,0),$$

$$X^l(j,k)=Z(j,k)+\sum_t Z(t\tilde{N}_l+j,k),$$

$$X^l\left(j,\frac{N_l}{2}\right)=Z\left(j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)+\sum_t(-1)^t Z\left(t\tilde{N}_l+j,\frac{N_{l-1}}{2}\right),$$

$$X^l(j,sN_{l-1})=Z(j,0)+\sum_t Z(t\tilde{N}_l+j,0)C\left(\frac{Nst}{r_l}\right)-i\sum_t Z(t\tilde{N}_l-j,0)S\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$

$$X^l\left(j,\frac{2s-1}{2}N_{l-1}\right)=Z\left(j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)+\sum_t Z\left(t\tilde{N}_l+j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)\times C\left(\frac{Nt(2s-1)}{2r_l}\right)-i\sum_t Z\left(t\tilde{N}_l-j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)S\left(\frac{Nt(2s-1)}{2r_l}\right),$$

$$C_1=Z(j,k)+\sum_t Z(t\tilde{N}_l+j,k)C\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$

$$S_1=\sum_t Z(t\tilde{N}_l-j,k)S\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$

$$X^l(j,sN_{l-1}+k)=C_1-iS_1,$$
$$X^l(j,sN_{l-1}-k)=\overline{C}_1-i\overline{S}_1,$$
$$0<2s<r_l,\ 0<2t<r_l,\ 0<2j<\tilde{N}_l,\ 0<2k<N_{l-1}.$$

f′) 実数かつ Hermite 歪対称の場合（高速 sine 変換）

$$Z(t\tilde{N}_l,0)=2X^{l-1}(t\tilde{N}_l,0),$$
$$Z(0,k)=X^{l-1}(0,k),$$
$$Z(t\tilde{N}_l,k)=X^{l-1}(t\tilde{N}_l,k)\overline{W}(kt\tilde{N}_l),$$

$$Z\left(t\tilde{N}_l,\frac{N_{l-1}}{2}\right)=2X^{l-1}\left(t\tilde{N}_l,\frac{N_{l-1}}{2}\right),$$

$$Z(j,0)=X^{l-1}(j,0),$$

$$Z(t\tilde{N}_l+j,0)=X^{l-1}(t\tilde{N}_l+j,0)-X^{l-1}(t\tilde{N}_l-j,0),$$

$$Z(t\tilde{N}_l-j,0)=X^{l-1}(t\tilde{N}_l+j,0)+X^{l-1}(t\tilde{N}_l-j,0),$$

$$Z(j,k)=X^{l-1}(j,k),$$

$$Z(t\tilde{N}_l+j,k)=X^{l-1}(t\tilde{N}_l+j,k)\overline{W}(kt\tilde{N}_l)-X^{l-1}(t\tilde{N}_l-j,k)W(kt\tilde{N}_l),$$

$$Z(t\tilde{N}_l-j,k)=X^{l-1}(t\tilde{N}_l+j,k)\overline{W}(kt\tilde{N}_l)+X^{l-1}(t\tilde{N}_l-j,k)W(kt\tilde{N}_l),$$

$$Z\left(j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)=X^{l-1}\left(j,\frac{N_{l-1}}{2}\right),$$

$$Z\left(t\tilde{N}_l+j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)=X^{l-1}\left(t\tilde{N}_l+j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)-X^{l-1}\left(t\tilde{N}_l-j,\frac{N_{l-1}}{2}\right),$$

$$Z\left(t\tilde{N}_l-j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)=X^{l-1}\left(t\tilde{N}_l+j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)+X^{l-1}\left(t\tilde{N}_l-j,\frac{N_{l-1}}{2}\right),$$

$$X^l(0,0)=0,$$

$$X^l(0,k)=Z(0,k)+2i\sum_t \mathrm{Im}\, Z(t\tilde{N}_l,k),$$

$$X^l\left(0,\frac{N_l}{2}\right)=0,$$

$$X^l(0,sN_{l-1})=-i\sum_t Z(t\tilde{N}_l,0)S\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$

$$X^l\left(0,\frac{2s-1}{2}N_{l-1}\right)$$
$$=-i\sum_t Z\left(t\tilde{N}_l,\frac{N_{l-1}}{2}\right)S\left(\frac{Nt(2s-1)}{2r_l}\right),$$

$$C_0=Z(0,k)+2i\sum_t \mathrm{Im}\, Z(t\tilde{N}_l,k)C\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$

$$S_0=2\sum_t \mathrm{Re}\, Z(t\tilde{N}_l,k)S\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$

$$X^l(0,sN_{l-1}+k)=C_0-iS_0,$$

$$X^l(0,sN_{l-1}-k)=-C_0-iS_0,$$

$$X^l(j,0)=Z(j,0)+\sum_t Z(t\tilde{N}_l+j,0),$$

$$X^l(j,k)=Z(j,k)+\sum_t Z(t\tilde{N}_l+j,k),$$

$$X^l\left(j,\frac{N_l}{2}\right)=Z\left(j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)$$
$$+\sum_t(-1)^t Z\left(t\tilde{N}_l+j,\frac{N_{l-1}}{2}\right),$$

$$X^l(j,sN_{l-1})$$
$$=Z(j,0)+\sum_t Z(t\tilde{N}_l+j,0)C\left(\frac{Nst}{r_l}\right)$$
$$-i\sum_t Z(t\tilde{N}_l-j,0)S\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$

$$X^l\left(j,\frac{2s-1}{2}N_{l-1}\right)$$
$$=Z\left(j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)+\sum_t Z\left(t\tilde{N}_l+j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)$$
$$\times C\left(\frac{Nt(2s-1)}{2r_l}\right)$$
$$-i\sum_t Z\left(t\tilde{N}_l-j,\frac{N_{l-1}}{2}\right)S\left(\frac{Nt(2s-1)}{2r_l}\right),$$

$$C_1=Z(j,k)+\sum_t Z(t\tilde{N}_l+j,k)C\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$

$$S_1=\sum_t Z(t\tilde{N}_l-j,k)S\left(\frac{Nst}{r_l}\right),$$

$$X^l(j,sN_{l-1}+k)=C_1-iS_1,$$

$$X^l(j,sN_{l-1}-k)=\bar{C}_1-i\bar{S}_1,$$

$$0<2s<r_l,\ 0<2t<r_l,\ 0<2j<\tilde{N}_l,$$
$$0<2k<N_{l-1}.$$

以上において，$Z(j,k)$ は l に，$C_i, S_i(i=0,1,2)$ は j,k,l,s,t に依存するが，繁雑であるので，このことを省略した．

4. 演算回数とデータの記憶

FFT の l 段階は，r_l 個の複素数に回転因子 $W(\cdot)$ をかけ，r_l 項の離散型フーリエ変換を N/r_l 組行なうことからなっている．$r_l=2$ の場合，回転因子をかけるためだけに乗算を要し，2項のフーリエ変換は，加減算だけでよい．一定の l において，複素数乗算は，算法 a) の場合 $N/2$ 回となる．算法 b), c), d) の場合，添字 j,k のいずれか一方の動く範囲が半分となるので，$N/4$ 回．算法 e), f) の場合，j,k の範囲がともに半分になるので，$N/8$ 回となる．とくに，$N=2^n$ の場合，添字 l が1から $n=\log_2 N$ まで動くので，高速 sine 変換，cosine 変換に要する回数は，$(N/8)\log_2 N$ となる．

r_l が奇数ならば，算法 a′) において，$X^{l-1}(\cdot,\cdot)$ から $Z(\cdot,\cdot)$ をつくるため，すなわち，回転因子をかけるために，添字 j,k,t の動く範囲から，$N(r_l-1)/r_l$ $(<N)$ 回乗算を要する．r_l 次のフーリエ変換を N/r_l 組行なうために，$((r_l-1)/2)^2 N/r_l(<Nr_l/4)$ 回．両者合わせて $Nr_l/4+N$．算法 b′), c′), d′) の場合，$Nr_l/8+N/2$．算法 e′), f′) の場合，$Nr_l/16+N/4$．したがって，$N=2^m r_{m+1}\cdots r_n\ (m\geq 0)$ と表わされるとき，複素数値入力データに対して，$N(2m+r_{m+1}+\cdots+r_n)/4+(n-m)N$ 回となる．入力データに実数性あるいは対称性があれば，この半分となる．2つの性質が同時に成立すれば，1/4 となる．

つぎに，記憶場所と語数について述べる．行列 $X^l(\cdot,\cdot)$ をベクトル $X^l(\cdot)$ に対応させる規則は一通りではないが，この規則のいかんによって，プログラムの難易が異なってくる．高速 sine 変換，cosine 変換の場合だけ例示する．

N 個の実数値標本が偶関数ならば，独立な標本数は $[N/2]+1$ 個である．奇関数ならば，$[N-1/2]$ 個である．

偶関数で，r_l が2ならば，次のように割り当てる．

$$X^l(0,0)=X^l(0),$$

$$X^l(j,0)=X^l(j),$$

$$X^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2},0\right)=X^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2}\right),$$

$$X^l(0,k)=X^l(k\tilde{N}_l),$$

$$\mathrm{Re}\, X^l(j,k)=X^l(k\tilde{N}_l+j),$$

$$\mathrm{Im}\, X^l(j,k)=X^l(k\tilde{N}_l-j),$$

$$X^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2},k\right)\overline{W}\left(\frac{k\tilde{N}_l}{2}\right)=X^l\left(k\tilde{N}_l+\frac{\tilde{N}_l}{2}\right),$$

$X^l(0, N_{l-1}) = X^l\left(\left[\frac{N}{2}\right]\right)$,

$X^l(j, N_{l-1}) = X^l\left(\left[\frac{N}{2}\right] - j\right)$,

$X^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2}, N_{l-1}\right) = 0$ は記憶しない.

$0 < 2j < \tilde{N}_l,\ 0 < 2k < N_l$.

r_l が奇数ならば,

$X^l(0, 0) = X^l(0)$,

$X^l(j, 0) = X^l(j)$,

$X^l(0, k) = X^l(k\tilde{N}_l)$,

$\mathrm{Re}\, X^l(j, k) = X^l(k\tilde{N}_l + j)$,

$\mathrm{Im}\, X^l(j, k) = X^l(k\tilde{N}_l - j)$,

$X^l\left(0, \frac{N_l}{2}\right) = X^l\left(\left[\frac{N}{2}\right]\right)$,

$X^l\left(j, \frac{N_l}{2}\right) = X^l\left(\left[\frac{N}{2}\right] - j\right)$,

$0 < 2j < \tilde{N}_l,\ 0 < 2k < N_l$.

すなわち, $X^l(\cdot, \cdot)$ を記憶するための語数は, $[N/2]+1$ である.

つぎに, 奇関数で, $r_l = 2$ の場合について述べる.

$X^l(0, 0) = 0$ は記憶しない.

$X^l(j, 0) = X^l(j)$,

$X^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2}, 0\right) = 0$ は記憶しない.

$\mathrm{Im}\, X^l(0, k) = X^l(k\tilde{N}_l)$,

$\mathrm{Re}\, X^l(j, k) = X^l(k\tilde{N}_l + j)$,

$\mathrm{Im}\, X^l(j, k) = X^l(k\tilde{N}_l - j)$,

$\mathrm{Im}\, \bar{X}^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2}, k\right) W\left(\frac{k\tilde{N}_l}{2}\right) = X^l\left(k\tilde{N}_l + \frac{\tilde{N}_l}{2}\right)$,

$X^l(0, N_{l-1}) = 0$ は記憶しない.

$X^l(j, N_{l-1}) = X^l\left(\left[\frac{N}{2}\right] - j\right)$,

$X^l\left(\frac{\tilde{N}_l}{2}, N_{l-1}\right) = X^l\left(\left[\frac{N}{2}\right]\right)$,

$0 < 2j < \tilde{N}_l,\ 0 < 2k < N_l$.

r_l が奇数ならば,

$X^l(0, 0) = 0$ は記憶しない.

$X^l(j, 0) = X^l(j)$,

$\mathrm{Im}\, X^l(0, k) = X^l(k\tilde{N}_l)$,

$\mathrm{Re}\, X^l(j, k) = X^l(k\tilde{N}_l + j)$,

$\mathrm{Im}\, X^l(j, k) = X^l(k\tilde{N}_l - j)$,

$X^l\left(0, \frac{N_l}{2}\right) = 0$ は記憶しない.

$X^l\left(j, \frac{N_l}{2}\right) = X^l\left(\left[\frac{N}{2}\right] - j\right)$,

$0 < 2j < \tilde{N}_l,\ 0 < 2k < N_l$.

すなわち, N 個の標本を, 奇関数の場合, $[N-1/2]$ 項ベクトルに対応させることができた.

とくに, $N = 2^n$ の場合, 実用性が高いと思われるので, プログラムを作成した[8].

おわりに, 行列 $X^l(\cdot, \cdot)$ を, ベクトル $X^l(\cdot)$ に対応させ, 算法のテストを行なったのは, 入沢実君であることを記し, 謝意を表する.

また, ご忠告をいただいた査読者に, お礼申し上げる.

参 考 文 献

1) J. W. Cooley, and J. W. Tukey,: An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, Math. Comp., 19, pp. 297-301 (1965).
2) 高橋秀俊 : FFT アルゴリズムについて, 数理解析研究所講究録, 172, pp. 38-56 (1973).
3) 高橋秀俊 : 高速フーリエ変換 (FFT) について, 情報処理, 14, pp. 616-622 (1973).
4) 吉沢正 : 実数値標本に対する高速フーリエ変換の算法についての一考察, 昭 44 情報処理学会大会予稿集, pp. 59-60.
5) G. D. Bergrand : A Fast Fourier Transform Algorithm for Real Valued Series, CACM, 11, pp. 703-710 (1968).
6) G. D. Bergrand : The Fast Fourier Transform Recursive Equations for Arbitrary Length Records, Math. Comp., 21, pp. 236-238 (1967).
7) 鳥居達生 : 偶関数, 奇関数に対する高速フーリエ変換法, 昭 47 情報処理学会大会予稿集, pp. 121-122.
8) 鳥居達生, 入沢実 : 高速 sine 変換, cosine 変換, 情報処理, 15, pp. 574-575 (1974).

(昭和 48 年 12 月 20 日受付)
(昭和 49 年 2 月 25 日再受付)