



CAD_Ⅱのための立体図形の結合, 切断*

古 川 進**

Abstract

New algorithms to separate a given polyhedron into two parts by cutting with a plane and to construct a polyhedron by combining two given polyhedra are advocated. These algorithms which utilize some topological properties of polyhedra may supply useful means to construct the objects of desirable forms in computer aided design processes.

In addition, the resulting figures drawn by computer for some examples are shown.

1. ま え が き

電子計算機を設計の分野に利用して, 能率よく設計を行なおうとする自動設計, とくに対話的に設計を進めて行こうとする CAD (Computer Aided Design) においては, 計算機によって図形情報を処理することにより, 人と計算機とのコミュニケーションをより円滑に進めることが必要である. このような意味での計算機による図形処理の問題については, 従来多くの研究がなされてきたが, それらの多くは主に次のような二つの種類に大別できるものと思われる. その一つは計算機内に設定された立体図形に物体のモデルとしての諸性質を持たせることであり, 他の一つは計算機内に設計者の思い通りの立体図形を作り出すことである. 第一の問題としては, 隠線消去問題^{1)~3)}, 図形同志が干渉しているかどうかを識別する問題^{4), 5)}, 物体の持つ物理量, たとえば重心, 面積, 体積を求める問題⁶⁾などがあげられる. そして有効な CAD システムを実現するためには, これらの問題を統一的に取り扱うことのできるシステムが必要不可欠であると思われる.

本論文では第二の問題に関連して, 計算機内に設定されている図形の内部データ構造を設計者が直接操作することなく, ディスプレイ上に写された視覚情報だけから, 希望する形の立体図形を作り上げて行くこと

を目的として, 立体図形の修正 (追加あるいは削除など) をより容易に行なうための手段としての多面体の結合および平面による多面体の切断のアルゴリズムについて論ずる. ここで立体図形の結合とは, 二つあるいはそれ以上の立体図形が与えられたとき, それらのすべてを合わせたものを一つの立体図形として取り扱うことができるように内部データ構造を作り直すことであり, 立体図形の切断とは, ある立体図形の不要な部分がある平面によって切り取ることでありと定義される. とくに立体図形の切断は任意の平面による断面の形状を知りたいときにも用いることができる.

本論文ではこれらの問題に対して閉曲面のトポロジカルな性質を利用して多面体の凹凸に関係なく適用できる方法を与える. この方法によればアルゴリズムは比較的簡単となり, かつ立体図形のデータ構造は現在よく使われているものに比較してより簡単なものとなる. このようにして新しく作り出された立体図形に対しては, これらの操作を繰り返し適用できると同時に, 先に著者が開発した隠線消去⁷⁾, 立体図形同志の干渉の識別⁸⁾などの処理もちろん可能である.

多面体の結合の問題としては, 物体の加工時における工具と工作物, あるいは部品相互間の衝突の識別の問題に関連して一つの方法が提案されている⁹⁾. この方法は, 多面体の稜線にそれぞれある正の向きを定め, そのおのおのの稜線を共有する二つの面をその多面体の外から見て右側にあるものと左側にあるものとにあらかじめ人が分類し, これらの情報をもとにして多面体同志が干渉しているかどうかを調べ, さらに結

* Algorithms for CAD Combining and Separating Polyhedra by Susumu FURUKAWA (Faculty of Engineering, Yamanashi University)

** 山梨大学 工学部工学基礎教室

合させるというものである。また多面体の平面による切断のために提案されている方法^{6), 10)}においても上記と同種の(たとえば, 多面体を構成する各面の稜線を外から見て右回りに順序付けをするといった)前処理がなされており, この段階で与えた情報を利用するといった方法が採用されている。

2. 記号の定義

空間内の一点 p が点集合 A の要素であるとき $p \in A$ で表わす。集合 A が集合 B の部分集合であるとき $A \subset B$, A が B に等しいとき $A=B$ で表わし, A, B の合併集合, 共通集合をそれぞれ $A \cup B$, $A \cap B$ で表わすことにする。また A が空集合のとき $A=\phi$ で表わす。記号 $\in, \subset, =$ の否定形に対してそれぞれ $\notin, \not\subset, \neq$ なる記号を用いる。また集合 A の閉包を $\bar{A}$ で表わすことにする。さらに集合 A の濃度 m を $|A|$ で定義する。すなわち, $m=|A|$ である。もちろん $A=\phi$ のときは $|A|=0$ である。とくに実数の集合の濃度を記号 c で表わすことにする。

3次元空間内に与えられた多面体を P で表わし, これをその内部および境界上の点を要素とする点集合と考える。また多面体 P より境界上の点を除いた集合を P で表わす。多面体 P の面の数を $N(S)$, 稜線の数を $N(L)$, 頂点の数を $N(V)$ で表わし, P の i 番目の面を考え, これからそのすべての稜線を除いた点の集合を S_i で表わす。また j 番目の稜線の両端点(すなわち頂点)を除いた点の集合を L_j で表わすことにすると, P の面および稜線はそれぞれ $\bar{S}_i$ ($i=1, 2, \dots, N(S)$), $\bar{L}_j$ ($j=1, 2, \dots, N(L)$) で表わされる。とくに $L_j \subset \bar{S}_i$ となる N_i 個の L_j を他の稜線と区別して表わしたい場合には $L_k(S_i)$ ($k=1, 2, \dots, N_i$) と書くことにする。また P の各頂点を V_l ($l=1, 2, \dots, N(V)$) で表わし, 稜線の場合と同様に $V_l \in \bar{S}_i$ なる N_i 個の V_l を $V_m(S_i)$ ($m=1, 2, \dots, N_i$) で表わす。このように定義することにより多面体 P は次のように表わすことができる。

$$P = P \cup \left(\bigcup_{i=1}^{N(S)} S_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N(L)} L_j \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{N(V)} V_k \right) \quad (1)$$

ただし, $\bigcup_{i=1}^{N(S)} S_i$ は $i=1, 2, \dots, N(S)$ に対する S_i の合併集合を意味する。 $\bigcup_{j=1}^{N(L)} L_j, \bigcup_{k=1}^{N(V)} V_k$ についても同様である。

なお多面体がいくつかあってそれらを区別して表現する必要があるときは添字をつけて P_i, P_j と書き,

それにしたがって, 面, 稜線, 頂点もそれぞれ $\bar{S}_{i,l}, \bar{L}_{i,l}, V_{i,m}$ と書くことにする。ただし第一の添字は属する多面体の区別を表わし, 第二の添字は一つの多面体の中での区別を表わすものとする。

空間内の一点 p から任意の方向に発する一本の半無限直線を $R_a(p)$ で表わす。ただし $R_a(p)$ は点 p を含まないものとする。

3. データ構造について

本章では多面体のデータ構造について述べる。最初に与える情報として, 各頂点の位置を与え, 稜線と頂点の関係および面と稜線関係を記述するデータを与えることにし, これらのデータ構造を次のように定める。

(イ) 頂点

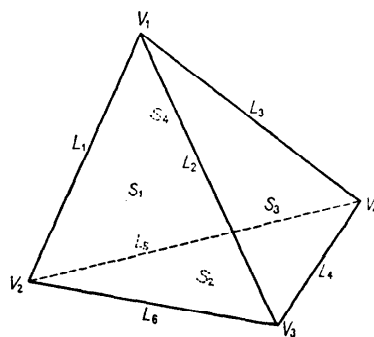
多面体 P が与えられたとき, 頂点に対するデータ構造として, 各頂点の座標と後の参照のため, そのおのの1から $N(V)$ までの頂点番号を割り当てたテーブル(V -テーブル)を作成する。たとえば Fig. 1 に示す4面体に対しては Table 1-(a) (次頁参照) のようなテーブルを作成する。ここで各頂点の位置は3次元直交座標(デカルト座標)で表わされているものとする。

(ロ) 稜線

各稜線に対して1から $N(L)$ までの稜線番号を割り当て, そのおのの稜線の両端点(頂点)に割り当てられた二つの頂点番号の組を対応させるテーブル(L -テーブル)を作成する。たとえば Fig. 1 の4面体に対しては Table 1-(b) のようになる。

(ハ) 面

P を表わすためには次のような二つのテーブルを考える。まず P の各面に面番号 j ($j=1, 2, \dots, N(S)$) を割り当て, そのおのの面に構成する稜線の数 N_i



----- : Invisible Line or face

Fig. 1 A polyhedron with 4 faces

Table 1 Data structures of vertices, edge lines and faces

(a) V・table					(b) L・table						
頂点番号	1	2	3	4	稜線番号	1	2	3	4	5	6
x	4.0	0	9.0	12.0	頂点番号	1	1	1	3	2	2
y	9.0	0	-1.5	3.0		2	3	4	4	4	3
z	7.0	0	5.0	-2.0							

(c) S・table												
面要素番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
稜線番号	1	2	6	4	5	6	2	3	4	1	3	5

(d) N・table				
面番号	1	2	3	4
稜線数	3	3	3	3

Table 2 Date structure of a face (s_1 ・table)

面要素番号	1	2	3
稜線番号	1	2	6

を対応させた N ・テーブルを作る。つぎに P の面 $\bar{S}_j$ ($j=1, 2, \dots, N(S)$) を構成する稜線の ((口)によって割り当てられた) 稜線番号の組を与える小テーブル (s_j ・テーブル) をつくり、それらを N ・テーブルの面番号の順序でつなぎ合わせた S ・テーブルを作成する。このとき S ・テーブルに記入された稜線番号のおおの、後に参照のため 1 から $\sum_{j=1}^{N(S)} N_j$ までの通し番号をつけ、これらを面要素番号と名付ける。たとえば Fig. 1 の 4 面体の面 1 を表わす s_1 ・テーブルは Table 2 のように作成する。また S ・テーブルおよび N ・テーブルはそれぞれ Table 1-(c), (d) のようになる。なお多面体が二つ以上あるときは、頂点、稜線のための V ・テーブル、 L ・テーブルは、たとえば P_1 に対する V ・テーブル、 L ・テーブルの後に P_2 に対する V ・テーブル、 L ・テーブルをつなぎ合わせたものとする。また面データのための S ・テーブル、 N ・テーブルはそれぞれ別個に作ることにする。

4. 多面体の平面による切断

多面体がある与えられた平面（以下では切断平面と呼ぶことにする）によって切断するとき、この多面体は二つに分割される。このときこれら二つの多面体は前章で述べたようなデータ構造で計算機内に記憶されることが必要である。本章ではこのような二つの多面

体を得るための平面による切断の方法、およびこれらの内部データ構造の組み立て方について論ずる。

3次元ユークリッド空間全体を表わす点集合を R で、切断平面上の点からなる集合を R^0 で表わし、 R^0 をはさんで互に反対側の二つの空間を表わす点集合をそれぞれ R^+ および R^- で表わすことにする。このように定義すると切断平面は R^0 と一致するので、今後切断平面の記号的表現として R^0 を用いる。切断平面 R^0 は、すべての $p \in R^0$ に対して

$$f(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0 \quad (2)$$

が成り立つような点集合として規定される。ここで a, b, c, d はこの平面を定めるある定数であり、 x, y, z はそれぞれ点 p の x, y, z 座標を表わす。また R^+ はすべての $p \in R^+$ に対して $f(x, y, z) > 0$ が成り立つような点集合であり、 R^- はすべての $p \in R^-$ に対して $f(x, y, z) < 0$ が成り立つような点集合であるとする。

いま多面体 P は切断平面 R^0 によって二つの多面体 P^+ および P^- に分割されるものと考え。すなわち、

i) すべての $p \in P^+$ に対して $p \in R^+$

ii) すべての $p \in P^-$ に対して $p \in R^-$

である。このとき、多面体 P の i 番目の稜線 $\bar{L}_i$ ($i=1, 2, \dots, N(L)$) が P^+ に属するか P^- に属するかを判定するために次の三つの場合に分けて考える。

a) $|L_i \cap R^0| = 0$ のとき

任意に選んだ一つの点 $p \in L_i$ に対して $p \in R^+$ ならば $L_i \subset P^+$ であり、逆に $p \in R^-$ ならば $L_i \subset P^-$ である。

b) $|L_i \cap R^0| = 1$ のとき

L_i は i) すべての点 $p \in L_i$ に対して $p \in R^+$ となるような L_i の部分集合 L_i^+ , ii) すべての $p \in L_i$ に対して $p \in R^-$ となるような L_i の部分集合 L_i^- , および iii) L_i と R^0 の交わり、の三つの部分集合に分けることができる。このとき明らかに $L_i^+ \subset P^+$, $L_i^- \subset P^-$ である。なお上記の部分集合 L_i^+, L_i^- のうちとくに $\bar{S}_j$ に属するものを他の L_i^+, L_i^- と区別して表わしたいときはそれぞれ $L_i^+(S_j), L_i^-(S_j)$ ($k=1, 2, \dots, N_j^+, l=1, 2, \dots, N_j^-$) と表現することにする。ここで N_j^+, N_j^- はそれぞれ $L_i^+(S_j), L_i^-(S_j)$ の個数とする。

c) $|L_i \cap R^0| = c$ のとき*

$L_i \subset \bar{S}_j$ (L_i を稜線とする j 番目の面) かつ $S_j \notin R^0$ なる S_j および任意に選んだ一点 $p \in L_i$ に対して、

* $|L_i \cap R^0|$ が有限の値となるのは 0 あるいは 1 以外には有り得ない。

$R_0(p) \cap S_j \neq \emptyset$ かつ $R_0(p) \cap (\bigcup_{k=1}^{N_j} V_k(S_j)) = \emptyset$ なる $R_0(p)$ を一本選ぶ. このとき

$$m_p = \sum_{k=1}^{N_j} |R_0(p) \cap L_k(S_j) \cap R^p| \quad (3)$$

で定義される m_p が奇数ならば $L_i \subset P^p$ であり (Fig. 2),

$$m_m = \sum_{k=1}^{N_j} |R_0(p) \cap L_k(S_j) \cap R^m| \quad (4)$$

が奇数ならば $L_i \subset P^m$ である.

$S_j (j=1, 2, \dots, N(S))$ (ただし $S_j \subset R^0$ となる j は除く) と R^0 の交わりによって新たに生ずる線分を $\bar{L}_k^0(S_j) (k=1, 2, \dots, N_j^0)$ と表わすことにすると $L_k^0(S_j)$ が P^p に属するか, P^m に属するかは上の c) によって判別できるが m_p, m_m は明らかに共に奇数となるから $L_k^0(S_j) \subset P^p$ であり, かつ $L_k^0(S_j) \subset P^m$ である. ここで N_j^0 は S_j と R^0 の交わりによって新たに生ずる線分の個数を表わす.

つぎに, 面 $\bar{S}_i$ のどの部分が P^p に属し, どの部分が P^m に属するかを調べる方法について論ずる. いま集合の濃度 m を

$$m = |R^0 \cap (\bigcup_{j=1}^{N_i} \bar{L}_j(S_i))| \quad (5)$$

で定義しておく.

1) $m \leq 1$ のとき

すべての $L_j(S_i) (j=1, 2, \dots, N_i)$ に対して $L_j(S_i) \subset P^p$ であるかあるいは $L_j(S_i) \subset P^m$ であるかのどちらかである. したがってある一つの $L_j(S_i)$ に対して $L_j(S_i) \subset P^p$ ならば $S_i \subset P^p$ であり, 逆に $L_j(S_i) \subset P^m$ ならば $S_i \subset P^m$ である.

2) $1 < m < \infty$ のとき

面 $\bar{S}_i$ は R^0 によって二つの面分 $\bar{S}_i^p$ および $\bar{S}_i^m$ に分割される ($\bar{S}_i^p, \bar{S}_i^m$ のどちらかが空集合となるこ

とも有り得る). 面 $\bar{S}_i^p$ は $\bar{L}_j(S_i)$ のうち, 前に求められた $\bar{L}_k^p (k=1, 2, \dots, N_i^p)$ および $\bar{L}_l^0(S_i) (l=1, 2, \dots, N_i^0)$ によって構成される. 面 $\bar{S}_i^m$ についても同様な議論が成り立つ.

3) $m = \infty$ (すなわち $S_i \subset R^0$) のとき

ここでは P と R^0 の交わりによって新たに生み出される面をも合わせて考察する. $\bar{L}_k^0(S_i)$ は P^p および P^m の稜線となることがわかっているから $\bar{S}_i^p$ および $\bar{S}_i^m$ の稜線の一つであることは明らかである. $L_k(S_i) (k=1, 2, \dots, N_i)$ については上記 c) の議論において $L_k(S_i) \subset P^p$ であるか $L_k(S_i) \subset P^m$ であるかがわかっている. たとえば $L_k(S_i) \subset P^p$ である場合には $\bar{L}_k(S_i)$ は $\bar{S}_i^p$ の稜線となる.

以上の議論から P^p および P^m に対する V, L, S, N ・テーブルをそれぞれに対して作成することができるが, ここでは P^p 用の V, L, S および N ・テーブル (それぞれ V^p, L^p, S^p および N^p ・テーブルと呼ぶことにする) を組み立てる方法について述べる (P^m 用の V, L, S, N ・テーブルもそれぞれ同様の手続きで組み立てられる). まず V^p ・テーブルは $V_i \in P^p$ なる頂点 (V_i が $L_j \subset P^p$ なる稜線 $\bar{L}_j$ の端点であれば $V_i \in P^p$ である) をすべて, V^p ・テーブルに書き込んで行くことにより組み立てられる. ただし, 原図形のどの頂点あるいは $V_m = R^0 \cap L_k$ なる点 V_m が P^p に属して, それが V^p ・テーブルのどの頂点番号の点に対応するかという情報がこの手続きの過程で得られるが, これらはある補助テーブル (頂点对応表という) に貯えておく. この頂点对応表を利用して L^p ・テーブルを作成できる. まず, P^p の稜線になると識別された P の稜線 (あるいはその一部) について, それらの両端点の V^p ・テーブルの頂点番号を L^p ・テーブルに書き込む. このとき先に作られた頂点对応表を参照すれば, V ・テーブルの頂点番号を V^p ・テーブルの頂点番号に書き換えることは容易である. つぎに P の各面と切断平面との交わりによって生ずる線分も同様の手続きで L^p ・テーブルに登録すれば良い. この L^p ・テーブル作成の過程で, 原図形のどの稜線が P^p に属して, それが L^p ・テーブルのどの稜線番号に対応するかという情報を貯えておく補助テーブル (稜線対応表という) および線分 $\bar{L}_k^0(S_i) (k=1, 2, \dots, N_i^0)$ の L^p ・テーブルにおける稜線番号と面 $\bar{S}_i$ の面番号との対応表 (面-稜線対応表という) を作っておく. つぎに, 面 $\bar{S}_i$ から S^p ・テーブルの一部である s_j^p ・テーブルを作成することを考える. まず面 $\bar{S}_i$ の

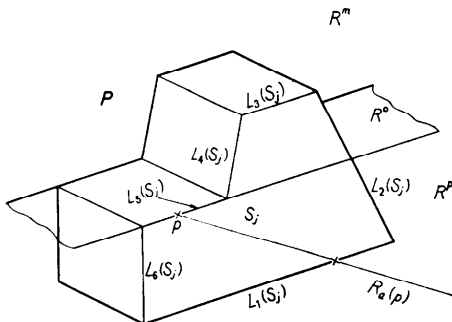


Fig. 2 The case where the plane R^0 contains a face ($m_p=1$)

各稜線 (あるいはその一部) のうち P^p に属するものだけをとり出し, それらの稜線番号を稜線対応表を利用して, L^p ・テーブルの稜線番号に書き換えて, 順次 s_j^p ・テーブルに書き込む. つぎに, 面一稜線対応表を参照して線分 $\bar{L}_k^p(S_i)$ ($k=1, 2, \dots, N_i^p$) の L^p ・テーブルにおける稜線番号を書き込んで行くことにより s_j^p ・テーブルが完成する (s_j^p ・テーブルの中での稜線番号はどのように並べても差し支えない). このようにして作られた s_j^p ・テーブルを順につなぎ合わせて行くことにより S^p ・テーブルが組み立てられる. ただし, S^p ・テーブルの最後には線分 $\bar{L}_k^p(S_i)$ ($k=1, 2, \dots, N_i^p$; $i=1, 2, \dots, N(S)$) の L^p ・テーブルにおける稜線番号すべてが書き込まれた S^p ・テーブルをつける. なお N^p ・テーブルは S^p ・テーブルを組み立てる過程で付随的に作成することができる.

5. 多面体の結合について

二つの多面体 P_1, P_2 を結合させるということは

$$P = P_1 \cup P_2 \quad (6)$$

なる多面体 P を新たに作り出すことである. 本章ではこのような多面体 P を形成するための結合のアルゴリズムについて論ずる.

最初に多面体 P_i ($i=1, 2$) の稜線 $\bar{L}_{i,j}$ のどの部分が P の稜線として必要であるかを調べる. まず

$$m = \left| L_{i,j} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N_i'(S)} \bar{S}_{i',k} \right) \right| \quad (7)$$

なる濃度 m を定義しておく. ここで i' は $i=1$ なら $i'=2$ であり, 逆に $i=2$ なら $i'=1$ となるものとする.

a) $m=0$ のとき

任意の一つの点 $p \in L_{i,j}$ に対して $p \in P_{i'}$ ならば $L_{i,j}$ は不要であり, 逆に $p \notin P_{i'}$ ならば $\bar{L}_{i,j}$ は P の稜線となる*.

b) $0 < m < \infty$ のとき

Fig. 3 に示すように $L_{i,j}$ を $\bar{S}_{i',k}$ ($k=1, 2, \dots, N_{i'}(S)$) との交わりおよび $m+1$ 個の部分集合 $L_{i,j}^l$ ($l=1, 2, \dots, m+1$) に分割して考える. このときおのおのの線分 $\bar{L}_{i,j}^l$ が P の稜線となるかどうかは上記 a) の方法で判定できる.

c) $m=\infty$ のとき

Fig. 4 に示すように $L_{i,j}$ を $N(L_{i,j})$ 個の部分集

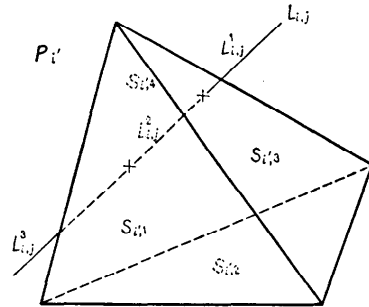
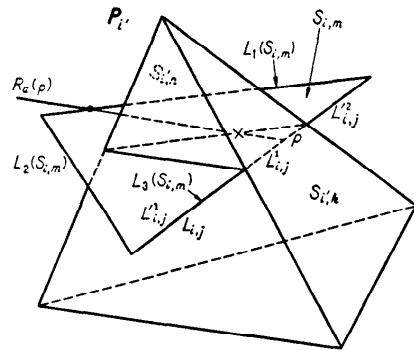


Fig. 3 The case where an edge line has intersections with faces



$\times$: Intersection between $R_a(p)$ and $S_{i',n}$
 $\bullet$: Intersection between $R_a(p)$ and $L_1(S_{i',m})$

Fig. 4 The case where a part of an edge line is on a face

合 $L_{i,j}^l$ ($l=1, 2, \dots, N(L_{i,j})$) および $N'(L_{i,j})$ 個の $L_{i,j}^{l'm}$ ($m=1, 2, \dots, N'(L_{i,j})$) に分離して考える**. ただし, $L_{i,j}^l, L_{i,j}^{l'm}$ はそれぞれ $\left| L_{i,j}^l \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N_{i'}'(S)} \bar{S}_{i',k} \right) \right| = c$ および $\left| L_{i,j}^{l'm} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N_{i'}'(S)} \bar{S}_{i',k} \right) \right| < \infty$ となるように $L_{i,j}$ から分離する. $\bar{L}_{i,j}^{l'm}$ が P の稜線として必要かどうかは上記 a) あるいは b) の方法で判定できるので, ここでは $L_{i,j}^l$ についてのみ考察する. いま $L_{i,j}^l$ はある面 $\bar{S}_{i',k}$ に含まれているものと考えよう ($L_{i,j}^l$ の作り方から面 $\bar{S}_{i',k}$ 以外の面 $\bar{S}_{i',n}$ ($n \neq k$) に含まれることはない).

i) $L_{i,j}^l \cap S_{i',k} \neq \phi$ のとき

$\bar{L}_{i,j}$ を稜線とする面で $S_{i',m} \cap S_{i',k} = \phi$ となるような $S_{i',m}$ を選んだとき, ある一点 $p \in L_{i,j}^l$ に対して, $R_a(p) \cap S_{i',m} \neq \phi$, $R_a(p) \cap \bar{L}_{i',n} = \phi$ ($n=1, 2, \dots, N_{i'}(L)$) かつ $R_a(p) \cap V_n(S_{i',m}) = \phi$ ($n=1, 2, \dots, N_{i',m}$) を満足する半無限直線 $R_a(p)$ を一本考える. このとき

* ある点 p が P に属する ($p \in P$) かどうかは文献 8) (p. 176) で与えられた方法によって識別することができる.

** $L_{i,j}^l, L_{i,j}^{l'm}$ の他にこれらの端点 ($L_{i,j}$ の両端点は除く) から成る集合も考慮しないと厳密には $L_{i,j}$ に一致しないが, ここでの議論ではこれらの点は問題とならないので省略して考える.

$$m_1 = \sum_{n=1}^{N_i(m)} |R_a(p) \cap L_n(S_{i,m})| \quad (8)$$

$$m_2 = \sum_{n=1}^{N_i'(S)} |R_a(p) \cap S_{i',n}| \quad (9)$$

$$m = m_1 + m_2 \quad (10)$$

で与えられる濃度 m が奇数ならば $\bar{L}_{i,j'}$ は新しく作られる多面体 P の稜線となる*. 逆にすべての m に対して m が偶数となるならば $\bar{L}_{i,j'}$ は不要である (Fig. 4).

ii) $L_{i,j'} \cap S_{i',k} = \phi$ のとき

このときは二つの多面体 $P_i, P_{i'}$ は線分 $\bar{L}_{i,j'}$ を共有する. 線分 $\bar{L}_{i,j'}$ をその稜線とする面を $\bar{S}_m(L_{i,j'})$ ($m=1, 2, \dots, N(L_{i,j'})$) で表わすことにする. ただし $N(L_{i,j'})$ はこのような面の個数である. また R を $S_m(L_{i,j'})$ を含む平面 R_m^0 および R_m^0 をはさんで互に反対側の空間を表わす二つの点集合に分離する. そして R_m^0 を除く二つの集合のうち $p' \in S_n(L_{i,j'})$ でかつ点 $p \in L_{i,j'}$ の近傍の点 p' を含むものを $R_m(S_n)$ で表わすことにする.

二つの面 $\bar{S}_m(L_{i,j'})$ および $\bar{S}_{m+1}(L_{i,j'})$ によって定められる集合 $R_m(S_{m+1})$ および $R_{m+1}(S_m)$ の共通集合を R_m で表わすことにする (ただし $m=N(L_{i,j'})$ のときは $m+1$ は 1 でおきかえる). このように定義された集合 R_m は (面 $\bar{S}_k(L_{i,j'})$ ($k=1, 2, \dots, N(L_{i,j'})$) に適当な順序付けを行なっておくことにより) 他の集合 R_n との交わりを持たないようにすることができる. ただし, 点 $p \in S_{m+1}(L_{i,j'})$ が R_m^0 に含まれるときは集合 R_m を作るができないが, このような場合は除いて考えることにより, 以下の議論が成り立つ.

一点 $p \in L_{i,j'}$ に対して $R_a(p) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N_i(L)} \bar{L}_{i,k} \right) = \phi$,

$R_a(p) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N_i'(L)} L_{i',k} \right) = \phi$ かつ $R_a(p) \subset R_m$ なる一本

の $R_a(p)$ を選んだとき

$$m_1 = \sum_{k=1}^{N_i(S)} |R_a(p) \cap S_{i,k}| \quad (11)$$

$$m_2 = \sum_{k=1}^{N_i'(S)} |R_a(p) \cap S_{i',k}| \quad (12)$$

$$m = m_1 + m_2 \quad (13)$$

で定義される m がすべての m ($m=1, 2, \dots, N(L_{i,j'})$) に対して奇数ならば $\bar{L}_{i,j'}$ は不要であり, 逆に m が偶数になる m が存在する場合 $\bar{L}_{i,j'}$ は必要な稜線と

なる.

なお P_i の面 $S_{i,j}$ と $P_{i'}$ の面 $S_{i',k}$ の交わりとして新たに求められる線分に対しては上記 c) の判定規準が当てはめられるが, 式 (13) で定義された m は明らかに少なくとも一つの m に対して偶数になるので, これらの線分が P の稜線になることは明らかである.

P の構成面 $\bar{S}_m$ は

1) $S_{i,j}$ の稜線 $\bar{L}_k(S_{i,j})$ ($k=1, 2, \dots, N_{i,j}$) のうち上述の議論において P の稜線となると判定された部分, および

2) $S_{i,j}$ と $S_{i',k}$ ($k=1, 2, \dots, N_{i',k}(S)$) の交わりによって新たに生み出された線分

に囲まれる部分であることがわかる. なお, $S_{i,j}$ と $S_{i',k}$ が同一平面上にある場合にはこの両者の P の稜線となる線分を集めたものであると考えれば良い.

このようにして新しく作られる多面体 P のデータ構造 (V, L, S, N ・テーブル) の組み立て方は前章の場合と本質的に同じであるのでここでは省略する.

6. 計算機による作図例

上述の方法に基づいてプログラムを作成し, 実際に XY プロッターを使用して作図した例題を Fig. 5 (次頁参照) に示す. Fig. 5-b) は Fig. 5-a) に示すような 60 面体を切断平面がこの多面体の構成面の一つを含むように選んで切断したとき, 新しく得られる 34 面体および 43 面体を示している. Fig. 5-c) はこうして分離された 34 面体をその中心線のまわりにある角度だけ回転し, さらにその中心線のある距離だけ平行移動させ, 切断された他の片方 (43 面体) と結合させたものである. このプログラムは FORTRAN で組まれ, 計算には東京大学大型計算機センターの HITAC 8800/8700 を利用した. この例題においては平面による切断のために要した時間は約 1~2 秒であり, 結合の処理時間は約 15 秒であった. なお, これらのいずれにおいても隠線消去処理の時間が含まれている.

7. 結 論

本論文においては, 計算機内に設計者の望む立体図形を作り上げて行く上で必要と思われる諸手続きのうち, 平面による多面体の切断および二つあるいはそれ以上の多面体の結合のためのアルゴリズムを与えた. 本報告において得られた結果の主な特徴は次のごとくである.

* m_1 を求める際には $R_a(p)$ および $L_n(S_{i,m})$ をそれぞれ (x, y) 平面 ((y, z) 平面あるいは (z, x) 平面でも良い) に射影して考えても良い.

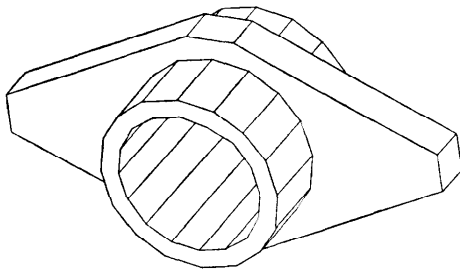


Fig. 5-a) Original polyhedron with 60 faces

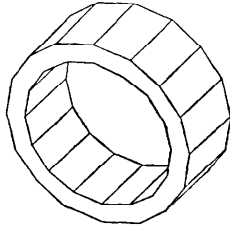


Fig. 5-b) (i) A polyhedron separated from original one by a plane

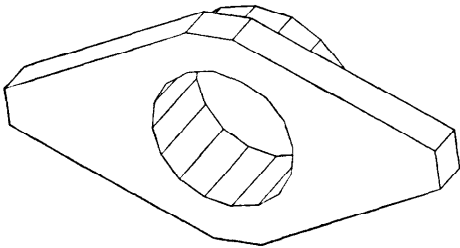


Fig. 5-b) (ii) The other polyhedron separated from original one

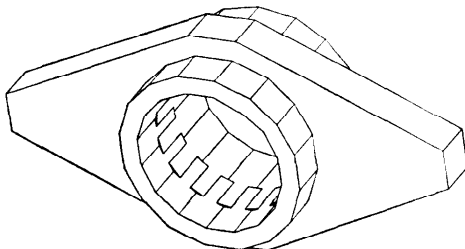


Fig. 5-c) The polyhedron combining the polyhedra shown in Fig.5-b) (One of them is rotated about an axis and displaced in a direction)

1) 多面体の平面による切断および多面体の結合の問題に対する解法は、そのアルゴリズムが比較的容易であり、かつ凸多面体のみならず凹多面体にも適用できる。

2) 本論文で与えた方法によれば、与えられた物体を表わすデータ構造は、現在多く用いられているものに比較してより簡単になるものと思われる。

終りに本研究の遂行に当たり、終始有益な御教示を賜った東京大学 渡辺茂教授、同三浦宏文助教授ならびに山梨大学 前沢成一郎教授に感謝の意を表する。

参考文献

- 1) R. A. Weiss: BE VISION, J. ACM., Vol. 13, No. 2, pp. 194~204 (1966).
- 2) J. E. Warnock: The Hidden Line Problem and The Use of Halftone Displays, Pertinent Concepts in Computer Graphics, University of Illinois Press, pp. 154~163 (1969).
- 3) 穂坂衛, 高橋栄: 3次元形状処理方式とHidden-Line Algorithm, 第10回情報処理学会大会講演予稿集, pp. 77~78 (1969).
- 4) P. G. Comba: A Procedure for Detecting Intersections of Three-Dimensional Objects, J. ACM., Vol. 15, No. 3, pp. 354~366 (1968).
- 5) 穂坂衛, 木村文彦: 立体の内部記述と立体処理の一般解法, 第14回情報処理学会大会講演予稿集, pp. 405~406 (1973).
- 6) 出沢正徳: 立体図形の切断および諸定数の算定, 日本機械学会講演論文集, No. 710-12, pp. 235~238 (1971-10).
- 7) S. Furukawa: A Solution to the Hidden-Line Problem, Reports of the Faculty of Engineering, Yamanashi University, Vol. 22, pp. 1~5 (1971).
- 8) 古川進: 多面体の干渉問題に対する一解法, 情報処理, Vol. 13, No. 3, pp. 173~181 (1973).
- 9) 渡辺文雄他: 三次元衝突問題へのアプローチ, 昭和48年度精機学会春季大会学術講演前刷集, pp. 399~340 (1973).
- 10) 木村文彦, 穂坂衛: 立体図形処理とデータ構造について, 第13回情報処理学会大会講演予稿集, pp. 271~272 (1972).

(昭和49年12月3日受付)

(昭和50年2月22日再受付)