

論文

実数冪による関数の近似表現*

小林 康浩** 大北 正昭** 井上 倫夫**

Abstract

For an accurate uniform analog simulation, uniformly continuous functions should be expressed in a full range of the given domain by approximations of the form:

$$f(x) \approx \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^{\beta_1} + \alpha_3 x^{\beta_2}$$

It is noticeable that the exponents β_1, β_2 are respectively determined by real numbers according to the nature of the given function. A maximum error due to this approximation is given by a moderate value enough to be used for this purpose, and its magnitude is comparable with that caused by other approximations having an equal number of parameters. The usefulness of this approximation can be found in the fact that different values of the parameters are available for a wide range of approximation.

A numerical method how to determine the parameters is described with its computing program and an optimum approximation obtained by this procedure is shown with its error curve. As for different functions, numerical data are tabulated.

1. 序 論

一様連続な関数をアナログ模擬する場合、全定義領域を若干の区間に分割し、分割区間ごとに被近似関数を直線線分で近似する方法¹⁾、曲線弧で近似する方法²⁾、両者の併用による方法³⁾などが提案されているが、これらの方法によると、線素の継目やその中間で、不可避免的に誤差が増加する。継目なしで、解析関数を一様近似しようとして多項式を用いると、大抵の関数に対して高精度の近似が得られるが、この種の近似式を、忠実に再現することによって関数模擬を行うとすれば、次数に見合った数の曲線を発生する必要がある。このため実際の回路構成は複雑となり、かえって動的精度の劣化を招くことにもなる。そこで、できるだけ少ない線素で、なるべく広い領域で、継目をつくらずに、精度よく、一様模擬することを可能にするような近似式の考案が望まれる。

このような目的にかなうものとして、「実数冪」項

をその中に含む代数式を用いる近似、名づけて「実数冪近似」が提案される。このような、実数値で与えられる指数をもつ入力冪の項を、非直線性の近似に用い、その結果を入力比例項で1次補正するようにすると、本文で述べるように、1つの実数冪項は、通常の整数冪項からなる近似多項式の、2次以上の高次2項に相当させることができるので、アナログ模擬に十分な精度を保ちながら、その分だけ使用するべき曲線素の数を少なくすることができる。筆者等は、この方式を応用して、1本の直線と1本の曲線とを使用し、比較的少ない誤差で、滑らかな関数を発生させることができることを示した^{4), 5)}。また、実数冪近似の再現によって実際に関数を発生させる場合、対数増幅器と逆対数増幅器を組み合わせる用いると^{6), 7)}、冪指数の設定が極めて容易となるので、アナログ演算システムに広く利用でき、また、図形・文字のディスプレイにも応用することができるものと思われる。

この論文では、このような実数冪を用いる近似に当て、その冪指数の値と係数の値を決定する方法について述べる。具体的には、

- (i) テイラー展開形の対応項を相等しいと置いて求める方法

* Fractional Powers Approximation for Nonlinear Functions by Yasuhiro KOBAYASHI, Masaaki OHKITA and Michio INOUE (Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Tottori University).

** 鳥取大学工学部電気工學教室

(ii) 等比点補間によって得られる近似式を修正して、最適近似式を求める方法

について詳述する。さらに、(ii)の方法によって、実際に任意の解析関数の最適実数漸近近似式を求める場合の演算プログラムと、これによって得られたいくつかの関数に対する最適実数漸近近似式を、その最大偏差値とともに一括して掲げる。なお、誤差分布については、紙面の都合上、その一例を挙げるにとどめる。

2. 実数漸近近似式

2.1 テイラー展開より求める近似式

任意の解析関数 $f(x)$ を、一般に、実数で与えられるような指数をもつ入力変数の冪の項を含む代数式

$$q(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^{\beta_1} + \alpha_3 x^{\beta_2} \quad (1)$$

を用いて近似する問題を考える。

ここで、 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ は、被近似関数 $f(x)$ の形にしたがって与えられる定数である。

いま、関数 $f(x)$ が、閉区間 $[a, b]$ の至るところで連続微分可能で、かつ、点 a において解析的であるとし、係数列 $\{A_r\}$ が速やかに収束するとき、 n を適当に大きくとれば、 $f(x)$ は点 a の近傍で

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(a)}{r!} (x-a)^r \\ &\approx \sum_{r=0}^n A_r x^r \end{aligned} \quad (2)$$

のような冪級数に展開できる。ただし、 a は展開中心で

$$0 \leq a \ll 1$$

を満たすものとする。また、 A_r は

$$A_r = \frac{1}{r!} \sum_{l=0}^{n-r} \frac{(-1)^l}{l!} a^l f^{(r+l)}(a)$$

で与えられる。

同様に、点 a の近くで式(1)を展開すると

$$q(x) \approx \sum_{r=0}^n C_r x^r \quad (3)$$

のように書くことができる。ただし

$$C_r = \begin{cases} \alpha_0 + \frac{(-1)^n R_1 a^{\beta_1}}{n! \beta_1} \alpha_2 + \frac{(-1)^n R_2 a^{\beta_2}}{n! \beta_2} \alpha_3 & (r=0), \\ \alpha_1 + \frac{(-1)^{n-1} R_1 a^{\beta_1-1}}{(n-1)! (\beta_1-1)} \alpha_2 + \frac{(-1)^{n-1} R_2 a^{\beta_2-1}}{(n-1)! (\beta_2-1)} \alpha_3 & (r=1), \\ \frac{(-1)^{n-r} R_1 a^{\beta_1-r}}{(n-r)! r! (\beta_1-r)} \alpha_2 + \frac{(-1)^{n-r} R_2 a^{\beta_2-r}}{(n-r)! r! (\beta_2-r)} \alpha_3 & (2 \leq r \leq n) \end{cases}$$

である。ここで

$$R_1 = \beta_1(\beta_1-1)(\beta_1-2) \cdots (\beta_1-n),$$

$$R_2 = \beta_2(\beta_2-1)(\beta_2-2) \cdots (\beta_2-n)$$

と書かれる。このとき、もし

$$C_r = A_r \quad (0 \leq r \leq n) \quad (4)$$

とすることができれば

$$q(x) \approx f(x) \quad (5)$$

とみなすことができる。

いま、初項より第6項までの対応する係数が、それぞれ相等しいと置くと、6個の定数はつぎのように与えられる。この場合、 a が1より充分小さい正数として与えられているので、冪指数 β_1 の値は、2次方程式の解として得られることになる。即ち

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{2t_1} (-t_2 + \sqrt{t_2^2 - 4t_1 t_3}), \\ \text{または} \\ &= \frac{1}{2t_1} (-t_2 - \sqrt{t_2^2 - 4t_1 t_3}), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ただし

$$t_1 = S_1 S_6 - S_4 S_3,$$

$$t_2 = S_6 S_2 - S_5 S_3,$$

$$t_3 = S_5 S_1 - S_4 S_2,$$

$$S_1 = 12a^2(n-3)! \{3aA_3 + (n-2)A_2\},$$

$$S_2 = -12a^2(n-3)! \{9aA_3 + 2(n-2)A_2\},$$

$$S_3 = 6a^2(n-3)! \{2aA_3 + (n-2)A_2\} - n!(A_0 - \alpha_0),$$

$$S_4 = \frac{100}{n-4} a^2 A_5 + 32aA_4 + 3(n-3)A_3,$$

$$S_5 = -\frac{500a^2}{n-4} A_5 - 128aA_4 - 9(n-3)A_3,$$

$$S_6 = \left(\frac{20a^2}{n-4} + 8a \right) A_5 + (n-3)A_3$$

で、また β_2 については

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 &= \frac{S_4 \left\{ \frac{1}{2t_1} (-t_2 + \sqrt{t_2^2 - 4t_1 t_3}) \right\} + S_5}{S_6 \left\{ \frac{1}{2t_1} (-t_2 + \sqrt{t_2^2 - 4t_1 t_3}) \right\} - S_4}, \\ \text{または} \\ &= \frac{S_4 \left\{ \frac{1}{2t_1} (-t_2 - \sqrt{t_2^2 - 4t_1 t_3}) \right\} + S_5}{S_6 \left\{ \frac{1}{2t_1} (-t_2 - \sqrt{t_2^2 - 4t_1 t_3}) \right\} - S_4} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

のように書かれる。 β_1, β_2 は、それぞれ2組ずつ得られが、式(6)の第1式は、式(7)の第2式と、式(6)の第2式は、式(7)の第1式とそれぞれ等しくなるので、 $\beta_1 < \beta_2$ となるような値をそれぞれの冪指数とし

て採用すると、係数 α_2, α_3 はそれぞれ

$$\alpha_2 = \frac{(-1)^n R_2 a^{\beta_2-1} \{4aA_4 + (n-3)A_3\} \beta_2}{24 \Delta_1 (n-3)! (\beta_2-3)} * \frac{-\{16aA_4 + 3(n-3)A_3\}}{(\beta_2-4)} \quad (8)$$

$$\alpha_3 = \frac{(-1)^{n-1} R_1 a^{\beta_1-1} \{4aA_4 + (n-3)A_3\} \beta_1}{24 \Delta_1 (n-3)! (\beta_1-3)} * \frac{-\{16aA_4 + 3(n-3)A_3\}}{(\beta_1-4)} \quad (9)$$

で与えられることになる。ただし

$$\Delta_1 = \frac{R_1 R_2 a^{\beta_1+\beta_2-7} (\beta_2-1)}{144(n-3)!(n-4)!(\beta_1-3)(\beta_1-4)(\beta_2-3)(\beta_2-4)}$$

また、係数 α_1, α_0 についてはそれぞれ

$$\alpha_1 = A_1 + \frac{(-1)^n R_1 a^{\beta_1-1}}{(n-1)! (\beta_1-1)} \alpha_2 + \frac{(-1)^n R_2 a^{\beta_2-1}}{(n-1)! (\beta_2-1)} \alpha_3 \quad (10)$$

$$\alpha_0 = A_0 - \frac{(-1)^n R_1 a^{\beta_1}}{n! \beta_1} \alpha_2 - \frac{(-1)^n R_2 a^{\beta_2}}{n! \beta_2} \alpha_3 \quad (11)$$

で与えることができる。このように、 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ の値を定めると

$$A_r = C_r \quad (r=0, 1, 2, \dots, 5) \quad (12)$$

とすることができる。

この場合の近似誤差は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(x) &\equiv f(x) - g(x) \\ &= \sum_{r=6}^n (A_r - C_r) x^r \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となり、6 次以上の高次項の打ち切り誤差は残るが、

$$A_r \cdot C_r > 0 \quad (14)$$

の場合には、通常多項式による打ち切り誤差に比べて、相対的に有利となる。

2.2 等比点補間法により求める最適近似式

前節の方法で得られた近似式を用いる場合の誤差は、与えられた区間の内部であっても、展開中心 a を離れると急激に増加するので、与えられた区間内（その両端を含めて）で最大偏差値の平坦化を図り

$$\sup |f(x) - g(x)| \quad 0 \leq x \leq 1$$

を最小にするような近似式、即ち、ミニマックス近似式を求めてみる。ところで、アナログ計算機での使用を前提として考えると、誤差電圧の絶対値だけではなく、その時間積分値の小さいことが望まれるので、

- (i) 与えられたパラメータの数に対し、近似区間内（その両端点を含んで）で、最多の離散根をもち、
- (ii) 離散根の間では、それぞれその絶対値の相等しい正および負の極値が、交互に現われるような振動形の誤差分布を生ずる

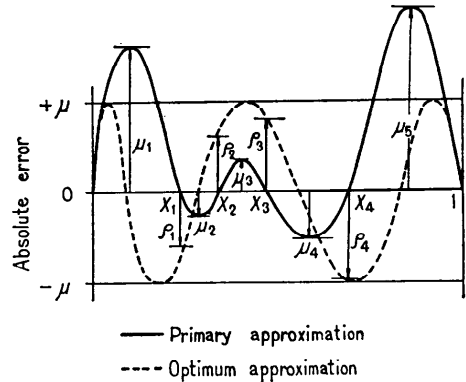


Fig. 1 Relation of error-curves between the primary and optimum approximations.

ように各パラメータ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ を与えなければならない。

いま、 $x=0$ および $x=1$ で、それぞれ真値をとり、 $0 < x < 1$ でその絶対値がたがいに相等しい正および負の極値が、交互に全部で5つ生ずるとき、区間内の適当な4つの離散点 X_i ($X_i < X_{i+1}$: $i=1, 2, 3, 4$) で、それぞれある偏差 ρ_i をとるとする (Fig. 1 参照)。

解法の便宜上

$$X_i = \lambda^{-(5-i)} \quad (\lambda > 1) \quad (15)$$

のように各点を x 軸上に配列し

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \alpha_0 \\ f(X_i) + \rho_i &= \alpha_0 + \lambda^{-1} \alpha_1 + \lambda^{-\beta_1} \alpha_2 + \lambda^{-\beta_2} \alpha_3, \\ f(1) &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

が成り立つものと仮定する。

式(16)の係数 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ および冪指数 β_1, β_2 の各値は、当然のことながら前節の方法で得られた各値とは相違する。

式(16)の ρ_i は、離散点 X_i での偏差値ではじめこれを零とおいて第1近似式を求め、それ以後は

$$\rho_i = \|\mu_i\| - \|\mu_{i+1}\| \cdot W \cdot \text{MAG}(\mu_i, \mu_{i+1}) \quad (17)$$

と置く。ここで、 W は計算の収束を加速するための「重み」であり、 $\text{MAG}(\mu_i, \mu_{i+1})$ は極値 μ_i および μ_{i+1} のうち、その絶対値の大きい方の符号が用いられるべきことを指示している。そして、 ρ_i の値を加減することによって、すべての極値が相等しくなるように $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ の値を修正するものである。

いま

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &\neq \beta_2, \quad \beta_1, \beta_2 \neq 1, \\ \lambda^{-\beta_1} \cdot \lambda^{-\beta_2} &= Z > 0, \\ \lambda^{-\beta_1} + \lambda^{-\beta_2} &= Y > 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

と置くと、式(16)よりつぎの関係が得られる。

$$F_1 Y^2 + F_2 Y + F_3 = 0 \quad (19)$$

ただし

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{f_3^2}{f_4} \left(\frac{f_3}{f_4} - \frac{f_2}{f_3} - \lambda^{-1} + \lambda^{-2} \frac{f_4}{f_3} \right), \\ F_2 &= \frac{f_3^2}{f_4} \left(\frac{f_1}{f_3} - 2 \frac{f_2}{f_4} + \frac{f_2^2}{f_3^2} + 2 \lambda^{-1} \frac{f_3}{f_4} - \lambda^{-2} \left(2 + \frac{f_2 f_4}{f_3^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda^{-3} \frac{f_4}{f_3} \right), \\ F_3 &= \frac{f_3^2}{f_4} \left(\frac{f_2}{f_3} - \lambda^{-1} \right) \left(\frac{f_2}{f_4} - \frac{f_1}{f_3} - \lambda^{-1} \frac{f_3}{f_4} + \lambda^{-2} \right) \end{aligned}$$

さらに

$$f_i = f(X_i) - f(0) - \lambda^{-(5-i)} f(1) + \lambda^{-(5-i)} f(0) + \rho_i, \quad i=1, 2, 3, 4$$

とする。2次方程式(19)の2根を $Y_1, Y_2 (Y_1 \neq Y_2)$ とすると、これらの2根の値は

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2F_1} (-F_2 + \sqrt{F_2^2 - 4F_1F_3}) \\ Y_2 &= \frac{1}{2F_1} (-F_2 - \sqrt{F_2^2 - 4F_1F_3}) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

のように表わされる。Zについても同様に

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \left(\frac{f_3}{f_4} - \lambda^{-1} \right) Y_1 - \frac{f_3}{f_4} \left(\frac{f_2}{f_3} - \lambda^{-1} \right) \\ Z_2 &= \left(\frac{f_3}{f_4} - \lambda^{-1} \right) Y_2 - \frac{f_3}{f_4} \left(\frac{f_2}{f_3} - \lambda^{-1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

のように与えることができる。

これらの関係を式(18)に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 &= - \frac{\log \left\{ \frac{1}{2} (Y_1 + \sqrt{Y_1^2 - 4Z_1}) \right\}}{\log \lambda} \\ \text{または} \\ &= - \frac{\log \left\{ \frac{1}{2} (Y_1 - \sqrt{Y_1^2 - 4Z_1}) \right\}}{\log \lambda} \\ \text{または} \\ &= - \frac{\log \left\{ \frac{1}{2} (Y_2 + \sqrt{Y_2^2 - 4Z_2}) \right\}}{\log \lambda} \\ \text{または} \\ &= - \frac{\log \left\{ \frac{1}{2} (Y_2 - \sqrt{Y_2^2 - 4Z_2}) \right\}}{\log \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

のように4通り与えられ、これに対応して

$$\beta_1 = -\beta_2 - \frac{\log Z}{\log \lambda} \quad (23)$$

も4通り与えられることになる。ところで

$$\begin{aligned} &\left\{ \lambda^{-\beta_1} - \left(\frac{f_3}{f_4} - \lambda^{-1} \right) \right\} \left\{ \lambda^{-\beta_2} - \left(\frac{f_3}{f_4} - \lambda^{-1} \right) \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{f_3}{f_4} - \lambda^{-1} \right)^2 - \left(\frac{f_2}{f_4} - \lambda^{-1} \frac{f_3}{f_4} \right) \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

で示されるように、 $\lambda^{-\beta_1}, \lambda^{-\beta_2}$ の各値は、 $\lambda^{-\beta_1}, \lambda^{-\beta_2}$ 平面上で、 $(f_3/f_4) - \lambda^{-1}$ を漸近線とする放物線上にあり、 $\lambda^{-\beta_1} = \lambda^{-\beta_2}$ を対称軸として、その両側に分布する(原理的には、 β_1 と β_2 には、それぞれ4種類の値が存在するが、 $\beta_1 < \beta_2$ のように定義すると、 β_1 および β_2 のとり得る値はそれぞれ2種類となる)ので、これらの中から式(16)を満足するものを選び、それぞれを、 β_1 および β_2 とすればよい。従って、 α_2, α_3 については

$$\alpha_2 = \frac{1}{\Delta_2} \{ (-\lambda^{-3} + \lambda^{-3\beta_1}) f_1 - (-\lambda^{-4} + \lambda^{-4\beta_1}) f_2 \}, \quad (25)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\Delta_2} \{ (-\lambda^{-4} + \lambda^{-4\beta_1}) f_2 - (-\lambda^{-3} + \lambda^{-3\beta_1}) f_1 \} \quad (26)$$

のように求め、 α_1 については

$$\alpha_1 = f(1) - f(0) - \alpha_2 - \alpha_3 \quad (27)$$

と与えればよい。 α_0 については、式(16)から直ちに

$$\alpha_0 = f(0) \quad (28)$$

のように求められる。ここで

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (-\lambda^{-4} + \lambda^{-4\beta_1})(-\lambda^{-3} + \lambda^{-3\beta_2}) \\ &\quad - (-\lambda^{-4} + \lambda^{-4\beta_2})(-\lambda^{-3} + \lambda^{-3\beta_1}) \end{aligned}$$

である。

実際のアナログ模擬では、再生系の定数設定の不正確さによる誤差の方が近似式固有の誤差より大きくなりがちなので、実数乗項を1つ省略した近似式を用いても、実用上充分な精度で目的関数の発生が期待される。この場合の近似式^{(4),(5)}は、前述の解法で $\beta_1=1$ としても与えることができる。

3. 数値計算

最適近似の条件をどの程度満足したかを判定する目安として、最大偏差値の絶対値の最小値と最大値との比をとり、この値が0.9999を越えたものを終局の近似式とした。このようにして得られた近似式のいくつかの例を、最大偏差値とともに Table 1 (708 頁参照) と掲げる。さらに、Fig. 2 (次頁~708 頁参照) には、 $\cosh(x) (0 \leq x \leq 1)$ を実数乗近似する場合の各係数および乗指数の値を求めるプログラムとその結果を、また、(708 頁に続く)

```

YJ08      NOCC
C          FRACTIONAL POWERS APPROXIMATION
C          F(X)=A0+A1*X+A2*X**FM1+A3*X**FM2
C
1 DIMENSION XA(2),XX(5),EY(5)
2 COMMON /HARE/I
3 COMMON /AME/A0,A1,A2,A3,FM1,FM2
4 CALL SETSF(IH,X)
5 READ(10,110) I,ALH,ESTD,HEI,W
6 WRITE(6,888) I,ALH,ESTD,HEI,W
7 888 FORMAT('H ',T13,' INPUT DATA'//T15,I3,2E15.7/
8     *T18,2E15.7//)
9 C 110 FORMAT(I3,4E15.7)
10 FUNCTION NAME
11 GO TO (11),I
12 WRITE(6,511)
13 511 FORMAT('H ',T13,' OUTPUT DATA'//
14     *T30,'***** COSH(X) *****')
15 C BEST APPROXIMATION
16 XI=X1/ALH
17 XII=XIV/ALH
18 XIO=XII/ALH
19 XO1=XIO/ALH
20 AO=FS(O.O)
21 AA=FS(1.U)
22 HINT=U.O
23 FL1=HINT
24 FL2=HINT
25 FL3=HINT
26 FL4=HINT
27 FFL1=HINT
28 FFL2=HINT
29 FFL3=HINT
30 FFL4=HINT
31 FI=F(F3-XIO)-AO-AA*XOI+AU*XOI+FL1
32 F2=FS(XIC)-AO-AA*XIC+AD*XIO+FL2
33 F3=FS(XII)-AO-AA*XII+AD*XII+FL3
34 F4=FS(XIV)-AO-AA*XIV+AD*XIV+FL4
35 A=F3/F4-XIV
36 C=(XIV-F3-F2)/F4
37 AO1=F3*(XII+XIV+A+AA*2)-F2*(XIV+A)
38 A10=F1*(XIV+A)-F2*(XIV*2+C)+F3*(XIV+C)
39 *2.(U+AC-A*XI*V*2)
40 A11=C-(F3*(C-XIV*2)+F1)
41 I1=I1+1
42 CALL ORDER2(AO1,A1C,A1I,XA,KOR)
43 AO1=1.U
44 IF(KOR.EQ.3) GO TO 3000
45 PR=XAC(1)
46 A10=FR
47 A11=A+PR*C
48 CALL ORDER2(AO1,A10,A1I,XA,KCR)
49 IF(KOR.EQ.3) GO TO 3001
50 X=XAC(1)
51 Y=PH-X
52 IF(Y.LE.O.O) GO TO 3000
53 AALOG=ALOG10(ALH)
54 FM1=-ALOG10(X)/AALOG
55 FM2=-ALOG10(X)/AALOG
56 DELTA=XIO*(Y*2-X*2)+XII*(X*3-Y*3)+
57 *(X*Y)*2*(Y-X)
58 A2=(F3*(Y*3-XIO)-F2*(Y*2-XII))/DELTA
59 A3=(F2*(X*2-XII)-F3*(X*3-XIO))/DELTA
60 A1=AA-AO-A2-A3
61 CALCULATION OF THE PEAK
62 J1=U
63 X=O.O
64 DX=O.O5
65 ERR1=FS(X)-F(X)
66 XX2=X+DX
67 ERR2=FS(XX2)-F(XX2)
68 XX3=X+DX+DX
69 ERR3=FS(XX3)-F(XX3)
70 EER1=ERR2-ERR1
71 EER2=ERR3-ERR2
72 ERER=EER1-EER2
73 IF(ERER) 500,50J,600
74 X=X+DX
75 GO TO 700
76 EE=ABS(EER1)
77 IF(EE-ESTD) 800,90S,909
78 DX=DX*O.5
79 GO TO 700
80 OUTPUT OF THE ANSWER OF EACH STEP
81 J1=J1+1
82 XX(J1)=X+DX
83 XAA=X(XJ1)
84 EY(J1)=FS(XAA)-F(XAA)
85 X=XX(J1)
86 IF(J1-5) 800,890,890
87 EFF1=ABS(EY(1))-ABS(EY(2))
88 EFF2=ABS(EY(2))-ABS(EY(3))
89 EFF3=ABS(EY(3))-ABS(EY(4))
90 EFF4=ABS(EY(4))-ABS(EY(5))
91 EEMAX=ABS(EY(1))
92 FEMIN=ABS(EY(1))
93 DO 9 JJ=2,5
94 IF(EEMAX-ABS(EY(JJ))) .1,1,2
95 EEPMAX=ABS(EY(JJ))
96 GO TC 9
97 2 IF(EEMIN-ABS(EY(JJ))) 9,9,3
98 EEMIN=ABS(EY(JJ))
99 CONTINUE
100 HIN=(EEMIN/EEMAX)*100.O
101 IF((I.NE.1) GO TO 220
102 WRITE(6,333) I,HIN
103 WRITE(6,313) AO,A1
104 WRITE(6,444) A2,A3
105 WRITE(6,593) F,F2
106 WRITE(6,302) (JI,XX(JI),EY(JI),JI=1,5)
107 333 FORMAT(/'/SX,12HITERATIONS=.13,4X,
108     *19NRATIO OF BEST FIT =.E15.7/)
109 313 FORMAT(1H ,5X,3HAU=,E20.11,5X,3HA1=,E20.11)
110 444 FORMAT(1H ,5X,3HA2=,E20.11,5X,3HA3=,E20.11)
111 593 FORMAT(1H ,4X,4HFM1=,E20.11,4X,4HFM2=,
112     *E20.11/)
113 302 FORMAT(1H ,5X,3HXC(,13,2H)=,E17.10,5X,
114     *SHEMAX=,E17.10)
115 C CHECK OF BEST FIT
116 220 IF(HINT.GE.HEI) GO TO 300
117 HINT=ABS(HIN)
118 IF(HINT-HEI) 3200,101,101
119 3200 FFL1=ABS(EFF1)*W
120 FFL2=ABS(EFF2)*W
121 FFL3=ABS(EFF3)*W
122 FFL4=ABS(EFF4)*W
123 EV1=EY(1)
124 EV2=EY(2)
125 EV3=EY(3)
126 EV4=EY(4)
127 EV5=EY(5)
128 IF(EFF1) 41,41,42
129 41 FFL1=-SIGN(FFL1,EV1)
130 GO TO 25
131 FFL1=-SIGN(FFL1,EV2)
132 IF(EFF2) 43,43,40
133 43 FFL2=-SIGN(FFL2,EV2)
134 GO TO 45
135 FFL2=-SIGN(FFL2,EV3)
136 IF(EFF3) 50,50,60
137 50 FFL3=-SIGN(FFL3,EV3)
138 GO TO 65
139 FFL3=-SIGN(FFL3,EV4)
140 IF(EFF4) 70,70,80
141 70 FFL4=-SIGN(FFL4,EV4)
142 GO TO 75
143 FFL4=-SIGN(FFL4,EV5)
144 GO TO 999
145 3000 WRITE(10,111)
146 GO TC 300
147 3001 WRITE(10,112)
148 GO TC 300
149 111 FORMAT('H ',T5,'Y*(XM1+XP2)---',
150     *T20,'(IMAG.,ZERO,NEGA.)')
151 112 FORMAT('H ',T5,'XM1 --- (IMAG.,ZERO,NEGA.)')
152 STOP
153 END
154 SUBROUTINE ORDER2(AO1,A1C,A1I,XA,KOR)
155 2ND ORDER EQUATION
156 AO1,A10,A11---COEFFICIENTS(REAL)
157 KOR1=---ONE ROOT
158 KOR2=---TWO ROOTS
159 KOR3=---NOTHING(IMAG.,ZERO,NEGA.)
160 DIMENSION XA(2)
161 IF(AO1.EQ.0.0) GO TO 10
162 B=AO1*A1C
163 D=A10*2-4.*B/AO1*A1I
164 IF(D) 20,30,40
165 KOR=3
166 RETURN
167 30 XA(1)=-A10/B
168 GO TO 50
169 XA(1)=-A11/A10
170 IF(XA(1).LE.O.U) GC TO 20
171 KOR=1
172 RETURN
173 40 XA(1)=(-A10+SQR(D))/B
174 XA(2)=(-A10-SQR(D))/B
175 IF(XA(1).GT.O.U) GO TC 60
176 IF(XA(2).LE.O.O) GC TO 20
177 XA(1)=XA(2)
178 GO TC 70
179 IF(XA(2).LE.O.O) GO TO 70
180 60 KOR=2
181 RETURN
182 END
183 FUNCTION FS(X)
184 COMMON /HARE/I
185 GO TO (11),I
186 FS=CCSH(X)
187 RETURN
188 END

```

```

1      FUNCTION F(X)
2      COMMON /AME/AU,A1,A2,A3,FM1,FM2
3      F=AU+A1*X+A2*X**FM1+A3*X**FM2
4      RETURN
5      END

INPUT DATA
      1  0.1386277E 01  0.1000000E-09
        0.9999000E 02  0.3000000E 00

OUTPUT DATA
      ***** COSH(X) *****

ITERATIONS = 1      RATIO OF BEST FIT = 0.2629070E 01
      A0= 0.100000000000E 01  A1= 0.39815940090E-03
      A2= 0.50210242244E 00  A3= 0.40580052934E-01
      FM1= 0.2004553382E 01  FM2= 0.41425578443E 01

      XX( 1)= 0.6328125000E-01  EMAX=-0.8273171261E-05
      XX( 2)= 0.3187500000E 00  EMAX= 0.2175074769E-06
      XX( 3)= 0.4562500000E 00  EMAX=-0.2341928552E-06
      XX( 4)= 0.6468749595E 00  EMAX= 0.7822818598E-06
      XX( 5)= 0.9164062499E 00  EMAX=-0.6557907909E-05

ITERATIONS = 30      RATIO OF BEST FIT = 0.9599260E 02
      A0= 0.100000000000E 01  A1= 0.21057173171E-03
      A2= 0.50202743965E 00  A3= 0.40842623388E-01
      FM1= 0.20034553447E 01  FM2= 0.41395501775E 01

      XX( 1)= 0.3710937500E-01  EMAX=-0.2752043656E-05
      XX( 2)= 0.2058593750E 00  EMAX= 0.2752014552E-05
      XX( 3)= 0.4656250000E 00  EMAX=-0.2752130568E-05
      XX( 4)= 0.7390624995E 00  EMAX= 0.2752101864E-05
      XX( 5)= 0.9437499999E 00  EMAX=-0.2752218279E-05

```

Fig. 2 Program for the optimum fractional powers approximation and its output data.

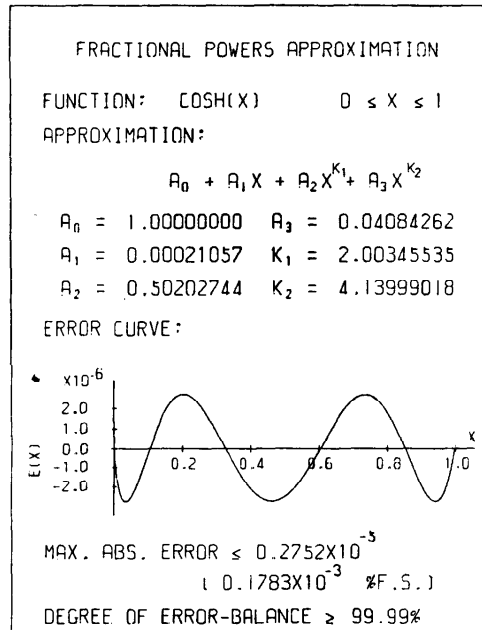


Fig. 3 Error-curve given by the optimum fractional powers approximation of cosh(x). (This figure is drawn by a curve plotter.)

Table 1 Optimum fractional powers approximations furnishing more than 0.9999 of error-balance* $0 \leq x \leq 1$

Functions	Minimax Fractional Powers Approximations*	Max. Abs. Errors	Full Scale Errors (%)
exp(x)	$1.000000000 + 1.002261347x + 0.571024656x^2 - 0.08645633x^3 + 0.144995825x^4 - 0.69410965x^5$	0.2193×10^{-4}	0.8068×10^{-3}
sinh(x)	$0.000000000 + 1.000004326x + 0.167050467x^2 - 0.001831807x^3 + 0.008164400x^4 - 0.111802739x^5$	0.1839×10^{-4}	0.1565×10^{-3}
cosh(x)	$1.000000000 + 0.000210572x + 0.502027440x^2 - 0.003455345x^3 + 0.408426234x^4 - 0.189990178x^5$	0.2752×10^{-5}	0.1783×10^{-3}
$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$	$0.000000000 + 1.570689523x - 0.658293404x^2 - 0.12203203x^3 + 0.087603880x^4 - 0.708003679x^5$	0.4318×10^{-5}	0.4318×10^{-3}
$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$	$1.000000000 - 0.003533570x - 1.281127771x^2 - 0.027488275x^3 + 0.284661341x^4 - 0.624862310x^5$	0.4250×10^{-4}	0.4250×10^{-3}
erf(x)	$0.000000000 + 1.127857706x - 0.660091651x^2 - 0.214327565x^3 + 0.374934738x^4 - 0.780894092x^5$	0.1871×10^{-4}	0.2220×10^{-3}

* Error-balance is defined by the ratio of the minimum to the maximum in absolute extremal deviations

Fig. 3 には、得られた近似式の誤差曲線を示す。なお、数値計算にあたっては、TOSBAC-3400/21 を使用した。

4. 検 討

(i) 最適近似の条件

このようにして求めた近似式を用いると、与えられた区間の両端点は、偏差点ではなく零誤差点となっているので、両端点を偏差点として求めた近似式を用い

る場合と比べて零誤差点の数は同じであるが、正・負偏差点の数の合計は2つ少なく、従って、最大偏差値の絶対値も若干大きくなる。換言すると、本文で求めた最適近似式は、 N 個のパラメータをもつ通常の意味での最良近似式での第1零誤差点から第 N 零誤差点までの間を近似区間とする近似式である (Fig. 4 および Fig. 5 (次頁参照))。

(ii) 近似精度

このようにして求めた近似式を用いると、式中の実

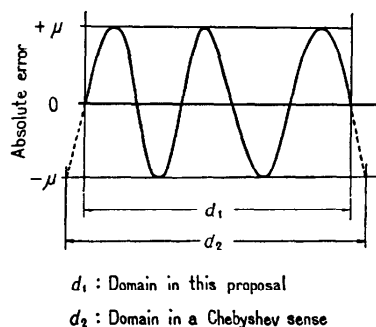


Fig. 4 Different domains of optimum approximations with the same absolute extremal deviations.

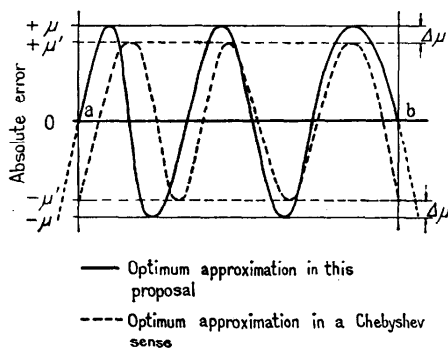


Fig. 5 Typical error-curves of different approximations in the same domain $[a, b]$.

数幂項の特性は、その係数と指数の2種類のパラメータで定まるので、指数値は固定で、その係数値のみ可変の通常の数幂の2項分に対応させることができる。このように実数幂近似式を用いると、大抵の解析関数の近似に当って、それと同じ数のパラメータをもつ多項式を用いた場合の近似精度に、ほぼ匹敵する近似精度が、より少ない項数の代数式で得られるので、再生系をより簡単化し得る利点がある。一般に、展開多項式が正項級数となる関数に対する近似では、係数、幂指数を求める段階で考慮しなかった高次項が差し引きされるので、良好な近似精度が得られる。特に、奇数項だけをもつ級数に展開される関数を近似する場合、打ち切り誤差の第1項が存在しないので、通常が多項式を用いる場合よりも良好な結果が得られる。また、近似区間が広がるに従って、展開式での高次項の影響がよく利いてくるので、精度は劣化していくが、劣化の程度は通常の数幂式を用いる場合に比べ緩慢である。なぜならば、この方式の近似では、幂指数の値を大きくとることによって、高次項の影響に対応させること

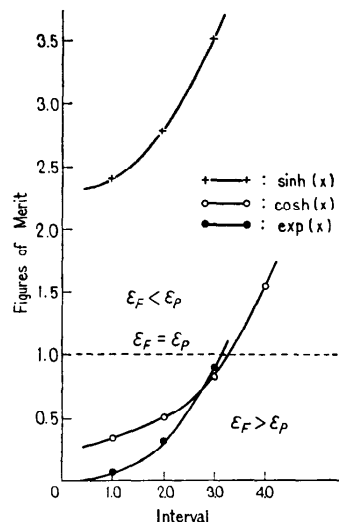


Fig. 6 Figures of Merit for both approximations using fractional powers and ordinary powers in the same interval. (Figure of Merit is given by EPA/EFPA, where, EPA and EFPA show the absolute errors due to the minimax polynomial approximation of the fifth degree ϵ_P and due to the minimax fractional powers approximation ϵ_F respectively.)

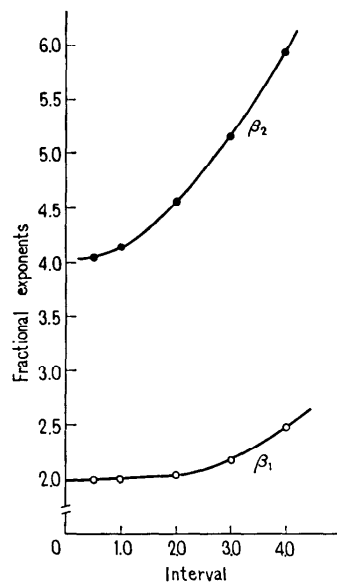


Fig. 7 Values of fractional exponents corresponding to extensions of the interval.

ができるからである。Fig. 6 および Fig. 7 にこれらの関係を図示する。

(iii) 最適化手法

最適近似式を求めるに当っては、補間法によって求めた近似式を逐次近似的に修正する方が便利である。この場合、一般には、補間点位置のシフト量と、これに対応する最大偏差値の増分とを線形化して解く方法が用いられるが、この方法によると、修正計算の都度マトリクスの全要素の値を更新しなければならない。筆者らはこれをさけて、補間点の位置を修正の全過程を通して固定し、替りに、補間点から測った誤差を最大偏差値に関連づけ、この値を更新することによって、補間点をシフトすると同様の効果が得られるようにした。この方法では、隣接最大偏差値の絶対値の差につける「重み」を適当に与えることによって、通常の方法よりも効果的に最適化を進めることができる。

(iv) 重み (W)

最適化手法については、振動を抑制し、しかも、収束を加速するために、適当な重みを採用する必要がある。その値は、関数の種類に応じて与えられねばならないが、筆者等の試算では、 $(1/3 \sim 1/20)$ の範囲で選んでおけば、大抵の初等関数の近似に当って、良好な結果を得ることができる。

5. 結 論

ここで求めた近似式は、非直線性入出力伝達特性をもつ素子の、実解析的な一様連続性を利用して、継目をつくらずに、実解析的関数のアナログ模擬を行うのに適するものとして提案されたものである。

静的にも動的にも優れたアナログ模擬を行うには、式中に所要パラメータの数が少なく、変数同志の乗除算を含まず、なるべく少ない数の項で、手頃な精度が得られるような近似式を、再現する方法によることが望ましい。本近似式は、それ自身の精度の良さと、そ

の再現性の簡単さを同時にかなえるものと思われる。

本文では、アナログ計算機での使用を考慮して最適近似の条件を設定し、これを満たすような各パラメータの値を決定する方法について述べた。なお、近似式の最適化を補間点（本例では、第1近似式の零誤差点とした。）での偏差調整によって行う方法は、修正計算の全過程を通して補間点を固定しておけるので便利であり、他の形式の近似式の最適化にも応用することができる。

実数逼近の精度そのものについて言えば、大抵の実解析関数に対する適用例からみても、同じ数のパラメータをもつ多項式を用いる場合のそれに、ほぼ匹敵することがわかる。

参 考 文 献

- 1) A. Cantoni: Optimal Curve Fitting with Piecewise Linear Functions, IEEE Trans. Comput., Vol. C-20, No. 1, pp. 59~67 (1971).
- 2) 小林, 大北, 千葉: 任意関数発生装置, 特公, 昭 50-9537.
- 3) A. Nathan: Linear and Nonlinear Interpolators, IEEE Trans. Electronic Comput., Oct., pp. 526~532 (1963).
- 4) Y. Kobayashi, M. Ohkita and M. Inoue: Fractional Power Approximation and Its Generation, Proc. AICA, Vol. 18, No. 2, (1976).
- 5) 小林, 大北, 井上: 実数逼近を利用する関数発生, 電気学会 (昭和 51 年 8 月号に掲載決定).
- 6) 小林, 大北, 井上: 対数増幅器を用いる任意関数発生器, 電通学会全国大会予稿集, 585 (July 1974).
- 7) Burr-Brown Res. Co. catalog: Multifunction Converter, Model 4301 (Oct. 1974).

(昭和 50 年 7 月 17 日受付)

(昭和 50 年 11 月 10 日再受付)