《論 文》

Variation Diminishing Splines による多変数関数近似*

馬 渡 鎮 夫**

Abstract

In this paper, a method for approximating functions of ν-variables and partial derivatives is studied with variation diminishing splines. When the values of an approximated function are given on discrete lattice points of step size h, it is shown that all errors by this method are $O(h^2)$ and that the number of necessary data points for computing the approximating functions is at most 2^ν for a value of the functions and at most k^ν for a value of the $(k-2)$-th partial derivative where k is even.

1. はじめに

多変数関数を各変数に関する近似式の何らかの積によって近似する場合，計算量を実際上実行可能な範囲内までに減らすよう工夫しなければならない．この問題解決への試みには，確率論的な方法[6),7),11),12)]と決定論的な方法があるけれども，可能なかぎり後者を採用する方が望ましいことは明らかである．上の問題解決への決定論的試みは，今までのところ，分配束における恒等写像の maximal decomposition による方法[5)]と Quasiinterpolant による方法[10)]の2つによって代表されるように思われる．これらは近似論の種々の箇所で局部的に活用可能であるという意味で理論的には重要であるが，現在のままの形では，ごく低次元（たとえば3次元以下）かまたは特殊な場合にしかその偉力を発揮しない．

本論で述べる variation diminishing splines による近似論は，下に述べるような意味で，上記の問題解決に関する従来の決定論的試みを1歩進めたものである．

（i） 関数値の近似については，任意に与えられた点での近似計算に必要な data point の数は，step size の大きさにかかわらず，高々 2^ν 個（ν は変数の数）である．

（ii） 関数値，第1階偏導関数値，…，第 $k-2$ 階偏導関数値（$k\geqq 4$ かつ偶数）までを同時に近似する式の任意に与えられた点での計算については，step size の大きさにかかわらず，高々 k^ν 個の data point が必要である．

（iii） 等間隔の場合の誤差は，step size h の2乗の order $O(h^2)$ である．

2. General Remarks

$I=[0,1]\times\cdots\times[0,1]$ は ν 次元の cube とし，I の上で定義された実数値連続関数の全体より成る normed space を $C(I)$，その subspace を F, F の有限次元部分空間を S，その basis を $\{\varphi_i\}_{i=1}^d$，F 上の bounded linear functionals を $\{\lambda_i\}_{i=1}^d$ として，任意の $f\in F$ を次式によって近似するものとする．

$$L(f)=\sum_{i=1}^{d}\lambda_i(f)\varphi_i \tag{2.1}$$

このとき，計算量を少なくする問題に関して，$L(f)$ が満たしてほしい条件として次のものがあげられる．

（I） $\|f-L(f)\|$ が小さい．

（II） I 上で $L(f)$ の計算に必要とされる関数値，導関数値の総数は少ない．

（III） (2.1) の右辺の数値計算は安定かつ容易である．

（IV） 各 λ_i, φ_i は小さい support Supp(λ_i), Supp(φ_i)* を持ち，各 Supp(λ_i) は有限集合であって，

* On the Approximation of Multivariate Functions with Variation Diminishing Splines, by Shizuo MAWATARI, (Department of Management Engineering, College of Science and Engineering, Aoyama Gakuin University)

** 青山学院大学理工学部経営工学科

* 関数 $f\in C(I)$ の support Supp(f) とは，集合 $\{x\mid x\in I, f(x)\neq 0\}$ の閉包をいう．また，functional λ の support Supp(λ) とは，関数 f の Q への制限が恒等的に 0 ならば $\lambda(f)=0$ となる最小の閉集合 Q をいう．

$\mathrm{Supp}(\lambda_i) \subset \mathrm{Supp}(\varphi_i)$ for $i=1, 2, \cdots, d$.

（V） 次の関係式が成り立つ.

$\lambda_i(\varphi_j)=\delta_{ij}$ for $i, j=1, 2, \cdots, d$.

（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ）の条件の意味は明白である．（Ⅳ）が満たされると与えられた点 x を support に含まない φ_i については計算する必要がないので，それだけ計算量が減る．（V）が満たされると，(2.1) の L は idempotent となり，精度は高まり誤差解析は容易となる．これらの条件のうちで，できるだけ多くが満たされるように $\{\lambda_i\}_{i=1}^{d}$，$\{\varphi_i\}_{i=1}^{d}$ を定めたい．この要求をある程度満たすものとして，C. de Boor and G. J. Fix[10] の Quasiinterpolant がある．しかし，この方法は一般には各 $\lambda_i(f)$ の計算に各種の偏導関数値を必要とし，ごく低次元の場合を除いて，実際に数値計算に使う近似式としてはあまり得策ではない．

上記の（Ⅰ）～（V）をすべて満たす近似式は外に見あたらず，しかも作成が困難なので，ここでは（V）を無視し，残りの4つの条件を満たす近似法について述べる．そのために必要な概念や基本的な関係式を，3, 4章に前もって述べる．

3. Variation Diminishing Operator

$x_1, x_2, \cdots, x_r$ は任意の実数とし，その符号変化の数を $v(x_i)_{i=1}^{r}$ と書くことにする．このとき，0 である x_i は無視する．

$0 \leqq x_1 < x_2 < \cdots < x_r \leqq 1$ （r は任意の自然数）

なる分割 $\pi_r=(x_i)_{i=1}^{r}$ の全体を Δ とし，任意の $f \in C[0, 1]$ の $[0, 1]$ 上の符号変化の数を次式で定義する．

$$v(f)=\sup_{\pi_r \in \Delta,\, \pi_r=(x_i)_{i=1}^{r}} v(f(x_i))_{i=1}^{r}. \tag{3.1}$$

定義 2.1[1]

$C[0, 1]$ から自分自身への operator L が次の3つの性質を持つとき，これを variation diminishing operator という．

（ⅰ） L は $C[0, 1]$ において linear である．

（ⅱ） $L(1)=1$, $L(x)=x$.

（ⅲ） $v(L(f)) \leqq v(f)$ for all $f \in C[0, 1]$.

L が variation diminishing operator であるとき，任意の直線 $y=a+bx$ と任意の $f \in C[0, 1]$ に対し，

$$v(L(f)(x)-a-bx) \leqq v(f(x)-a-bx). \tag{3.2}$$

すなわち，この L は直線との交差回数が増加しないような近似法である．このことから，L は単調性や凸性を保存する．また，L は全変動をも減少させるが，2次関数は再生しない．すなわち，次の定理が成立する．

定理 2.1[1]

variation diminisning operator L の中で，$L(x^2)=x^2$ となるものは恒等写像に限る．

定理 2.2[1]

（ⅰ） 関数 $\varphi(r)=v(f(x)-r)$ $(-\infty<r<\infty)$ は，$f \in C[0, 1]$ が有界変動である場合に限って可積分である．

（ⅱ） このとき，f の全変動を $T(f)$ とすると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(f(x)-r)\,dr = T(f).$$

（ⅲ） L が variation diminishing operator ならば，

$$T(L(f)) \leqq T(f).$$

4. Normalized B-spline

k は2以上の自然数，$J=(a, b)$ は有限または無限の開区間とする．J の分割 $\pi=(x_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ が次の条件をすべて満たすとき，これを k-extended partition という．

（ⅰ） $x_i \leqq x_{i+1}$ for all i,

（ⅱ） $\lim_{i\to-\infty} x_i=a$, $\lim_{i\to+\infty} x_i=b$,

（ⅲ） $d_i=\overline{\{j : x_j=x_i\}}$ （$x_j=x_i$ となる j の個数）とすれば，$d_i \leqq k$ for all i.

J の k-extended partition π に関し，次の条件をすべて満たす J 上の実数値関数の linear space を $C_\pi^{(k-1)}$ と記す．

（ⅰ） $f \in C^{k-1}(x_i, x_{i+1})$ for all i such that $(x_i, x_{i+1}) \neq \phi$,

（ⅱ） すべての i と $r<k$ に対して，有限な $f^{(r)}(x_i-)$ および $f^{(r)}(x_i+)$ が存在する．

（ⅲ） すべての $i, r<k-d_i$ に対し，

$f^{(r)}(x_i+)=f^{(r)}(x_i-)$.

π 上の order k （すなわち，degree$<k$）の多項式 spline の全体より成る linear space を S_π^k とすると，S_π^k は $C_\pi^{(k-1)}$ の linear subspace である．

$$g_k(s\,;t)=(s-t)_+^{k-1}=\begin{cases}(s-t)^{k-1} & \text{if } s \geqq t,\\ 0 & \text{if } s<t.\end{cases} \tag{4.1}$$

$$N_{i,k}(x)=(x_{i+k}-x_i)\,g_k(x_i, \cdots, x_{i+k} : x) \tag{4.2}$$

for all i. ただし，$g_k(x_i, \cdots, x_{i+k} : x)$ は $g_k(s\,;x)$ の変数 s に関する $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}$ 上の divided difference.

とおくとき，各 $N_{i,k}(x)$ を normalized B-spline という．定義より，すべての i に対して，

(4.3) $N_{i,k}(x)\begin{cases}=0 & \text{if } x\notin(x_i, x_{i+k}),\\ >0 & \text{if } x\in(x_i, x_{i+k}).\end{cases}$

H. B. Curry and I. J. Schoenberg[2] より，任意の $f\in S_n^k$ に対し，一意的な実数列 $(a_i(f))_{i=-\infty}^{\infty}$ が存在して，

(4.4) $$f(x)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i(f)N_{i,k}(x).$$

C. de Boor and G. J. Fix[10] より，任意の実数 z と任意の $x\in J$ に対し，次の関係式が成り立つ．

(4.5) $$(x-z)^{k-1}=\sum_{i=-\infty}^{\infty}(x_{i+1}-z)(x_{i+2}-z)\cdots \times(x_{i+k-1}-z)N_{i,k}(x).$$

両辺を z について展開し，z の係数を比較すると，

(4.6) $$\sum_i N_{i,k}(x)=1,$$

(4.7) $$\sum_i \xi_{i,k} N_{i,k}(x)=x,$$

(4.8) $$\sum_i \xi_{i,k}^{(2)} N_{i,k}(x)=x^2.$$

ただし，各 $\xi_{i,k}, \xi_{i,k}^{(2)}$ は次のように定義する．

(4.9) $$\xi_{i,k}=\frac{1}{k-1}(x_{i+1}+x_{i+2}+\cdots+x_{i+k-1}),$$

(4.10) $$\xi_{i,k}^{(2)}=\frac{1}{\binom{k-1}{2}}\sum_{i+1\leqq r<s\leqq i+k-1} x_r x_s.$$

5. Variation Diminishing Spline

k は2以上の自然数，n は任意の自然数とし，

(5.1) $$\begin{cases} x_0=x_1=\cdots=x_{k-1}=0,\\ x_k=\dfrac{1}{n},\\ \quad\vdots\\ x_{n+k-2}=\dfrac{n-1}{n},\\ x_{n+k-1}=x_{n+k}=\cdots=x_{n+2k-2}=1\end{cases}$$

とすると，$x_0, x_1, \cdots, x_{n+2k-2}$ は $I_1=[0,1]$ 上の k-extended partition である．$l=n+k-2$ とすると $i=0,1,\cdots,l$ に対し，I_1 上で4章の関係式 (4.3), (4.6), (4.7), (4.8) がすべて成り立つ．任意の $f\in C(I_1)$ に対して，

(5.2) $$L(f)=\sum_{j=0}^{l} f(\xi_{j,k})N_{j,k}(x)$$

とおく．S. Karlin[4] より，

(5.3) $$v(L(f))\leqq v(f(\xi_{j,k}))_{j=0}^{l}\leqq v(f).$$

従って，(5.2) の L は3章の意味で variation diminishing operator である．(5.2) の右辺を variation diminishing spline という．

$x_j\leqq x\leqq x_{j+1}$ のとき，$N_{j-k+1,k}(x), N_{j-k+2,k}(x), \cdots, N_{j,k}(x)$ を除いたすべての $N_{i,k}(x)$ は0である．つまり，高々 k 個の $N_{i,k}(x)$ のみが0ではない．

$k-1\leqq j\leqq n$ のとき，$\xi_{j,k}=x_j+k/2n$ であり，k が偶数のとき，$\xi_{j,k}$ はどれかの x_i と一致して好都合であるから，以後本節では常に k は偶数であるとする．

定理2.1より，(5.2) の L は x^2 を再生しない．

(5.4) $$E_{n,k}(x)=\sum_{j=0}^{l}\xi_{j,k}^2 N_{j,k}(x)-x^2$$

とおくと，M. Marsden and I. J. Schoenberg[3] より $k\leqq n+2$ のとき次の誤差評価式を得る．

(5.5) $$0\leqq E_{n,k}(x)\leqq \max\{3,k\}/(12n^2).$$

これを利用して次の定理を得る．

定理 5.1

$2\leqq k\leqq n+2$，$k_p=\max\{3, k-p\}$ とする．

(i) 任意の $f\in C(I_1)$, $x\in[0,1]$ に対し，

(5.6) $$|f(x)-L(f)(x)|\leqq\left(1+\sqrt{\frac{k_0}{12}}\right)\times w\left(f:\frac{1}{n}\right).$$

(ii) 任意の $p=1,2,\cdots,k-2$, $f\in C^{p+2}(I_1)$, $x\in\left[\dfrac{k-2}{n}, 1-\dfrac{k-2}{n}\right]$ に対し，

(5.7) $$|D^p f(x)-D^p L(f)(x)| \leqq\left(1+\sqrt{\frac{k_p}{12}}\right)w\left(D^p f:\frac{1}{n}\right)+K_p\|f^{(p+2)}\|_\infty/n^2.$$

ただし，$w(D^p f:1/n)$ は $D^p f$ の modulus of continuity* で

$$K_p=\left(\sum_{m=0}^{p}{}_pC_m\left|\frac{p}{2}-m\right|^{p+2}\right)\Big/(p+2)!.$$

証 明

(i)の場合は，M. Marsden and I. J. Schoenberg[3] による．

(ii)の場合を考える．$h=1/n$ とおき，

$$A_i^{(0)}=f(\xi_{i,k})\qquad(i=0,1,\cdots,l),$$

(5.8) $$A_i^{(p)}=\frac{(k-p)(A_i^{(p-1)}-A_{i-1}^{(p-1)})}{(x_{i+k-p}-x_i)}\quad \text{if } i\geqq p,$$

とおくと，

(5.9) $$D^p L(f)(x)=\sum_{j=p}^{l}A_j^{(p)}N_{j,k-p}(x).$$

---

* $$w\left(D^p f:\frac{1}{n}\right)=\max_{\substack{|z_1-z_2|\leqq 1/n\\ z_1,z_2\in[0,1]}}|D^p f(z_1)-D^p f(z_2)|$$

ここで，$k+p-2\leqq j\leqq n$ の場合には，

$$A_j^{(p)}=\frac{1}{h^p}\sum_{m=0}^{p}{}_pC_m(-1)^m A_{j-m}^{(0)},$$

$$\frac{1}{p+1}(\xi_{j,k}+\xi_{j-1,k}+\cdots+\xi_{j-p,k})=\xi_{j,k-p}.$$

点 $\xi_{j,k-p}$ において f を Taylor 展開すると，

$$\xi_{j-m,k}-\xi_{j,k-p}=\left(\frac{p}{2}-m\right)h$$

$$\text{if } k+p-2\leqq j\leqq n,$$

$$f(\xi_{j-m,k})=\sum_{i=0}^{p+1}\frac{1}{i!}\left\{\left(\frac{p}{2}-m\right)h\right\}^i f^{(i)}(\xi_{j,k-p})+\frac{1}{(p+2)!}\left\{\left(\frac{p}{2}-m\right)h\right\}^{p+2}\times f^{(p+2)}(\eta_{j,k-p}^{(m)}).$$

ここで，$\eta_{j,k-p}^{(m)}$ は $\xi_{j-m,k}$ と $\xi_{j,k-p}$ の間にある実数である．

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{p}{}_pC_m(-1)^m A_{j-m}^{(0)}\\&=\sum_{m=0}^{p}{}_pC_m(-1)^m f(\xi_{j-m,k})\\&=\sum_{i=0}^{p+1}\frac{h^i}{i!}f^{(i)}(\xi_{j,k-p})\times\left\{\sum_{m=0}^{p}{}_pC_m(-1)^m\left(\frac{p}{2}-m\right)^i\right\}\\&\quad+\frac{h^{p+2}}{(p+2)!}\sum_{m=0}^{p}{}_pC_m(-1)^m\left(\frac{p}{2}-m\right)^{p+2}\times f^{(p+2)}(\eta_{j,k-p}^{(m)}).\end{aligned}$$

このとき，次の関係式が成り立つ．

$$\sum_{m=0}^{p}{}_pC_m(-1)^m\left(\frac{p}{2}-m\right)^i=\begin{cases}p! & \text{if } i=p,\\ 0 & \text{if } i<p.\end{cases}\tag{5.10}$$

これを p に関する数学的帰納法によって示す．まず $p=1$ のときは明らかに成り立つ．(5.10) が $p\leqq q$ に対して成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{q+1}{}_{q+1}C_m(-1)^m\left(\frac{q+1}{2}-m\right)^i\\&=\sum_{m=0}^{q}{}_qC_m(-1)^m\left(\frac{q+1}{2}-m\right)^i+\sum_{m=1}^{q+1}{}_qC_{m-1}(-1)^m\left(\frac{q+1}{2}-m\right)^i\\&=\sum_{m=0}^{q}{}_qC_m(-1)^m\left\{\left(\frac{q}{2}-m\right)+\frac{1}{2}\right\}^i-\sum_{m=0}^{q}{}_qC_m(-1)^m\left\{\left(\frac{q}{2}-m\right)-\frac{1}{2}\right\}^i.\end{aligned}$$

これは，$i\leqq q$ のとき 0 である．$i=q+1$ のときは最後の式において，

$$\left\{\left(\frac{q}{2}-m\right)+\frac{1}{2}\right\}^i,\quad\left\{\left(\frac{q}{2}-m\right)-\frac{1}{2}\right\}^i$$

を展開して $(q+1)!$ を得る．故に (5.10) が成り立つ．

また，(5.10)の左辺は次のようにも書ける．

$$\sum_{m=0}^{p}{}_pC_m(-1)^m\left(\frac{p}{2}-m\right)^i=\{1+(-1)^{p+i}\}\sum_{m=0}^{[p/2]}{}_pC_m\left(\frac{p}{2}-m\right)^i.\tag{5.11}$$

従って，$i=p+1$ のとき，(5.11) は 0 となる．

以上より，$k+p-2\leqq j\leqq n$ のとき，

$$A_j^{(p)}=f^{(p)}(\xi_{j,k-p})+\frac{h^2}{(p+2)!}\sum_{m=0}^{p}{}_pC_m(-1)^m\times\left(\frac{p}{2}-m\right)^{p+2}f^{(p+2)}(\eta_{j,k-p}^{(m)}).\tag{5.12}$$

一方，$x_j\leqq x\leqq x_{j+1}$ とすると，(5.9) において，

$N_{j-(k-p)+1,k-p}(x), N_{j-(k-p)+2,k-p}(x), \cdots, N_{j,k-p}(x)$

のみが恒等的に 0 ではない．このことと，

$$\begin{aligned}&j-(k-p)+1\geqq k+p-2\\&\quad\Rightarrow j\geqq(k-2)+(k-1).\\&n+1=n-(k-2)+(k-1)\end{aligned}$$

に注意すると，

$$\frac{k-2}{n}\leqq x\leqq 1-\frac{k-2}{n}$$

のとき，(5.9) の各 $A_j^{(p)}$ は (5.12) であらわされるとして一般性を失わない．故に，$p=0$ の場合と同様の推論をして，(5.7) を得る．

Q. E. D.

$p=1,2,\cdots,k-2$ のとき，$D^pL(f)(x)$ の実際の計算は (5.9) よりも次の計算の方が良い．

$$D^pL(f)(x)=\sum_{j=0}^{l}f(\xi_{j,k})D^pN_{j,k}(x).\tag{5.13}$$

各 $D^pN_{j,k}(x)$ の計算は，C. de Boor[8] の方法を使えば安定である．従って，variation diminishing spline は，関数値，導関数値，高階導関数値の近似計算に利用することができる．

なお，(5.2) の L は positive linear operator でもある．この観点から次の定理を得る．

定理 5.2

$2\leqq k\leqq n+2$ とすると，

(i) 任意の $f\in C^2(I_1)$, $x\in[0,1]$ に対して，

$$|f(x)-L(f)(x)|\leqq 2(k-1)\|f''\|_\infty/n^2\tag{5.14}$$

(ii) 任意の $p=1,2,\cdots,k-2$, $f\in C^{p+2}(I_1)$, $x\in$

$\left[\frac{k-2}{n}, 1-\frac{k-2}{n}\right]$ に対し，定理 5.1 の K_p により，

(5.15) $$|D^p f(x)-D^p L(f)(x)| \leqq (2k-2+K_p)\|f^{(p+2)}\|_\infty/n^2.$$

証　明

$$\alpha_{\pi,k}^2=(k-1)/n^2$$

とおくと，R. A. DeVore[9] より，

$$|f(x)-L(f)(x)| \leqq 2\alpha_{\pi,k} w(f';\ \alpha_{\pi,k})$$

$$\therefore\ |f(x)-L(f)(x)| \leqq 2(k-1)\|f''\|_\infty/n^2.$$

$p=1,2,\cdots,k-2$ のときは，(5.12) と $p=0$ の場合と同様の推論により，(5.15) を得る．

Q. E. D.

6. Variation Diminishing Spline による多変数関数近似

$I=[0,1]\times\cdots\times[0,1]$ は ν 次元の cube とし，各変数について5章で述べた variation diminishing spline を作り，これらの tensor product をとって，I 上で k 回連続的に微分可能な実数値関数 $f\in C^k(I)$ の近似式を作る．

(6.1) $$L(f)(\boldsymbol{y})=\sum_{j_1=0}^{l_1}\sum_{j_2=0}^{l_2}\cdots\sum_{j_\nu=0}^{l_\nu} f(\xi_{1,k},\xi_{2,k},\cdots,\xi_{\nu,k})N_{j_1,k}(y_1)N_{j_2,k}(y_2)\cdots N_{j_\nu,k}(y_\nu).$$

右辺は step size の大きさにかかわらず，高々 k^ν 個のみが0ではなく，$k-2$ 回連続的に微分可能である．従って，関数値のみが必要なときは $k=2$ とすると，任意に与えられた点での計算に関し，高々 2^ν 個の data point が必要である．また，各変数について $k-2$ 階の偏導関数まで近似したいときは，$k\geqq 4$ かつ偶数として，任意に与えられた点での計算に関し，高々 k^ν 個の data point が必要である．

(6.1) の誤差評価式として，(5.6), (5.14) に対応するものが作られるが，ここでは後者のみを述べる．

第 i 変数に関する (5.2) の L を L_i, $C^k(I)$ 上の恒等写像を E とし，$R_i=E-L_i$ とおくと，$C^k(I)$ 上の一様 norm に関して，次の関係式が成り立つ．

$$\|L_i\|=1 \quad \text{for } i=1,2,\cdots\nu.$$

(6.2) $$\|R_i(f)\|_\infty \leqq 2(k-1)\|D_i^2 f\|_\infty/n^2$$

これを利用して，次の定理が成り立つ．

定理 6.1

任意の $p=0,1,\cdots,k-2$, $f\in C^{p+2}(I)$ に対して，

(6.3) $$|D_i^p f(\boldsymbol{y})-D_i^p L(f)(\boldsymbol{y})| \leqq \frac{1}{n^2}\sum_{\alpha=1}^{\nu}(2k-2+\bar{K}_\alpha)\|D_\alpha^2 D_i^p f\|_\infty + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

ただし，$p=0$ ならば $\boldsymbol{y}\in I$, $p\geqq 1$ ならば

$$\boldsymbol{y}\in\left[\frac{k-2}{n}, 1-\frac{k-2}{n}\right]\times\cdots\times\left[\frac{k-2}{n}, 1-\frac{k-2}{n}\right](\subset I)$$

であり，$\bar{K}_i=K_p$ とし他は $\bar{K}_\alpha=K_0$ とする．

証　明

(6.4) $$E=\prod_{\iota=1}^{\nu}L_\iota+\sum_{\alpha=1}^{\nu}R_\alpha\prod_{\iota=1,\neq\alpha}^{\nu}L_\iota+\sum_{1\leqq\alpha<\beta\leqq\nu}R_\alpha R_\beta\prod_{\iota=1,\neq\alpha,\beta}^{\nu}L_\iota+\cdots+\prod_{\iota=1}^{\nu}R_\iota.$$

$$L=\prod_{\iota=1}^{\nu}L_\iota.$$

$$\|R_\alpha R_\beta f\|_\infty \leqq (2k-2)\|D_\alpha^2 R_\beta f\|_\infty/n^2 \leqq (2k-2)^2\|D_\beta^2 D_\alpha^2 f\|_\infty/n^4.$$

(6.4) を第 i 変数について偏微分すると，右辺において添字が i であるものに D_i^p がつく．以上のことと (6.2), (5.15) より，(6.3) が従う．

Q. E. D.

(6.1) の $L(f)$ が (3.2) のような shape-preserving な性質を持つかどうかは明らかではないが，少なくとも次の意味での単調性は保存する．

定理 6.2

$f\in C^1(I)$ が各変数について単調ならば，$L(f)$ も同じ意味で単調である．

証　明

変数 y_ν について示せば十分である．

$f(\xi_{j_1,k},\xi_{j_2,k},\cdots,\xi_{j_\nu,k})$ を単に $f(j_1,j_2,\cdots,j_\nu)$ と書くと，

$$D_\nu L(f)(\boldsymbol{y})=\sum_{j_1=0}^{l_1}\cdots\sum_{j_\nu=0}^{l_\nu}g(j_1,\cdots,j_\nu)N_{j_1,k}(y_1)\cdots\times N_{j_\nu,k-1}(y_\nu).$$

ただし，

$$g(j_1,\cdots,j_\nu)=\frac{k-1}{x_{j_\nu+k-1}-x_{j_\nu}}\{f(j_1,\cdots,j_\nu)-f(j_1,\cdots,j_{\nu-1},j_\nu-1)\}.$$

ところが，

$$g(j_1,\cdots,j_\nu)=\frac{(k-1)(\xi_{j_\nu,k}-\xi_{j_\nu-1,k})}{(x_{j_\nu+k-1}-x_{j_\nu})}\times D_\nu f(j_1,\cdots,j_{\nu-1},\eta_\nu)$$

$$\eta_\nu\in[\xi_{j_\nu-1},\xi_{j_\nu}].$$

仮定より，I 上で $D_\nu f\geqq 0$ または $D_\nu f\leqq 0$ であり，$g(j_1,\cdots,j_\nu)\geqq 0\ (\leqq 0)$ に応じて，

$D_\nu L(f)(\boldsymbol{y}) \geqq 0 \ (\leqq 0)$.

Q. E. D.

7. 数値実験

近似式 (5.2), (6.1) について実際に計算した．両方の計算において，$n=32$ すなわち step size を $h=2^{-5}$ としたので，誤差は $h^2=2^{-10}$ の order つまり有効3桁ある筈である．結果は次のとおり良好である．ここで $k=4$ であり，使用機種は TOSBAC 3400 である．

〔**実験 1**〕

(7.1)　被近似関数；$f(x)=e^x \ (0 \leqq x \leqq 1)$,

出力点；$y_i=(i+0.5) \cdot 2^{-5}$
$(i=1, 2, \cdots, 30)$,

目　的；$f(y_i)$, $f'(y_i)$, $f''(y_i)$, $f'''(y_i)$ の誤差はすべて $O(h^2)$ であるかをみる．

結　果；絶対誤差が，最大の点は y_{30}，最小の点は y_1 で，各値は **Table. 1** のとおりである．

注　意；定理 5.1 の証明および Table. 1 にみられるとおり，$D^3 L(f)(x)$ が定義される点 x での精度は，やはり $O(h^2)$ である．

Table. 1 Computed values of the variation diminishing spline.

$y_1=1.5 \cdot 2^{-5}$, $y_{30}=30.5 \cdot 2^{-5}$, $f(x)=e^x \ (0 \leqq x \leqq 1)$.

	真　値	計算値	絶対誤差
$L(f)(y_1)$	$0.1047\,9910 \times 10^1$	$0.1048\,1616 \times 10^1$	$0.1705\,8273 \times 10^{-3}$
$DL(f)(y_1)$	$0.1047\,9910 \times 10^1$	$0.1048\,1616 \times 10^1$	$0.1705\,8778 \times 10^{-3}$
$D^2L(f)(y_1)$	$0.1047\,9910 \times 10^1$	$0.1048\,2042 \times 10^1$	$0.2132\,4120 \times 10^{-3}$
$D^3L(f)(y_1)$	$0.1047\,9910 \times 10^1$	$0.1048\,1167 \times 10^1$	$0.1256\,8943 \times 10^{-3}$
$L(f)(y_{30})$	$0.2593\,8026 \times 10^1$	$0.2594\,2248 \times 10^1$	$0.4221\,9629 \times 10^{-3}$
$DL(f)(y_{30})$	$0.2593\,8026 \times 10^1$	$0.2594\,2248 \times 10^1$	$0.4222\,0776 \times 10^{-3}$
$D^2L(f)(y_{30})$	$0.2593\,8026 \times 10^1$	$0.2594\,3304 \times 10^1$	$0.5277\,4482 \times 10^{-3}$
$D^3L(f)(y_{30})$	$0.2593\,8026 \times 10^1$	$0.2594\,1210 \times 10^1$	$0.3183\,6104 \times 10^{-3}$

Table. 2 Computed values of the variation diminishing spline of ν-variables

$\bar{\boldsymbol{y}}=(0.484375, \cdots, 0.484375)$, $f(\boldsymbol{y})=(1+y_1+\cdots+y_\nu+y_1 \cdot \cdots \cdot y_\nu)^4$

ν	真　値	$L(f)(\bar{\boldsymbol{y}})$	所要時間
4	$0.8019\,7979 \times 10^2$	$0.8028\,4770 \times 10^2$	計2分1秒
5	$0.1414\,2951 \times 10^3$	$0.1415\,5881 \times 10^3$	
6	$0.2359\,2509 \times 10^3$	$0.2361\,1484 \times 10^3$	計50分56秒
7	$0.3737\,4785 \times 10^3$	$0.3740\,1904 \times 10^3$	
8	$0.5662\,1047 \times 10^3$	$0.5665\,8686 \times 10^3$	
9	$0.8259\,0911 \times 10^3$	$0.8264\,1699 \times 10^3$	
10	$0.1166\,7501 \times 10^4$	$0.1167\,4163 \times 10^4$	

〔**実験 2**〕

(7.2)　被近似関数；

$f(\boldsymbol{y})=(1+y_1+\cdots+y_\nu+y_1 \cdot \cdots \cdot y_\nu)^4$,

出力点；$\bar{\boldsymbol{y}}=(0.484375, \cdots, 0.484375)$,

目　的；$\nu=4, 5, \cdots, 10$ としたとき，誤差が $O(h^2)$ であるか，また，どのくらいの時間が必要であるかをみる．

結　果；**Table. 2** のとおりである．

8. おわりに

以上より，variation diminishing spline による多変数関数近似の有効な点が判明した．$2^{20}=4^{10} \fallingdotseq 10^6$ であり，10^6 個の data point についての四則計算は，7章の〔実験 2〕でみたとおり，現在の中型計算機でも大して困難ではないので，(6.1) は，関数値に関しては少なくとも 20 次元まで ($k=2$)，第1および第2階偏導関数値に関しては少なくとも 10 次元まで ($k=4$)，それらの近似式として十分実用に耐えられる．

次元数がもっと大きいとき（たとえば $\nu \geqq 21$ のとき），上のような tensor product 法による近似式で計算量を決定論的に減らすことは非常に困難である．あくまで決定論的立場に留まるならば，tensor product 法ではない何か新らしい近似法を考え出す必要があると思われる．これらは今後に残された大きな課題である．

参 考 文 献

1) I. J. Schoenberg: An variation diminishing approximation method, In "An Numerical Approximation" (R. E. Langer, ed.) pp. 249–274, Univ. of Wisconsin Press, (1959).
2) H. B. Curry and I. J. Schoenberg: On Pólya frequency functions IV: The fundamental spline functions and their limits, J. Analyse Math. pp. 71–107, (1966).
3) M. Marsden and I. J. Schoenberg: An variation diminishing spline approximation methods, Mathematica (Cluj) 31, pp. 61–82, (1966).
4) S. Karlin: Total Positivity Vol. 1, Stanford University Press, (1968).
5) W. J. Gordon: Distributive lattices and the approximation of multivariate functions, In "Approximation with Special Emphasis on Splines" (I. J. Schoenberg ed.) pp. 223–277, Academic Press, (1969).

6) T. Tsuda and K. Ichida: Nonlinear interpolation of multivariable functions by the Monte Carlo method, J. ACM pp. 420–425, (1970).
7) T. Tsuda: Numerical differentiation of functions of very many variables, Numer. Math. 18, pp. 327–335, (1972).
8) C. de Boor: An calculating with B-splines, J. Approximation Theory 6, pp. 50–62, (1972).
9) R. A. DeVore: The approximation of continuous functions by positive linear operators, Lecture notes in mathematics 293, Springer-Verlag, (1972).
10) C. de Boor and G. J. Fix: Spline approximation by quasiinterpolants, J. Approximation Theory 8, pp. 19–45, (1973).
11) T. Tsuda: Numerical integration of Functions of very many variables, Numer. Math. 20, pp. 377–391, (1973).
12) 市田浩三・清野　武: 多変数関数の補間について, 情報処理 14, No. 2, pp. 114–117, (1973).

(昭和 49 年 4 月 16 日受付)
(昭和 49 年 6 月 13 日再受付)