

## ポートフォリオ構築問題における時系列予測モデルの活用

猪瀬 悟 史<sup>†1</sup>    鈴木 智 也<sup>†1</sup>

マーコビッツのポートフォリオ理論では、過去の収益率変動に基づいて期待分布を作成し、その平均値と標準偏差によって期待収益率とリスクを推定している。しかし実際の経済市場は複雑であるため、平均値を将来値とするような極めて単純な予測モデルが実用的であるとは考え難い。そこで本研究は、より詳細な時系列予測モデルによって得られた予測値を期待収益率とみなすことで、推定精度の向上を実現した。しかし期待収益率の推定方法の変更により、リスクを再定義する必要が生じたため、本研究では時系列予測モデルの誤差をリスクとみなした。この有用性を検証すべく、実データを用いた投資シミュレーションを行った結果、従来のポートフォリオ理論よりも高収益かつ低リスクな投資を実現できたので報告する。

## Portfolio Selection Based on Financial Time Series Prediction

SATOSHI INOSE<sup>†1</sup> and TOMOYA SUZUKI<sup>†1</sup>

Markowitz's portfolio selection estimates a future return by the mean value of historical price movements, and estimates a risk by the standard deviation of them. From the viewpoint of time-series prediction, this estimation of a future return is considered as too simple to predict real financial markets, which are so complex that simple predictions like moving-average model must be insufficient. For this reason, we prefer advanced prediction models to improve the estimation accuracy of future returns. However, we have to redefine the risk in the portfolio theory if we change how to estimate future returns; thereby, our portfolio method regards the risk as the possibility of prediction errors. To confirm the validity of our method through investment simulations with real stock prices, we demonstrate that our method can realize higher profits and lower risk than the previous portfolio theory.

### 1. はじめに

マーコビッツのポートフォリオ理論<sup>1)</sup>によって分散投資の有用性が示され、組合せ比率を調整することで投資に伴うリスクを最小化することができる。この理論においては、将来に最も実現しうる収益率を期待収益率、その期待が外れる危険性をリスクとしており、これらを収益率の確率分布から推定する必要がある。しかし将来の確率分布を知ることは不可能であるため、過去の収益率変動による経験的な標本分布で代用することで、その平均値を期待収益率、標準偏差をリスクと定義している<sup>1),2)</sup>。しかしこの操作は、単純移動平均という0次統計量に基づいた予測モデルによって複雑な経済市場を予測することに相当する。つまり現実的な予測モデルとして機能しない可能性があるため、せめて1次統計量に基づいた自己回帰予測モデルや、より高次の非線形予測モデルによって期待収益率を推定すべきであろう。しかし従来の期待収益率の定義と異なるため、リスクの定義も改めねばならない。

そこで本研究ではまず、収益率をどの程度予測できるのかを検証すべく、移動平均予測および他の時系列予測モデルを用いて、収益率の予測精度を比較する(3章)。次に、時系列予測モデルの予測値を期待収益率とするには、リスクの評価式を変更する必要があるため、過去の予測誤差によってリスクを評価できるように、従来のポートフォリオ理論を拡張解釈する(4章)。この妥当性を検証すべく、実際の株価収益率データを用いて投資シミュレーションを行い、運用成績の観点から従来手法との比較を行う(5章)。さらに運用成績向上の工夫として、ポートフォリオに採用する投資銘柄の選択法について議論する(6章)。

### 2. ポートフォリオ理論の概要

時刻  $t$  における投資対象銘柄  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) の取引価格を  $x_i(t)$  とすると、その時の収益率  $r_i(t)$  は

$$r_i(t) = \frac{x_i(t) - x_i(t-1)}{x_i(t-1)} \quad (1)$$

として算出される。未知である時刻  $t+1$  における収益率が  $r_i^{(k)}(t+1)$  となる確率を  $P_i^{(k)}$  とすると (ただし  $\sum_{k=1}^K P_i^{(k)} = 1$ )、期待収益率  $\tilde{r}_i(t+1)$  とその分散値  $\tilde{\sigma}_i^2(t+1)$  は次のように書ける。

<sup>†1</sup> 茨城大学工学部知能システム工学科

Department of Intelligent Systems Engineering, College of Engineering, Ibaraki University

$$\tilde{r}_i(t+1) = \sum_{k=1}^K P_i^{(k)} r_i^{(k)}(t+1) \quad (2)$$

$$\tilde{\sigma}_i^2(t+1) = \sum_{k=1}^K P_i^{(k)} \left[ r_i^{(k)}(t+1) - \tilde{r}_i(t+1) \right]^2 \quad (3)$$

ポートフォリオ理論では、式 (3) における標準偏差  $\tilde{\sigma}$  をリスクと呼んでいる<sup>1),2)</sup>。

さらに、組合せ比率  $\{d_i\}$  でポートフォリオを組むとき (ただし  $\sum_{i=1}^N d_i = 1$ )、ポートフォリオの期待収益率  $\tilde{r}_p(t+1)$  とその分散値  $\tilde{\sigma}_p^2(t+1)$  は次のように書ける。

$$\tilde{r}_p(t+1) = \sum_{i=1}^N d_i \tilde{r}_i(t+1) \quad (4)$$

$$\tilde{\sigma}_p^2(t+1) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_i d_j \tilde{\sigma}_{ij}(t+1) \quad (5)$$

ここで  $\tilde{\sigma}_{ij}(t+1)$  は共分散であり、以下で得られる。

$$\tilde{\sigma}_{ij}(t+1) = \sum_{k=1}^K P_{ij}^{(k)} \left[ r_i^{(k)}(t+1) - \tilde{r}_i(t+1) \right] \left[ r_j^{(k)}(t+1) - \tilde{r}_j(t+1) \right] \quad (6)$$

$P_{ij}^{(k)}$  は、時刻  $t+1$  において、 $r_i^{(k)}(t+1)$  かつ  $r_j^{(k)}(t+1)$  となる確率である。

ただし、これまでに登場した  $P_i^{(k)}$ ,  $P_{ij}^{(k)}$ ,  $r_i^{(k)}(t+1)$  および  $r_j^{(k)}(t+1)$  は未知なので、過去の収益率変動の標本分布を、将来の確率分布と見立てて推定される<sup>2)</sup>。つまり、式 (2), (3), (6) を以下のように書き換える。

$$\begin{aligned} \tilde{r}_i(t+1) &= \bar{r}_i(t) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{a=0}^{T-1} r_i(t-a) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i^2(t+1) &= \sigma_i^2(t) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{a=0}^{T-1} [r_i(t-a) - \bar{r}_i(t)]^2 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij}(t+1) &= \sigma_{ij}(t) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{a=0}^{T-1} [r_i(t-a) - \bar{r}_i(t)][r_j(t-a) - \bar{r}_j(t)] \end{aligned} \quad (9)$$

ここで  $T$  は参照する過去のデータ長である。これらを式 (4)(5) に代入することで、

$$\tilde{r}_p(t+1) = \sum_{i=1}^N d_i \bar{r}_i(t) \quad (10)$$

$$\tilde{\sigma}_p^2(t+1) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_i d_j \sigma_{ij}(t) \quad (11)$$

によって、将来時刻  $t+1$  におけるポートフォリオの期待収益率およびリスクを算出することができる。さらに、期待収益率  $\tilde{r}_p(t+1)$  を最大に、リスク  $\tilde{\sigma}_p(t+1)$  を最小にする組合せ比率  $\{d_i\}$  を採用することで、合理的な投資を行うことができる。本研究では一般的な指標として、シャープレシオ<sup>3)</sup>  $S_r$  を導入し、

$$S_r = \frac{|\tilde{r}_p|}{\tilde{\sigma}_p} \quad (12)$$

を最大にする組合せ比率  $\{d_i\}$  を採用する。なお  $\tilde{r}_p < 0$  の時は、空売りを行うことで期待収益率の符号を反転できる。

### 3. 時系列予測モデルの有用性

前章のポートフォリオ理論は式 (7) の期待収益率  $\tilde{r}_i(t+1)$  の推定において、移動平均予測を行っているのみとみなすことができる。確かに、価格変動が強いトレンドを有している場合においては有効であろう。しかし、実際の市場の振舞いは複雑であり、同一のトレンドが長期間維持し続けることは稀である。したがって、トレンドの転換に柔軟に対応するには、短期的に期待収益率  $\tilde{r}_p(t+1)$  やリスク  $\tilde{\sigma}_p(t+1)$  を再計算し、ポートフォリオを修正する必要がある。そこで本研究では、移動平均予測よりも緻密な時系列予測モデルを利用したい。

例えば、0 次近似式である移動平均予測を 1 次近似式に拡張すると、自己回帰予測モデルになる。この予測モデルを適用すれば、

$$\tilde{r}_i(t+1) = \sum_{a=0}^{T-1} \beta_a r_i(t-a) + \beta_T \quad (13)$$

によって式 (7) の期待収益率を計算できる。モデル係数  $\beta_a$  ( $a = 0, 1, \dots, T$ ) の推定には、過去  $L$  期分の時系列変動  $\{r_i(t), r_i(t-1), \dots, r_i(t-L+1)\}$  を学習データとして、最小二乗法を適用する。このように全学習データを 1 つの回帰直線で近似するので、自己回帰予測モデルは線形予測として分類される。一方、移動平均予測では、式 (13) 中の傾き  $\beta_a$  を全

て 0 とし、切片  $\beta_T$  のみを移動平均値 (式 (7)) によって推定している。

次に、より一般化した予測モデルとして非線形予測モデルを適用する。非線形予測では、まず式 (13) における入力系列  $\{r_i(t-a) \mid 0 \leq a \leq T-1\}$  を  $T$  次元ベクトルとみなし、全学習データの中から  $\epsilon[\%]$  分の近傍ベクトルを選出する。本研究では、この  $\epsilon$  を近傍率と呼ぶ。これらの近傍情報の時間発展に基づいてモデル係数  $\beta_a$  を推定する。つまり入力系列 (収益率の変動パターン) に応じて回帰直線の傾きが異なるため、大域的には曲面によって学習データの時間発展を近似する。このような局所線形近似法によって自己回帰予測モデルを非線形モデルに拡張したものを、非線形自己回帰予測モデル<sup>4)</sup>と呼ぶ。

予測誤差の算出には、次式の正規化平均二乗誤差  $E$  を用いる。

$$E = \left[ \frac{\langle (r - \hat{r})^2 \rangle}{\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

ここで  $r$  を真値の時系列データ、 $\hat{r}$  を予測値の時系列データとする。また  $\langle \cdot \rangle$  は平均を表す。学習データに対して求めた当てはめ誤差を予測モデルの尤度  $\eta_i$ 、学習データ以降の未知データに対して予測を行った場合の誤差  $E$  を予測誤差  $\xi_i$  として明示的に区別する。

なお本研究では、予測モデルの過学習による汎化能力の低下を防ぐために交差確認法<sup>5),6)</sup>を適用し、モデルパラメータである近傍率  $\epsilon$  を設定した。予測モデルの尤度を最良にする  $\epsilon$  を最適パラメータ  $\epsilon^*$  として採用したとき、 $\epsilon^* = 100[\%]$  となれば近傍を考慮せず大域的に係数推定を行うため、非線形予測モデルは線形予測と等価になる。さらに係数  $\beta_T$  以外を 0 にすれば移動平均予測に帰着する。つまり非線形予測モデルは、線形予測と移動平均予測を内包している。

以上のように近傍率  $\epsilon$  を最適化し、新規データに対する予測誤差  $\xi$  を求めた例を図 1 に示す。なお、野村ホールディングス (株) の場合である。このデータは本研究を通じて使用する、東証一部上場企業 200 銘柄の日次株価データ<sup>7)</sup> の 1 銘柄であり、この始値  $x_i(t)$  を式 (1) の収益率  $r_i(t)$  に変換して計算に用いている。図 1 中の予測モデルの尤度  $\eta$  は、2000 年 4 月 7 日以前の約 5 年間 (土日祝日を除く 1250 日分の営業日) の学習データ ( $L = 1250$ ) に対する当てはめ誤差であり、予測誤差  $\xi$  の算出には、それ以降の約 5 年間の評価データ (1250 日分) を用いた。

図 1 によれば、モデルの汎化能力を向上すべく交差確認法を使用した<sup>6)</sup>が、最良尤度  $\min\{\eta\}$  によって推定された  $\epsilon^*$  は、その後の予測誤差  $\xi$  を最小化できるとは限らない。このように非線形予測モデルのパラメータ最適化は容易ではないが、しかし  $\eta(\epsilon^*) < \eta(10^2)$  および

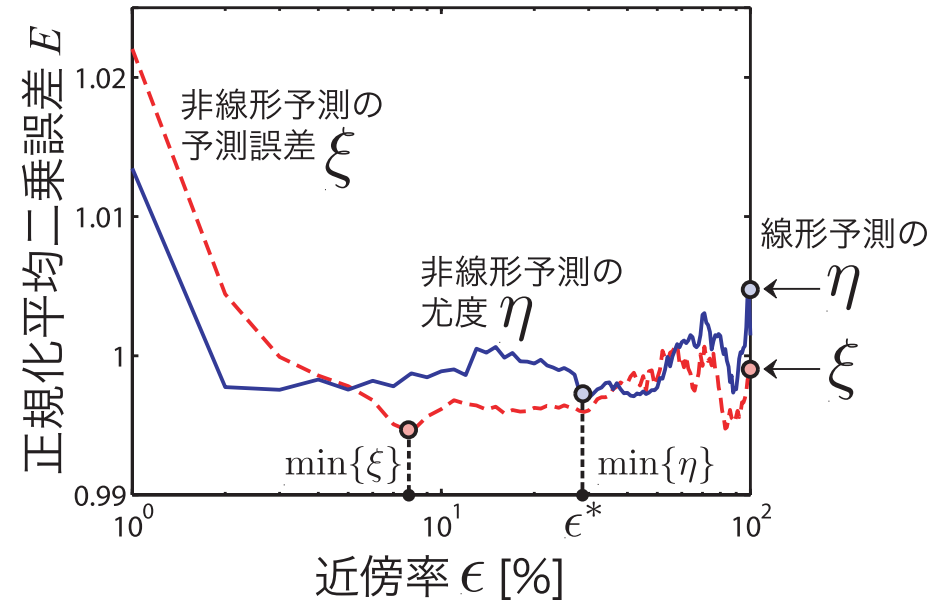


図 1 実データに対する予測モデルの尤度  $\eta$  と予測誤差  $\xi$ 。近傍率  $\epsilon = 10^2$  の非線形予測は線形予測と等価である。なお、移動平均予測の予測誤差は  $\xi = 1.11$  (欄外) である。

表 1 各予測法による株価データ (200 銘柄) の予測誤差  $\{\xi_i\}$ 。各項目には、左から  $T = 5$  (1 週間),  $T = 10$  (2 週間),  $T = 20$  (1ヶ月間) の結果を示す。なお  $\bar{\xi}$  は平均値,  $\sigma_\xi$  は標準偏差である。太字の数値は、各予測法における最良値を示す。

|                 | 移動平均予測  |          |              | 線形予測         |          |              | 非線形予測        |              |          |
|-----------------|---------|----------|--------------|--------------|----------|--------------|--------------|--------------|----------|
|                 | $T = 5$ | $T = 10$ | $T = 20$     | $T = 5$      | $T = 10$ | $T = 20$     | $T = 5$      | $T = 10$     | $T = 20$ |
| $\bar{\xi}$     | 1.103   | 1.048    | <b>1.026</b> | <b>1.001</b> | 1.003    | 1.009        | <b>1.001</b> | 1.003        | 1.006    |
| $\sigma_\xi$    | 0.008   | 0.005    | <b>0.003</b> | <b>0.007</b> | 0.007    | 0.007        | <b>0.005</b> | 0.006        | 0.007    |
| $\max\{\xi_i\}$ | 1.130   | 1.059    | <b>1.034</b> | 1.011        | 1.018    | <b>1.003</b> | <b>1.018</b> | 1.022        | 1.036    |
| $\min\{\xi_i\}$ | 1.078   | 1.033    | <b>1.018</b> | <b>0.974</b> | 0.975    | 0.982        | 0.979        | <b>0.975</b> | 0.994    |

$\xi(\epsilon^*) < \xi(10^2)$  であるため、非線形予測は線形予測 ( $\epsilon = 10^2$ ) に比べてわずかに有用だといえる。さらに先述のとおり、移動平均予測は短期の予測に不向きであり、予測誤差は最も大きい。

表 1 に、野村ホールディングス (株) を含めた全 200 銘柄<sup>7)</sup> に対する予測結果をまとめる。

非線形予測を用いても平均値  $\bar{\xi}$  はほぼ 1 であることは平均値程度の予測しかできていないことを意味する。しかし、予測不可能なランダム現象だと考えられている経済データ<sup>8)</sup>において僅かでも  $E < 1$  を実現することは、実際の投資において十分な利益を生み出すかもしれない。また、線形予測と非線形予測の結果はほぼ同じであり、図 1 のように非線形予測が優位となる銘柄ばかりではない。だが移動平均予測と比較すれば、高次予測モデルの優位性は明らかである。予測モデルの次数  $T$  については、線形予測および非線形予測は  $T = 5$  で充分であるが、移動平均予測は  $T = 20$  の長期データを必要とする。以後、これらの  $T$  を各予測モデルに用いる。

#### 4. ポートフォリオ理論の拡張

前章の時系列予測モデルをポートフォリオ理論に用いるには、従来の式 (7) ~ (9) を書換える必要がある。そこで、これらの原形である式 (2), (3), (6) に戻って再考する。

式 (2) によれば、期待収益率  $\tilde{r}_i(t+1)$  はまさしく最も出現確率が高い将来値であるので、各予測モデルから得られた予測値を割当てれば良い。従来の式 (7) を移動平均予測と捉えれば、この考え方は従来と変わっていない。予測値を式 (7) に代入すれば、ポートフォリオの期待収益率  $\tilde{r}_p(t+1)$  を推定できる。

さらに式 (3) では、予測誤差の期待値をリスク  $\tilde{\sigma}_i^2(t+1)$  としている。そこで、式 (3) 中の予測誤差  $r_i^{(k)}(t+1) - \tilde{r}_i(t+1)$  を  $\sigma_i^{(k)}(t+1)$  と書くと、

$$\tilde{\sigma}_i^2(t+1) = \sum_{k=1}^K P_i^{(k)} \left[ \sigma_i^{(k)}(t+1) \right]^2 \quad (15)$$

となる。しかし、従来のポートフォリオ理論と同様に、 $P_i^{(k)}$  および  $\sigma_i^{(k)}(t+1)$  は未知なので、過去の経験的な標本分布に基づいて推定することにする。つまり、過去の予測誤差  $r_i(t') - \tilde{r}_i(t')$  ( $t' \leq t$ ) を記録しておき、

$$\tilde{\sigma}_i^2(t+1) = \frac{1}{T} \sum_{a=0}^{T-1} [r_i(t-a) - \tilde{r}_i(t-a)]^2 \quad (16)$$

に代入することでリスク  $\tilde{\sigma}_i^2(t+1)$  を推定する。なお従来のポートフォリオ理論では、式 (3) から式 (8) の変形において、 $\sigma_i^{(k)}(t+1)$  中の  $r_i^{(k)}(t+1)$  のみをヒストリカルデータで代用している。しかし本研究のように予測を陽に想定する場合、リスクの本質は予測誤差であるので、あえて  $\sigma_i^{(k)}(t+1)$  全体を過去の予測誤差に基づいて推定する。

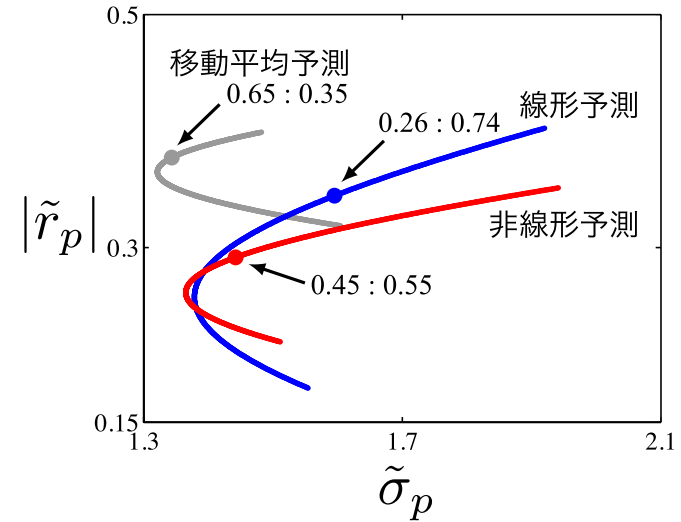


図 2 各予測法によって導出されるポートフォリオ曲線と、 $\max\{S_r\}$  を実現する組合せ比率。各曲線上の丸印で  $\max\{S_r\}$  となり、その組合せ比率 ( $d_1 : d_2$ ) を図中に示す。

なお、式 (6) の共分散についても同様に、

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij}(t+1) &= \sum_{k=1}^K P_{ij}^{(k)} \sigma_i^{(k)}(t+1) \sigma_j^{(k)}(t+1) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{a=0}^{T-1} [r_i(t-a) - \tilde{r}_i(t-a)][r_j(t-a) - \tilde{r}_j(t-a)] \end{aligned} \quad (17)$$

とする。これを式 (5) に代入すれば、ポートフォリオのリスク  $\tilde{\sigma}_p^2(t+1)$  を推定できる。このように本手法は、経験的な予測誤差が得られれば良いので、前章で述べた予測モデルに限らず、いかなる予測モデルに対しても適用可能である。

図 2 に、実データ 2 銘柄を用いて算出したポートフォリオ曲線の例を示す。日本水産 (株) と帝国石油 (株) を用いた場合である。式 (5) の  $\tilde{\sigma}_p^2(t+1)$  中の  $\tilde{\sigma}_{ij}(t+1)$  については、線形予測および非線形予測では式 (17)、移動平均予測では式 (9) を用いている。なお、いずれの予測においても  $\tilde{r}_p(t+1)$  には予測値を用いた。予測モデルを変えれば期待収益率 (= 予測値) とリスク (= 予測誤差) は変化するので、描かれるポートフォリオ曲線も変化してい

表 2 全 200 銘柄に対する投資シミュレーション結果．それぞれの予測法における，資産の増加率  $\lambda$  に関する統計量を示す．太字の数値は，各項目の最良値を示す．

|                    | 1 銘柄を保持      | 移動平均予測  | 線形予測           | 非線形予測          |
|--------------------|--------------|---------|----------------|----------------|
| $\bar{\lambda}$    | 1.203        | 0.890   | <b>5.887</b>   | 5.753          |
| $\sigma_{\lambda}$ | <b>0.690</b> | 0.932   | 9.127          | 10.553         |
| $\max\{\lambda\}$  | 4.591        | 16.026  | 259.751        | <b>517.006</b> |
| $\min\{\lambda\}$  | <b>0.176</b> | 0.041   | 0.079          | 0.055          |
| 元本割れ率              | 42.3[%]      | 72.0[%] | <b>15.6[%]</b> | 18.0[%]        |

る．また，式 (12) のシャープレシオ  $S_r$  を最大化する組合せ比率 ( $d_1 : d_2$ ) も変化しているので，予測法は投資戦略に関わる重要な要素である．

## 5. 投資シミュレーション

3 章および 4 章での提案法の効果を検証すべく，200 銘柄の実データ<sup>7)</sup> を用いて投資シミュレーションを行う．なお，2000 年 4 月 8 日から投資行動を開始し，それ以降の約 5 年間（土日祝日を除く 1250 日分の営業日）において投資を続行する．

初期資産の増幅率を  $\lambda$  と表記すると， $\lambda > 1$  であるほどこの期間における投資戦略としての効果が高い．一方， $\lambda < 1$  であれば損失となるので，そのような場合を元本割れと呼ぶ．

なお，投資銘柄数  $N$  の増加に伴い  $\{d_i\}$  の組合せ数が爆発に増加するため， $S_r$  の最大化は組合せ最適化問題になる．そこで本研究では簡単のため  $N = 2$  とし，投資期間中に使用銘柄を変更することはしない．ポートフォリオに使用する 2 銘柄の組合せは  ${}_{200}C_N$  通り存在するため，全ての組合せで投資シミュレーションを行った．

その結果を表 2 に示す．もし市場価格が上昇傾向であれば，単純に銘柄を保持するだけでも利益を得られる．このような技術を伴わない投資と比較するために，各 200 銘柄を単純に保持し続けたときに得られる  $\lambda$  も算出した．移動平均予測を行った場合は，単純に保持した場合の投資成績と比べて特段の差は見受けられない．しかし線形予測や非線形予測を適用すれば，資産の増幅率  $\lambda$  の向上は明白である．特に  $\max\{\lambda\}$  は飛躍的に上昇し，元本割れ率は半分以上に低減された．つまり，本研究のように時系列予測モデルをポートフォリオ理論に組込むことで，高収益かつ低リスクな資産運用を行うことができる．

## 6. 投資銘柄の厳選

実際の投資では前章の投資シミュレーションと異なり，全  ${}_{200}C_N$  通りのポートフォリオを構築する必要はなく，使用する銘柄を選択することができる．その選択基準として，予測

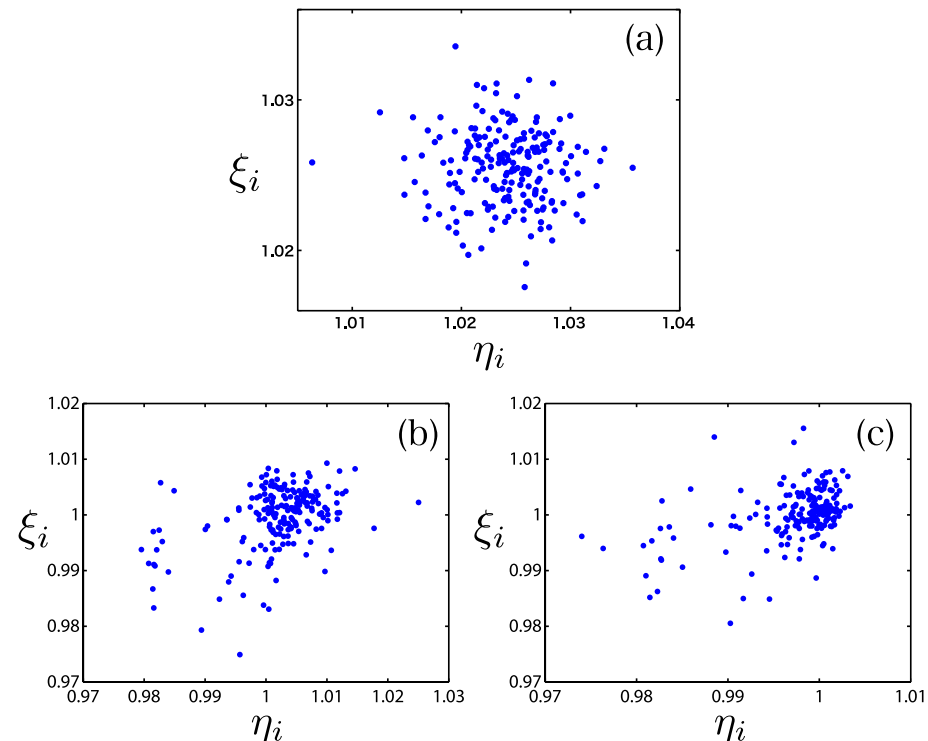


図 3 予測モデルの尤度  $\{\eta_i\}$  と予測誤差  $\{\xi_i\}$  の相関図：(a) 移動平均予測，(b) 線形予測，(c) 非線形予測の場合．なお，それぞれの相関係数は (a)-0.058, (b)0.428, (c)0.432 である．

誤差  $\xi_i$  を小さくできる銘柄を選ぶのが得策であるが，投資時において  $\{\xi_i\}$  は未知である．しかし，もし予測モデルの尤度  $\{\eta_i\}$  と  $\{\xi_i\}$  に相関関係が存在すれば，既知情報である  $\eta_i$  によってある程度  $\xi_i$  を推測することができる．この可能性を検証すべく，図 3 に全 200 銘柄の  $\{\eta_i\}$  と  $\{\xi_i\}$  の相関図を示す．確かに，移動平均予測以外であれば，ある程度の相関関係を有することを確認できる．

次に，実際に尤度  $\eta_i$  が高い上位  $n$  銘柄に厳選し，予測誤差  $\{\xi_i\}$  と資産の増幅率  $\{\lambda_i\}$  を算出した．その結果をそれぞれ表 3，表 4 に示す．なお，各予測モデルにおいて  $\eta_i$  が異なるので，選出される銘柄も各予測モデルで異なる． $n = 2$  の場合は  ${}_2C_2 = 1$  通りの結果となるため，算出不可な項目については  $-$  と表記した．

表 3 各予測モデルによる予測誤差  $\{\xi_i\}$  . ただし, 予測モデルの尤度  $\eta_i$  に関して上位  $n$  銘柄に厳選した場合, 表 1 の太字 (各予測における最良値) と比較して, 向上した項目を太字で表記した .

|                  | 移動平均予測       |         | 線形予測         |              | 非線形予測        |              |
|------------------|--------------|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|                  | $n = 10$     | $n = 2$ | $n = 10$     | $n = 2$      | $n = 10$     | $n = 2$      |
| $\bar{\xi}$      | 1.026        | 1.028   | <b>0.996</b> | <b>0.999</b> | <b>0.992</b> | <b>0.995</b> |
| $\sigma_{\xi}$   | <b>0.002</b> | —       | 0.007        | —            | 0.005        | —            |
| $\max \{\xi_i\}$ | <b>1.029</b> | —       | <b>1.010</b> | —            | <b>0.998</b> | —            |
| $\min \{\xi_i\}$ | 1.022        | —       | 0.987        | —            | 0.984        | —            |

表 4 投資シミュレーションで得られた資産の増加率  $\{\lambda_i\}$  . ただし, 予測モデルの尤度  $\eta_i$  に関して上位  $n$  銘柄に厳選した場合, 表 2 と比較して, 向上した項目を太字で表記した .

|                      | 移動平均予測         |         | 線形予測          |              | 非線形予測         |         |
|----------------------|----------------|---------|---------------|--------------|---------------|---------|
|                      | $n = 10$       | $n = 2$ | $n = 10$      | $n = 2$      | $n = 10$      | $n = 2$ |
| $\bar{\lambda}$      | <b>1.675</b>   | 0.590   | <b>14.069</b> | <b>6.618</b> | <b>15.921</b> | 4.952   |
| $\sigma_{\lambda}$   | 1.050          | —       | 10.976        | —            | <b>9.604</b>  | —       |
| $\max \{\lambda_i\}$ | 6.350          | —       | 54.164        | —            | 35.535        | —       |
| $\min \{\lambda_i\}$ | <b>0.350</b>   | —       | <b>1.544</b>  | —            | <b>2.408</b>  | —       |
| 元本割れ率                | <b>26.7[%]</b> | —       | <b>0.0[%]</b> | —            | <b>0.0[%]</b> | —       |

表 1 と表 3 を比較すると, どの予測モデルにおいても何らかの改善を確認できる . 特に移動平均予測を除いては, 予測誤差の平均値  $\bar{\xi}$  を 1 以下に削減できているので, 実際の運用成績も向上できると期待される . そこで表 4 を確認すると,  $n = 10$  の場合において, 銘柄を厳選しない表 2 の結果と比べて改善できている . つまり, 線形および非線形予測の  $\bar{\lambda}$  は飛躍的に上昇し, 元本割れ率は 0[%] となった . 一方, 移動平均予測では目立った改善は見受けられない . つまり移動平均予測以外では, 尤度  $\eta_i$  に基づいて投資銘柄を厳選することは効果的であるといえる . しかし, 尤度  $\{\eta_i\}$  と予測誤差  $\{\xi_i\}$  の相関は完全ではないので,  $n = 2$  のように投資銘柄を厳選しすぎれば, 表 2 と同程度の投資成績に落ち込む . つまり, 尤度  $\{\eta_i\}$  の過信による過度な厳選は好ましくない .

また, 線形予測と非線形予測による投資成績は同程度であるが,  $n = 10$  の  $\bar{\lambda}$  においてわずかに非線形予測の優位性を確認できる . この理由として, 予測モデルの尤度に基づいて銘柄を厳選したことで, 非線形モデルだからこそ表現できた銘柄が抽出されたと考えられる . このように市場の価格変動には, 非線形な高次ダイナミクスが内在している可能性があり, そういった場合でも対応できるように, 常に高次の予測モデルを使用することが望ましい .

## 7. ま と め

マーコビッツのポートフォリオ理論では, 単純な移動平均予測によって期待収益率の推定がなされていると解釈できる . そこで高次の時系列予測モデルを用いて収益率の予測を行ったところ, 予測精度を向上することができたため, 既存のポートフォリオ理論に時系列予測モデルを適用する方法を検討した . 移動平均予測以外の予測値を期待収益率とみなすには, リスクの評価式を変更する必要性が生じたため, リスクの原義に回帰し, 時系列予測が外れる可能性をリスクとした . この可能性は, 過去の予測誤差に基づいて推定された .

このような変更にも効果があるのかを検証すべく, 実際の株価収益率データを用いて投資シミュレーションを行ったところ, 投資成績を飛躍的に向上できることを確認した . また, 予測モデルの尤度と予測精度に相関関係を確認でき, 尤度を参照することで, 期待収益率を推定しやすい銘柄を選ぶことができる . このように投資銘柄を厳選した場合では, 資産を約 15 倍 (年利約 72%) に増やすことができた .

なお本研究の一部は, 文科省科研費若手研究 (B)(No.22700227) のご支援により行われました .

## 参 考 文 献

- 1) H. M. Markowitz: Portfolio Selection, *Journal of Finance*, Vol.7, No.1, pp.77–91 (1952).
- 2) 榊原茂樹, 青山護, 浅野幸弘: 証券投資論, 日本証券アナリスト協会 編, 日本経済新聞出版社 (2008) .
- 3) W. F. Sharpe: Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk, *Journal of Finance*, Vol.19, No.3, pp.425–442 (1964).
- 4) J. D. Farmer and J. J. Sidorowich: Predicting chaotic time series, *Phys. Rev. Lett.*, Vol.59, pp.845–848 (1987).
- 5) D. M. Allen: Mean Square Error of Prediction as a Criterion for Selecting Variables, *Technometrics*, Vol.13, No. 3, pp. 469–475 (1971).
- 6) T. Suzuki, Y. Ueoka, and H. Sato: Estimating Structure of Multivariate Systems with Genetic Algorithms for Nonlinear Prediction, *Phys. Rev. E*, Vol.80, 066208 (2009).
- 7) 株価データはパンローリング株式会社から購入 .  
<http://www.panrolling.com/pansoft/data/> (参照日 2011.7.30).
- 8) パートン・マルキール: ウォール街のランダム・ウォーカー (原著第 9 版), 井手正介訳, 日本経済新聞社 (2007).