一般カメラモデルの PnP 問題に対するグレブナー基底を用いた統一的解法

中野　学† 　田治米純二† 　野村　俊之†

† 日本電気株式会社情報・メディアプロセッシング研究所　〒 211–8666 神奈川県川崎市中原区下沼部 1753
E-mail: †g-nakano@cq.jp.nec.com, ††tajime@ak.jp.nec.com, †††t-nomura@da.jp.nec.com

あらまし　本論文は，一般カメラモデルの PnP 問題に対するグレブナー基底を用いた統一的解法を提案する．提案解法の特徴は，PnP 問題を 3 変数の無制約最適化問題として定式化し，グレブナー基底を用いてすべての停留点を計算することである．目的関数の勾配である連立代数方程式は，$n \geqq 3$ で互いに独立であり，方程式中の項は 3 次元座標の分布により変化しない．そのため，提案解法は，$n = 3$ の場合は P3P 問題の複数解，$n \geqq 4$ の場合は大域的最適解が得られ，平面にも非平面にも適用可能な統一的解法である．また，提案解法の演算量は n 点の入力に対し $\mathcal{O}(n)$ である．$n = 100$ に対する平均実行時間は，内点法を用いる従来解法と比較して約 14 倍高速であることを実験により示す．

キーワード　PnP 問題，カメラ位置姿勢推定，グレブナー基底

1. はじめに

PnP 問題とは，ワールド座標系における n 点の 3 次元座標とそれらの点が観測された画像座標から，校正済カメラの位置姿勢を推定する問題である．PnP 問題は，コンピュータビジョンにおける重要な問題の 1 つであり，ロボットナビゲーション，AR などで利用されている．PnP 問題は，最少 $n = 3$ で解けることが知られている [1]–[3]．しかし，$n = 3$ では最大 4 つの解が存在し，一意に定められない．$n \geqq 4$ であれば，カメラと 3 次元座標が特殊な配置である場合を除き，解が一意に定められるため，様々な解法が提案されている [4]–[9]．Quan ら [4] は，P3P 解法を $n = 4$，$n = 5$ に拡張している．$n \geqq 6$ にも適用可能だが，n 点に対する演算量は $\mathcal{O}(n^5)$ である．Ansar ら [5] は，3 次元座標間の距離を表す 2 次多項式に基づく解法を提案している．Quan らよりも高精度だが，演算量は $\mathcal{O}(n^8)$ である．これらの解法の問題は，n 点に対する演算量が多いことである．そのため，Lepetit ら [6] は，カメラ座標系の基底ベクトルの基点座標を推定する $\mathcal{O}(n)$ の解法を提案している．しかし，係数行列の階数および 3 次元座標の分布が平面か非平面かに応じて異なる計算方法が必要である．Lu ら [7] は，Object Space Error（OSE）と呼ぶ誤差関数を定義することで，位置が姿勢を変数とする関数であることと，PnP 問題が姿勢を変数とする最適化問題（以下，姿勢最適化問題と呼ぶ）であることを示した．そして，位置と姿勢を交互に最適化することで，大域的収束性を持つ反復解法を提案している．ただし，局所最適解に陥ることが多いという欠点がある．Schweighofer ら [8] は，姿勢最適化問題の大域的最適解を得るため，2 乗和多項式緩和を用いる解法を提案している．Lepetit らよりも高精度だが，反復解法である内点法の演算量が多い．また，平面と非平面を区別する必要がある．Hmam ら [9] は，3 次元座標がカメラ前面に存在する拘束条件を Schweighofer らの解法に加えることで，平面と非平面を区別しない解法を提案している．半正定値緩和を用いることで Schweighofer らよりも約 2 倍高速だが，内点法による演算量の問題は解決していない．このように，従来の P4P 解法は，低演算量のためには条件に応じて異なる計算方法を必要とし，高精度な推定のためには非線形最適化や内点法などの反復解法を必要とする．また，大域的最適解を持つ $n \geqq 4$ と複数解を持つ $n = 3$ とを統一的に扱えない．

本論文では，グレブナー基底を用いた統一的解法を提案する．提案解法の特徴は，PnP 問題を 3 変数の無制約最適化問題として定式化し，グレブナー基底を用いてすべての停留点を計算することである．目的関数の勾配である連立代数方程式は，$n \geqq 3$ で互いに独立であり，方程式中の項は 3 次元座標の分布により変化しない．そのため，提案解法は，$n = 3$ の場合は P3P 問題の複数解，$n \geqq 4$ の場合は大域的最適解が得られ，平面にも非平面にも適用可能な統一的解法である．また，連立代数方程式の解を行列分解により得るため，反復解法を用いる従来解法よりも高速である．

2. 一般カメラモデルに対する PnP 問題

2.1 一般カメラモデル

一般カメラモデルとは，ステレオカメラや多焦点カメラを扱うための，透視投影モデルの拡張である．図 1 に，一般カメラモデルの例を示す．一般カメラモデルにおける 3 次元座標の射影は式 1 で表される．

$$\lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{R}\mathbf{X}_i + \mathbf{t} - \mathbf{c}_i \tag{1}$$

ここで，$\mathbf{R}$ はカメラ姿勢，$\mathbf{t}$ はカメラ位置，$\mathbf{X}_i$ は i 番目（$1 \leqq i \leqq n$）の 3 次元座標，$\mathbf{v}_i$ は画像座標，$\mathbf{c}_i$ はカ

メラ座標系における $\mathbf{v}_i$ の投影中心，λ_i は $\mathbf{X}_i$ への奥行きである．PnP 問題においては，$\mathbf{X}_i$，$\mathbf{v}_i$，$\mathbf{c}_i$ が既知で，$\mathbf{R}$，$\mathbf{t}$，λ_i が未知である．式 1 において，$\mathbf{c}_i = \mathbf{0}$ とすると，透視投影モデルとなる．

2.2 Object Space Error

一般カメラモデルに対する Object Space Error（OSE）を説明する．$\mathbf{X}_i$ と $\mathbf{v}_i$ が与えられたとき，式 1 の 2 乗誤差は式 2 で表される．

$$\|\lambda_i \mathbf{v}_i - (\mathbf{R}\mathbf{X}_i + \mathbf{t} - \mathbf{c}_i)\|^2 \tag{2}$$

式 2 を最小化するため，式 2 を λ_i で微分し，消去すると式 3 を得る．

$$e_i = \|\mathbf{V}_i(\mathbf{R}\mathbf{X}_i + \mathbf{t} - \mathbf{c}_i)\|^2 \tag{3}$$

ここで，$\mathbf{V}_i = \mathbf{I} - \dfrac{\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i^T}{\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i}$ である．

式 3 が OSE である．図 2 に示すように，OSE は，カメラ座標系において $\mathbf{X}_i$ を $\mathbf{v}_i$ へ射影したベクトルの L2 ノルムである．以上より，OSE による PnP 問題は式 4 で表される．

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{R},\,\mathbf{t}} \quad & e = \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{V}_i(\mathbf{R}\mathbf{X}_i + \mathbf{t} - \mathbf{c}_i)\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & \det(\mathbf{R}) = 1,\, \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I} \end{aligned} \tag{4}$$

2.3 PnP 問題の定式化

本節では，PnP 問題を姿勢最適化問題として定式化する．まず，式 4 を最小化する $\mathbf{t}_{opt}$を求めるため，式 4 を $\mathbf{t}$ で微分すると式 5 を得る．

$$\frac{\partial e}{\partial \mathbf{t}} = 2\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i(\mathbf{R}\mathbf{X}_i + \mathbf{t} - \mathbf{c}_i) = \mathbf{0} \tag{5}$$

式 5 より，$\mathbf{t}_{opt}$ は式 6 で表される．

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{opt} &= -\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i(\mathbf{R}\mathbf{X}_i - \mathbf{c}_i) \\ &= -\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i[\mathbf{A}_i|\mathbf{c}_i] \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

ここで，$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_i^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{X}_i^T \end{bmatrix}$，$\mathbf{R}$ の第 j 行を $\mathbf{r}_j$ として $\mathbf{r} = [\mathbf{r}_1^T, \mathbf{r}_2^T, \mathbf{r}_3^T]^T$ である．

次に，$\mathbf{t}_{opt}$ を式 4 に代入すると，式 7 を得る．

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{R}} \quad & \mathbf{r}^T\mathbf{M}_1\mathbf{r} + 2\mathbf{m}_2^T\mathbf{r} + m_3 \\ \text{s.t.} \quad & \det(\mathbf{R}) = 1,\, \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I} \end{aligned} \tag{7}$$

ここで，

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{m}_2 \\ \mathbf{m}_2^T & m_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} ([\mathbf{A}_i|\mathbf{c}_i] + \mathbf{B})^T \mathbf{V}_i([\mathbf{A}_i|\mathbf{c}_i] + \mathbf{B}) \tag{8}$$

である．

以上で，式 7 に示すように，PnP 問題が姿勢最適化問題として定式化された．

3. 提案解法

提案解法は，まず，正規化されていない四元数を用いて姿勢最適化問題を無制約化する．次に，グレブナー基底を用いて，制約なし姿勢最適化問題のすべての停留点を得る．最後に，停留点から大域的最適解を選択し，$\mathbf{R}$ と $\mathbf{t}$ を得る．

3.1 姿勢最適化問題の無制約化

正規化されていない四元数 $\mathbf{q} = [1, a, b, c]^T$ を用いると，$\mathbf{R}$ は式 9 で表される．

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2}\hat{\mathbf{R}} \tag{9}$$

ここで，

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 + a^2 - b^2 - c^2 & 2(ab - c) & 2(ac + b) \\ 2(ab + c) & 1 - a^2 + b^2 - c^2 & 2(bc - a) \\ 2(ac - b) & 2(bc + a) & 1 - a^2 - b^2 + c^2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

である．

次に，式 9 を式 1 に代入し，両辺を $\|\mathbf{q}\|^2$ 倍すると式 11 を得る．

$$\|\mathbf{q}\|^2\lambda_i\mathbf{v}_i = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{X}_i + \|\mathbf{q}\|^2(\mathbf{t} - \mathbf{c}_i) \tag{11}$$

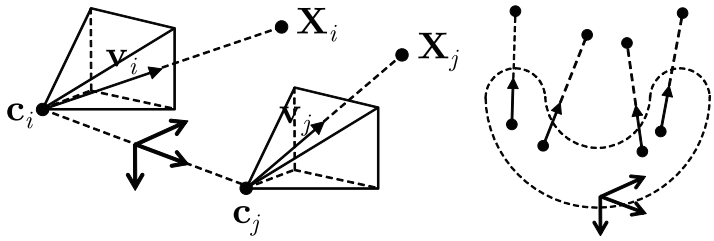
式 11 を用いて，2.3 節と同様に最適化問題を導出すると，式 12 を得る．

$$\min_{a,\,b,\,c} \quad \hat{\mathbf{r}}^T\mathbf{M}_1\hat{\mathbf{r}} + 2\|\mathbf{q}\|^2\mathbf{m}_2^T\hat{\mathbf{r}} + \|\mathbf{q}\|^4 m_3 \tag{12}$$

ここで，$\hat{\mathbf{R}}$ の第 j 行を $\hat{\mathbf{r}}_j$ として $\hat{\mathbf{r}} = [\hat{\mathbf{r}}_1^T, \hat{\mathbf{r}}_2^T, \hat{\mathbf{r}}_3^T]^T$ である．

以上より，姿勢最適化問題は，式 12 の制約なし非線形最適化問題に帰着する．

制約なし非線形最適化問題を解くには，停留点を求め，停留点が大域的最適解かどうかを調べればよい．停留点は，目的関数の勾配をゼロとした連立代数方程式の実数解である．式 12 の変数を $\mathbf{x} = [a, b, c]^T$，3×20 の係数行列を $\mathbf{N}$，20×1 の項ベクトルを $\mathbf{z} = [a^3, a^2b, ab^2, b^3, a^2c, abc, b^2c, ac^2, bc^2, c^3, a^2, ab, b^2, ac, bc, c^2, a, b, c, 1]^T$ とすると，連立代数方程式は式 13 で表される．



(a) ステレオカメラ　　(b) 多焦点カメラ

図 1　一般カメラモデルの例

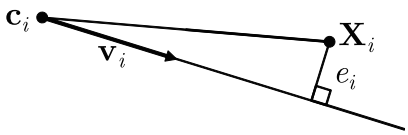


図 2　Object Space Error

$$\mathbf{Nz} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\mathbf{x}}^T \mathbf{M}_1\hat{\mathbf{r}} + 2\mathbf{m}_2^T\hat{\mathbf{r}}\mathbf{x} + \|\mathbf{q}\|^2\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\mathbf{x}}^T \mathbf{m}_2 + 2\|\mathbf{q}\|^2 m_3\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{13}$$

ここで，$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\mathbf{x}} = \left[\frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial a}, \frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial b}, \frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial c}\right]$ である．

式 13 は 3 個の 3 元 3 次式であり，次のような性質を持っている．まず，$\mathbf{z}$ の各項は，3 次元座標の分布やカメラモデルに依存しない．つまり，平面でも非平面でも $\mathbf{z}$ は変化しないし，$\mathbf{c}_i = \mathbf{0}$ の透視投影モデルでも $\mathbf{c}_i \neq \mathbf{0}$ の一般カメラモデルでも $\mathbf{z}$ は変化しない．変化するのは $\mathbf{N}$ のみである．次に，$n \geqq 3$ の場合，式 8 より $\mathrm{rank}(\mathbf{M}_1) \geqq 3$ となり，式 13 は互いに独立である．以上より，$n \geqq 3$ であれば，3 次元座標の分布とカメラモデルに関係なく式 13 は解ける．

3.2　グレブナー基底による停留点計算

式 13 を解くために，提案解法ではグレブナー基底を利用する．グレブナー基底とは，多変数の連立代数方程式を，等価でかつ解きやすい形に変換した多項式である [10].「等価」とは，グレブナー基底の解が元の連立代数方程式の解と一致することである．グレブナー基底が求まれば，任意の項に対する倍写像行列の固有値として解が得られる．グレブナー基底を求める一般的な方法として，Buchberger アルゴリズム，F4 アルゴリズムなどが知られている．3.1 節で述べた通り，$\mathbf{z}$ の各項は試行毎に変わらないため，提案解法では Kukelova ら [11] の手法を適用出来る．Kukelova らの手法は，グレブナー基底に現れる項を事前に求め，係数行列 $\mathbf{N}$ から倍写像行列を直接計算する．試行毎のグレブナー基底計算を省略するため，高速に解が得られる．Kukelova らの手法を式 13 に適用すると，89×116 行列のガウス・ジョルダン消去法と 27×27 倍写像行列の固有値分解に帰着する．解の数は，虚数解を含め全部で 27 個である．

3.3　大域的最適解の選択

以下 (1)〜(4) の処理を行い，3.2 節で得られた 27 個の解から $n = 3$ の複数解もしくは $n \geqq 4$ の大域的最適解を選択する．

（1） 虚数解はありえないため，実数解を抽出．
（2） 局所最適性を満たすため，式 12 のヘッセ行列が正定値である解を抽出．
（3） 式 13 は，カメラが 3 次元座標の方向を向くことを保証しないため，カメラ前面に 3 次元座標が存在する解を抽出．
（4） (1)〜(3) を満たす解の中で，
　i.　$n = 3$ の場合，すべての解を選択．
　ii.　$n \geqq 4$ の場合，式 12 を最小化する大域的最適解を選択．

選択された大域的最適解 $[a, b, c]$ を式 9 に代入して $\mathbf{R}$ が，$\mathbf{R}$ を式 6 に代入して $\mathbf{t}$ が得られる．

4.　実　　験

シミュレーション実験により，提案解法を評価した．まず，透視投影モデルにおいて P3P 問題の解が得られるか調べた．次に，一般カメラモデルにおける位置姿勢推定誤差と演算量を評価した．比較する各解法について，以下の略称を用いる．

UPnP	提案解法（Unified PnP solution）
SDP+CG	Hmam ら [9] による，内点法を初期値として共役勾配法による非線形最適化を行う解法
FB	Fischer ら [2] による P3P 解法

プログラムは，すべて MATLAB R2011a で実装および実行した．FB は筆者らが実装した．SDP+CG は，透視投影モデルに対応するコードを Hmam より提供していただき，それを筆者らが一般カメラモデルに拡張した．SDP+CG で用いる内点法のソルバーは，SeDuMi 1.3(注1) を用いた．PC の構成は，Windows XP SP3，Core2 Duo E8500 (3.16GHz)，メモリ 2GB である．

カメラの内部パラメータ $\mathbf{K}$ は，画像中心 [320, 240]，焦点距離 800 とした．画像サイズは 640×480 である．シミュレーションデータは次のように生成した．まず，原点から 6 離れた球上において，異なるランダムな位置に 2 つのカメラを設定する．次に，$[-2, 2] \times [-2, 2] \times [-2$

（注1）：SeDuMi 1.3: http://sedumi.ie.lehigh.edu/

, 2] の範囲内で一様分布する 3 次元座標 $\mathbf{X}_i$ を n 点生成し，カメラに射影する．シミュレーション環境を図 3 に示す．射影された座標 $\mathbf{u}_i$ に標準偏差 σ のガウスノイズを加え，画像座標 $\mathbf{v}_i = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{u}_i + N(0,\sigma^2))$ とした．3 次元座標が平面の場合，$[-2, 2] \times [-2, 2] \times [-2, 2]$ の範囲内で，$z = 0$ の平面上の一様分布する点を生成した．

真値 $\mathbf{R}_{true}$，$\mathbf{t}_{true}$ に対する推定値 $\mathbf{R}_{est}$，$\mathbf{t}_{est}$ の誤差を式 14 で評価する．

$$rotation_error(\%) = \frac{\|\mathbf{q}_{true} - \mathbf{q}_{est}\|}{\|\mathbf{q}_{true}\|} \times 100$$
$$translation_error(\%) = \frac{\|\mathbf{t}_{true} - \mathbf{t}_{est}\|}{\|\mathbf{t}_{true}\|} \times 100 \quad (14)$$

ここで，$\mathbf{q}_{true}$ と $\mathbf{q}_{est}$ は，それぞれ $\mathbf{R}_{true}$ と $\mathbf{R}_{est}$ から計算した正規化四元数（$\|\mathbf{q}\| = 1$）である．

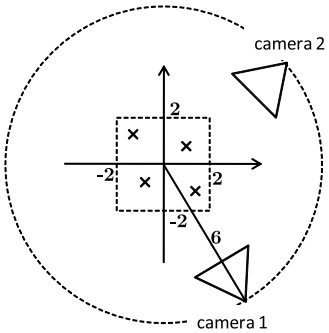


図 3　シミュレーション環境

4.1　$n = 3$，透視投影モデルに対する位置姿勢推定誤差

透視投影モデル，$n = 3$ として UPnP を評価し，P3P 問題の解が得られるか実験した．複数解が得られた場合，真値との誤差が最も小さい解を $\mathbf{q}_{est}$，$\mathbf{t}_{est}$ とした．ノイズの標準偏差は $1.0 \leqq \sigma \leqq 10.0$，試行回数は 500 回である．誤差分布を図 4 に示す．プロットには箱ひげ図(注2)を用いた．横軸は σ を表し，縦軸は誤差を対数により表現した．

図 4 より，外れ値を含め，解の誤差分布は FB と UPnP でほぼ同じである．これにより，UPnP により P3P 問題が解け，従来解法と同等精度を持つことが示された．

4.2　$n \geqq 4$，一般カメラモデルに対する位置姿勢推定誤差

一般カメラモデルに対する UPnP の位置姿勢推定誤差を調べた．非平面と平面のそれぞれに対し，$n = 4$，$n = 50$ の場合について実験した．ノイズの標準偏差，試行回数は 4.1 節と同様である．非平面の誤差分布を図 5 – 6 に，平面の誤差分布を図 7 – 8 に示す．

非平面，平面ともに，UPnP は SDP+CG に近い精度が得られている．しかし，UPnP は SDP+CG よりも外れ値が多い．外れ値となった $[a, b, c]$ を調べると，$\mathbf{Nz} \approx \mathbf{0}$ とならなかった．これは，行列分解でノイズが増幅され，解の精度が落ちたためと考えられる．また，正規化しない四元数を用いて回転行列を表現するには，無限大，無限小を扱う必要がある．しかし，UPnP では，式 11 にあるように，無限を扱わないことを前提としている．そのため，$[a, b, c]$ のいずれかが巨大な値になる場合，数値計算が不安定になる可能性がある．

4.3　演　算　量

非平面，$\sigma = 2$ に対して演算量を評価した．点数は $4 \leqq n \leqq 1000$，試行回数は 100 回である．平均実行時間を図 9 に示す．横軸は n，縦軸は実行時間（単位：ミリ秒）を表す．

すべての n において，SDP+CG と比較して UPnP が低演算量である．$n = 100$ における平均実行時間は，UPnP が 8.36 ミリ秒，SDP+CG が 110.1 ミリ秒であり，約 14 倍高速である．最も高速なのは，$n = 4$ における約 100 倍である．ここまで差異が生じるのは，SDP+CG は反復解法であるため，$n = 4$ と $n = 5$ では一時的に局所最適解に近付き，演算量が増加するためである [8]．UPnP はすべての局所最適解から大域的最適解を選択するため，そのようなことは起きない．UPnP の演算量は，完全に $\mathcal{O}(n)$ である．

5.　お わ り に

本論文は，一般カメラモデルの PnP 問題に対するグレブナー基底を用いた統一的解法を提案した．提案解法は，無制約化した姿勢最適化問題の停留点をグレブナー基底を用いて計算し，大域的最適解を選択する．実験により，$n = 3$ の場合は P3P 問題の複数解，$n \geqq 4$ の場合は大域的最適解が得られ，平面にも非平面にも適用可能であることを示した．また，$n = 100$ に対する平均実行時間は，内点法を用いる従来解法と比較して約 14 倍高速であることを示した．今後の課題は，ノイズによる計算の不安定性を解消することである．

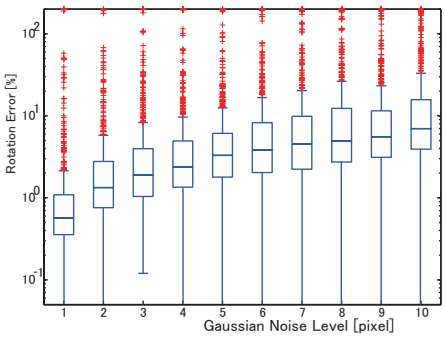
(注2)：箱の上端，下端はそれぞれ第 3 四分位点（Q_3），第 1 四分位点（Q_1）を表し，箱中の − は第 2 四分位点（中央値）を表す．上下のひげはそれぞれ $Q_3 + 1.5(Q_3 - Q_1)$，$Q_1 - 1.5(Q_3 - Q_1)$ を表し，ひげの外にある + は外れ値を表す．

文　　献

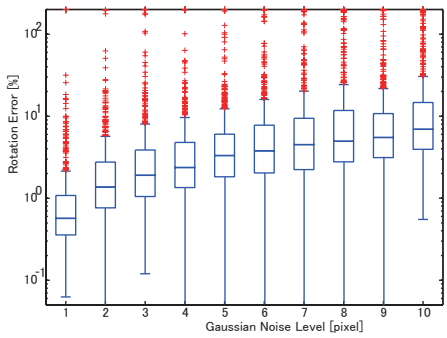
[1] J.A. Grunert, ”Das pothenotische problem in erweiterter gestalt nebst bber seine anwendungen in der geodasie, ” Grunerts Archiv fur Mathematik und Physik, pp. 238–248, 1841.

[2] M. A. Fischler and R. C. Bolles, ”Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography, ” Proc. of Communications. ACM, pp. 381–395, 1981.

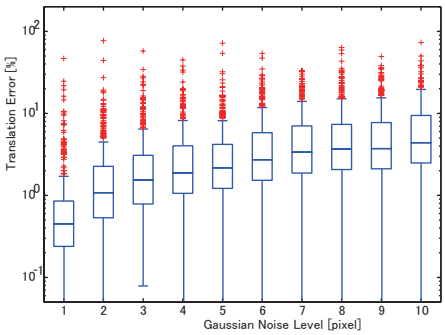
[3] R. M. Haralick, C.-N. Lee, K. Ottenberg and M.



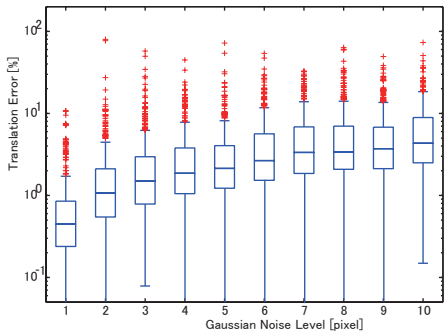
(a) Rotation Error of FB



(b) Rotation Error of UPnP

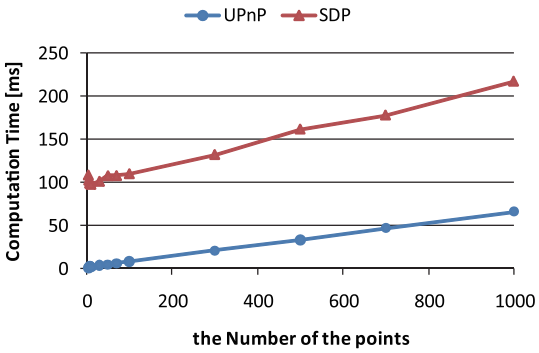


(c) Translation Error of FB



(d) Translation Error of UPnP

図 4　n=3，透視投影モデルにおける FB と UPnP の誤差分布



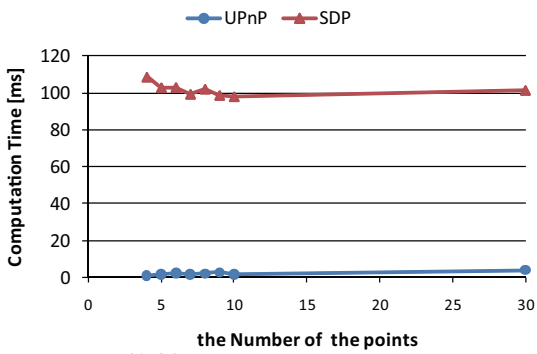


図 9　平均実行時間（右図は $4 \leqq n \leqq 30$ の拡大）

Nolle, "Review and analysis of solutions of the three point perspective pose estimation problem, " Int'l J. Computer Vision, vol. 13, no. 3, pp. 331–356, 1994.

[4] L. Quan and Z. Lan, "Linear n-point camera pose determination, " IEEE Trans. on PAMI, vol. 21, no. 8, pp. 774–780, 1999.

[5] A. Ansar and K. Daniilidis, "Linear pose estimation from points or lines, " IEEE Trans on. PAMI, vol. 25, no. 5, pp. 578–589, 2003.

[6] V. Lepetit, F. Moreno - noguer and P. Fua, "EPnP: An Accurate $\mathcal{O}(n)$ Solution to the PnP Problem, " Int'l J. Computer Vision, vol. 81, no. 2, pp. 155–166, 2009.

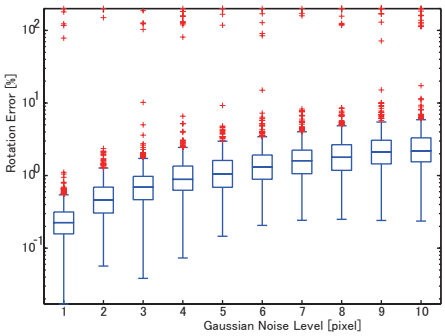
[7] C.-P. Lu, G. D. Hager and E. Mjolsness, "Fast and globally convergent pose estimation from video images, " IEEE Trans on. PAMI, vol. 22, no. 6, pp. 610–622, 2000.

[8] G. Schweighofer and A. Pinz, "Globally Optimal $\mathcal{O}(n)$ Solution to the PnP Problem for General Camera Models, " Proc. of BMVC '08, Leeds, UK, Sept. 2008.

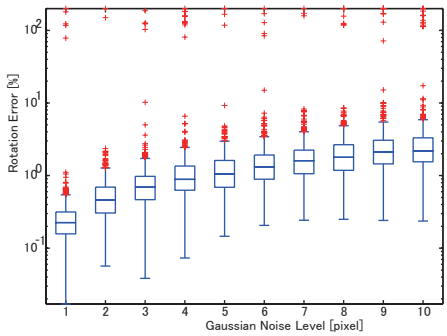
[9] H. Hmam and J. Kim, "Optimal non-iterative pose estimation via convex relaxation, " Int'l J. Image and Vision Computing, vol. 28, no. 11, pp. 1515–1523, 2010.

[10] 野呂正之，横山和弘，グレブナー基底の計算　基礎編，東京大学出版会，東京，2008.

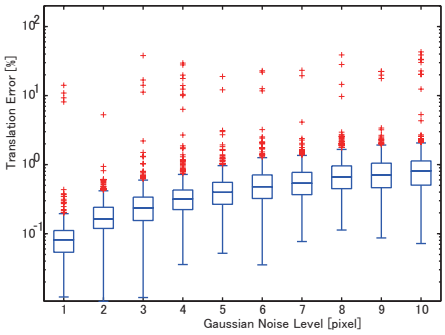
[11] Z. Kukelova, M. Bujnak and T. Pajdla, "Automatic Generator of Minimal Problem Solvers, " Proc. of ECCV '08, pp. 302–315, Marseille, France, 2008.



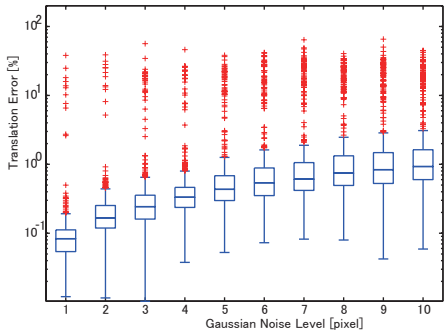
(a) Rotation Error of SDP+CG



(b) Rotation Error of UPnP

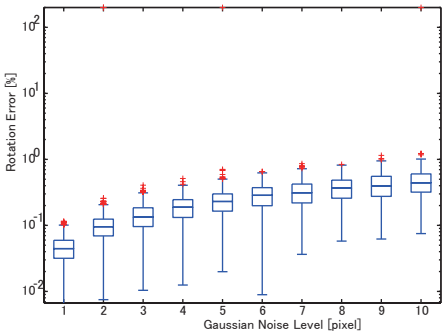


(c) Translation Error of SDP+CG

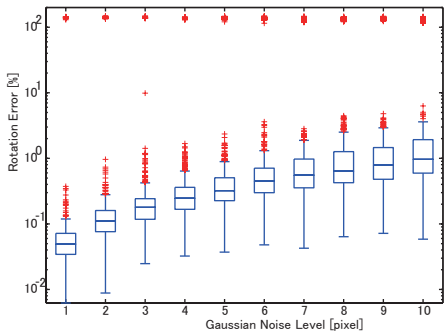


(d) Translation Error of UPnP

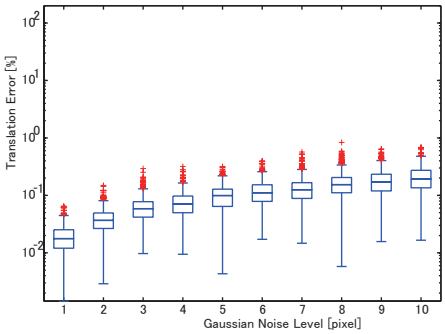
図 5　一般カメラモデル，n=4，非平面に対する SDP+CG と UPnP の誤差分布



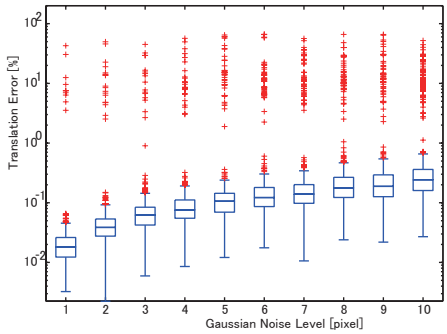
(a) Rotation Error of SDP+CG



(b) Rotation Error of UPnP

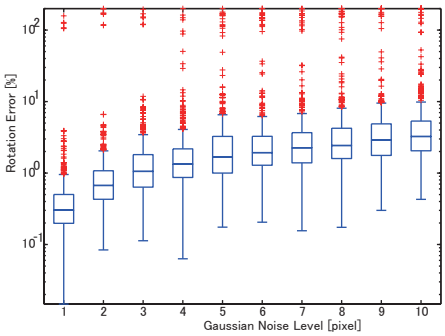


(c) Translation Error of SDP+CG

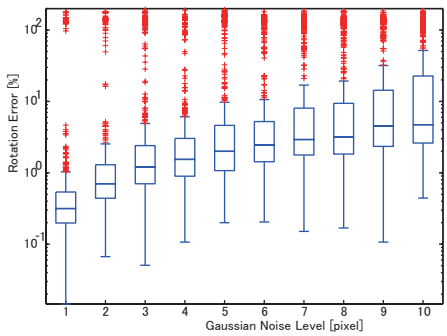


(d) Translation Error of UPnP

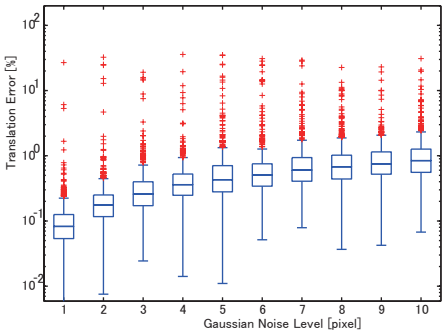
図 6　一般カメラモデル，n=50，非平面に対する SDP+CG と UPnP の誤差分布



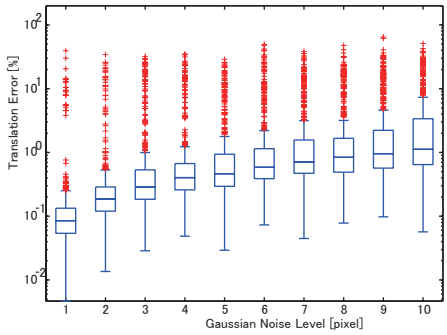
(a) Rotation Error of SDP+CG



(b) Rotation Error of UPnP

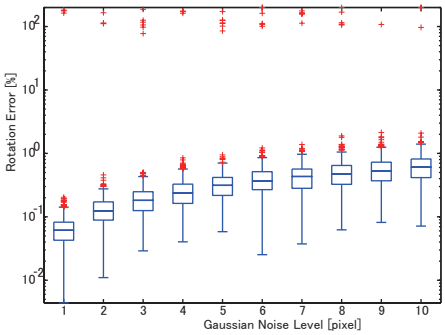


(c) Translation Error of SDP+CG

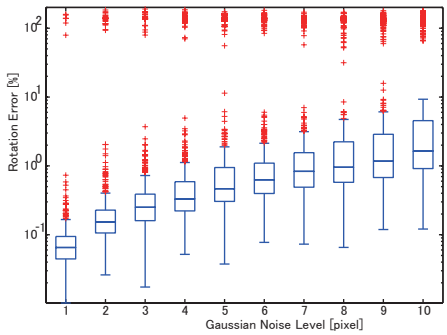


(d) Translation Error of UPnP

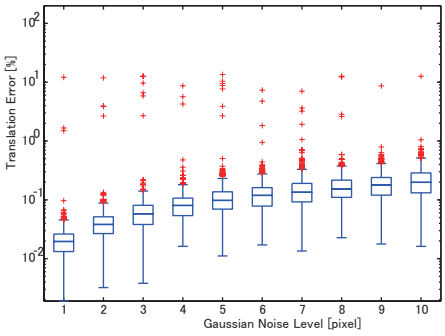
図 7　一般カメラモデル，n=4，平面に対する SDP+CG と UPnP の誤差分布



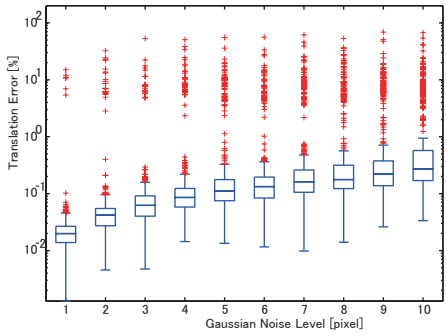
(a) Rotation Error of SDP+CG



(b) Rotation Error of UPnP



(c) Translation Error of SDP+CG



(d) Translation Error of UPnP

図 8　一般カメラモデル，n=50，平面に対する SDP+CG と UPnP の誤差分布