

帯状パターンによる魚眼レンズカメラの高精度な校正

森 安 亮 太^{†1} 中 村 遼 平^{†1} 金 谷 健 一^{†1}

異なる向きの帯状パターンを描いた複数の参照板を用いて超広角魚眼レンズカメラの撮像歪を除去する校正法を示す。基本原理は、歪を除去した後に同一直線上にあるべき点列が同一直線上にある共線条件、平行であるべき点列が平行である平行条件、直交すべき点列が直交する直交条件によって補正パラメータを定めるものである。カメラに対する参照板の位置は任意でよい。補正式としては立体射影の式に観測量のべき展開の補正項を付加する。そして、点列への直線当てはめが固有値問題に帰着することを利用して固有値問題の厳密な摂動解析を行い、任意個数の補正係数を最適化する一般的な公式を導出する。最後に実際の魚眼レンズカメラと大型ディスプレイを用いた実験を行い、直交条件が本質であり、共線条件と平行条件のみでは正しい校正ができないことを示す。また実際問題への応用例を示す。

High Accuracy Calibration of Fisheye Lens Cameras Using Stripe Patterns

RYOTA MORIYASU,^{†1} RYOHEI NAKAMURA^{†1}
and KENICHI KANATANI^{†1}

We present a procedure for unwarping image distortions of ultra-wide fisheye lens cameras, using multiple stripe patterns with different orientations. We determine the coefficients of the unwarping equation so that collinear points are unwarping to be collinear, parallel lines to be parallel, and orthogonal lines to be orthogonal. The reference planes can be placed arbitrarily. We adopt as the unwarping equation the stereographic projection model, to which correction terms are added as a power expansion in observables. Exploiting the fact that line fitting to a point sequence reduces to an eigenvalue problem, we do a rigorous perturbation analysis of eigenvalue problems to obtain a general formula for optimizing an arbitrary number of parameters. Finally, we do experiments using a real fisheye lens camera and a large screen video display and point out that the orthogonality constraint is essential and that the collinearity and the parallelism alone are insufficient to constraint the solution. We also show some practical applications.

^{†1} 岡山大学大学院自然科学研究科
Department of Computer Science, Okayama University, Japan

1. ま え が き

魚眼レンズカメラ（以下「魚眼カメラ」と略記）は広い視野が同時に観測できるため、監視カメラとして広く用いられているほか、車両に搭載して道路上の障害物を検出したり、自車位置を認識したり¹⁶⁾、俯瞰画像（自車を上方から見下ろしたような画像^{9),17)}）を作成するなど種々の用途に用いられている。しかし、魚眼カメラで撮影した画像（以下「魚眼画像」と略記）には大きな歪があるため、対象物とカメラとの相対位置を計算するには、画像をまず透視投影画像に変換し、それからコンピュータビジョンの種々の技法を適用する。この変換としてレンズメーカーが提供する式は必ずしも厳密とは限らないので、精密な解析にはユーザーが参照板を用いて校正を行う必要がある。そして、そのような試みがいろいろ報告されている^{2),5)-7),10)-13)}。

従来から参照パタンの位置情報を用いる方法が中心であったが^{2),5)}、本論文で扱う魚眼レンズは超広角（画角がほぼ 190 度）であり、無限に広い参照パターンを用いても画像を覆うことができない。これを解決する方法として考えられるのが Devernay ら¹⁾ が 2001 年に発表した同一直線上のあるべき点列（魚眼画像上では曲線状）が同一直線上にあるよう補正する「共線条件」を用いることである（これは小野寺ら¹⁴⁾ が既に 1992 年に発表していることはあまり知られていない）。そして中野ら¹¹⁾、加瀬ら⁶⁾、Okutsu ら¹²⁾ がこの Devernay ら¹⁾ の共線条件による校正法を示している。駒形ら⁷⁾ はさらに平行であるべき点列が平行である、直交すべき点列が直交するという「平行条件」、「直交条件」を導入した。本論文はこの駒形ら⁷⁾ の方法を採用するとともに、実験によって直交性が重要な役割を果たすことを示し、中野ら¹¹⁾、加瀬ら⁶⁾ や Okutsu ら¹²⁾ の方法では本質的に正しい校正ができないことを明らかにする。これは本論文の新発見である。

校正の原理は補正式の反復的な修正、すなわち現在の補正式によって補正した点列に直交する平行線列を当てはめ、その当てはめ残差をさらに減少させるように補正式を修正することである。中野ら¹¹⁾ や加瀬ら⁶⁾ も直線当てはめを用いているが、当てはめ直線として適当に選んだ 2 点を通る直線を用いている。それに対して駒形ら⁷⁾ はすべての点に最小二乗法を適用している。本論文でも最小二乗法を用いる。ただし、駒形ら⁷⁾ は当てはめ残差を評価していない。本論文では直線当てはめが固有値問題に帰着し、当てはめ残差が最小固有値に等しいという事実を利用し、最小固有値が減少するように補正式を修正する。この最小固有値の変化は固有値問題の摂動定理³⁾ によって評価できる。これが小野寺ら¹⁴⁾ の指摘である。本論文では小野寺ら¹⁴⁾ に従って固有値問題の厳密な解析を用いる。

補正式として Kannala ら⁵⁾、中野ら¹¹⁾、加瀬ら⁶⁾ は、画像上の観測位置を光線の入射方向（未知数）に関して展開した多項式を用いている。しかし、これでは最適化の毎回の反復

で高次方程式を解いて、入射方向を観測位置について表す必要がある。そのために Kannala ら⁵⁾ は近似解法を、中野ら¹¹⁾ や加瀬ら⁶⁾ は数値計算ツールを用いているが、これでは精度が失われる上に実行が非効率になり、未知数を 3 個以上に増すのが困難となる。本論文では駒形ら⁷⁾ と同様に、補正項として観測量に関する多項式を用い、任意個数のパラメータに関する最適化手順を導く。また駒形ら⁷⁾ にならって立体射影式に補正項を加える。これにより最適化の反復において補正項の初期値を 0 から始めることができる (Kannala⁵⁾、中野ら¹¹⁾、加瀬ら⁶⁾ は 3 個の未知係数を持つ 5 次式を用いているため、初期値を何らかの方法で推定する必要がある)。

校正精度はデータ獲得の精度に大きく依存する。本論文では駒形ら⁷⁾ にならい、大型ディスプレイに複数方向の帯パターンを表示し、これを撮影した魚眼画像からエッジ検出を行ってデータとする。駒形ら⁸⁾ はさらに輝度傾斜パターンによるエッジ検出の高精度化も試みている。従来、パターン画像のみでは不十分であり、何らかの直接的な計測が必要であると報告されている。例えば中野ら^{10),11)} や Hughes ら²⁾ は楕円当てはめによる消失点の推定から光軸に直交する方向を推定し、奥津ら¹³⁾ はこれを手動により抽出している。本論文の実験結果によれば、このような直接的な計測は、従来知られていなかった共線条件と平行条件の本質的な情報不足を補うものと解釈される。本論文では、直交性まで含めた駒形ら⁷⁾ の方法を本論文に示す固有値問題の摂動解析によって精密化すれば直接的計測なしに高精度な魚眼カメラ校正ができることを示す。最後に実際問題への応用例を示す。

2. 魚眼レンズによる撮像

本論文では最近よく用いられる「立体射影」による魚眼レンズを考える (それ以外の射影方式に対しても以下の校正原理は同一である)。これは光軸と角度 θ で入射する光が画像面の光軸点から次の距離 r (画素) の点に投影されるものである (図 1)。

$$r = 2f \tan \frac{\theta}{2} \quad (1)$$

ここに f (画素) は焦点距離である。しかし、光軸点の位置 (u_0, v_0) が厳密に画像フレームの中心にあるとは限らず、 f の値も公称値からずれている可能性がある。これを補正するために Kannala ら⁵⁾、中野ら¹¹⁾、加瀬ら⁶⁾ は $r = c_1\theta + c_2\theta^3 + c_3\theta^5$ の形を仮定して c_1, c_2, c_3 を定めているが、これでは最適化の毎回の反復で近似解法または数値計算ツールを用いてこの 5 次方程式を解き、 θ を r について表す必要がある。これは精度が損なわれ、実行が非効率になり、未知数を 3 個以上に増やすのが難しい主な原因になっている。そこで本論文では次の補正式を用いる。

$$\frac{r}{f_0} + a_1 \left(\frac{r}{f_0} \right)^3 + a_2 \left(\frac{r}{f_0} \right)^5 + \dots = \frac{2f}{f_0} \tan \frac{\theta}{2} \quad (2)$$

ただし、 f_0 はスケール定数であり、実験では $f_0 = 150$ (画素) とした。奇数次の項しかないのは r が θ の奇関数であるためであり、レンズが光軸の回りに回転対称に製造されていることによる。本論文では画像面上の投影点の光軸点からの方位角は光の入射の方位角と等しいとする。過去には方位にも歪みがあるとして「接線方向歪補正」がよく研究された¹⁵⁾。これは光軸点を中心とする円形領域が楕円に歪むような方向依存性を考慮するものである。しかし、現在の技術では撮像はほぼ回転対称であり、特に考慮する必要はないとされている (接線方向の補正係数を加えても以下の校正原理は同一である)。式 (2) の左辺の最初の項 r/f_0 には係数がないが、これは右辺の f に吸収されているためである。 $a_1 = a_2 = \dots = 0$ とした場合が式 (1) の立体射影となる。式 (2) より、 r と f と係数 $a_1, a_2, \dots$ を与えたときの入射角 θ は次のようになる。

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left(\frac{f_0}{2f} \left(\frac{r}{f_0} + a_1 \left(\frac{r}{f_0} \right)^3 + a_2 \left(\frac{r}{f_0} \right)^5 + \dots \right) \right) \quad (3)$$

式 (2) は駒形ら⁷⁾ の考え方を拡張したものであるが、駒形ら⁷⁾ は 3 個の展開項をしか用いていない。そして最適化にはパラメータ空間を直接的に探索する原始的な方法 (プレント法、パウエル法) を用いている (加瀬ら⁶⁾ の具体的な最適化法は論文からは明らかではない)。本論文では今日最も合理的な最適化法とされるレーベンバーグ・マーカート法⁴⁾ の手順を具体的に導く。

3. 入射光ベクトルとその微分

画像上の位置 (x, y) に写る点の光の入射方向を示す単位ベクトル (以下「入射光ベクトル」と略記) を m とする (図 1)。極座標を用いると次のように書ける。

$$m = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここに θ は光線の入射角 (光軸となす角)、 ϕ は方位角 (x 軸からの角度) である。前述のように、画像上の方位角は入射光線の方位角と同じであると仮定する。したがって、光軸点を (u_0, v_0) とすると、次の関係が成り立つ。

$$x - u_0 = r \cos \phi, \quad y - v_0 = r \sin \phi, \quad r = \sqrt{(x - u_0)^2 + (y - v_0)^2} \quad (5)$$

ゆえに式 (4) は次のように書ける。

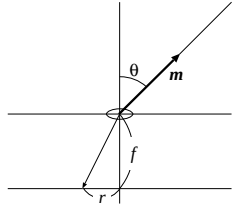


図 1 魚眼レンズによる撮像の幾何学的関係と入射光ベクトル m .

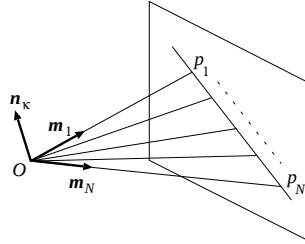


図 2 点列 $p_1, \dots, p_N$ が共線 (同一直線上にある) のとき, 各方向ベクトル m_α は同一平面上にある .

$$m = \begin{pmatrix} ((x - u_0)/r) \sin \theta \\ ((y - v_0)/r) \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

これを u_0, v_0 で微分すると次のようになる .

$$\frac{\partial m}{\partial u_0} = -\frac{\sin \theta}{r} i, \quad \frac{\partial m}{\partial v_0} = -\frac{\sin \theta}{r} j \quad (7)$$

ただし, $i = (1, 0, 0)^\top, j = (0, 1, 0)^\top$ である . 次に f に関する微分を考える . 式 (2) の両辺を f で微分すると次のようになる .

$$0 = \frac{2}{f_0} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{2f}{f_0} \frac{1}{2 \cos^2(\theta/2)} \frac{\partial \theta}{\partial f} \quad (8)$$

ゆえに $\partial \theta / \partial f$ は次のようになる .

$$\frac{\partial \theta}{\partial f} = -\left(\frac{2}{f_0} \tan \frac{\theta}{2}\right) \left(\frac{f_0}{f} \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) = -\frac{2}{f} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{f} \sin \theta \quad (9)$$

したがって式 (6) の f に関する微分は次のようになる .

$$\frac{\partial m}{\partial f} = \begin{pmatrix} ((x - u_0)/r) \cos \theta \\ ((y - v_0)/r) \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial f} = -\frac{1}{f} \sin \theta \begin{pmatrix} ((x - u_0)/r) \cos \theta \\ ((y - v_0)/r) \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (10)$$

最後に a_k に関する微分を考える . 式 (2) の両辺を a_k で微分すると次のようになる .

$$\left(\frac{r}{f_0}\right)^{2k+1} = \frac{2f}{f_0} \frac{1}{2 \cos^2(\theta/2)} \frac{\partial \theta}{\partial a_k} \quad (11)$$

ゆえに $\partial \theta / \partial a_k$ は次のようになる .

$$\frac{\partial \theta}{\partial a_k} = \frac{f_0}{f} \left(\frac{r}{f_0}\right)^{2k+1} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (12)$$

したがって式 (6) の a_k に関する微分は次のようになる .

$$\frac{\partial m}{\partial a_k} = \begin{pmatrix} ((x - u_0)/r) \cos \theta \\ ((y - v_0)/r) \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial a_k} = \frac{f_0}{f} \left(\frac{r}{f_0}\right)^{2k+1} \cos^2 \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} ((x - u_0)/r) \cos \theta \\ ((y - v_0)/r) \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (13)$$

以下に述べる最適化の関数はすべて入射光ベクトル m によって表されるので, m のすべての未知数に関する微分が計算できれば, 最適化に含まれるすべての量が微分できる .

4. 共線性の評価関数

点列 κ に属する点 $p_1, \dots, p_N$ が共線 (同一直線上にある) のとき, 各点の入射光ベクトル $m_1, \dots, m_N$ は同一平面上にあるから, その平面の単位法線ベクトルを n_κ とすれば $(n_\kappa, m_\alpha) = 0, \alpha = 1, \dots, N$ が成り立つ (図 2) . しかし, $p_1, \dots, p_N$ が厳密に共線でなければこれは成り立たない . そこで, なるべく共線になるように,

$$\sum_{\alpha \in \text{点列 } \kappa} (n_\kappa, m_\alpha)^2 = \sum_{\alpha \in \text{点列 } \kappa} n_\kappa^\top m_\alpha m_\alpha^\top n_\kappa = (n_\kappa, \sum_{\alpha \in \text{点列 } \kappa} m_\alpha m_\alpha^\top n_\kappa) = (n_\kappa, M^{(\kappa)} n_\kappa), \quad (14)$$

が最小になるように補正パラメータを調節する . ただし, 行列 $M^{(\kappa)}$ を次のように定義した .

$$M^{(\kappa)} = \sum_{\alpha \in \text{点列 } \kappa} m_\alpha m_\alpha^\top \quad (15)$$

式 (14) は $M^{(\kappa)}$ の 2 次形式であるから, その最小値は $M^{(\kappa)}$ の最小固有値 $\lambda_{\min}^{(\kappa)}$ に等しい⁴⁾ . 撮影したすべての点列が同一直線上にあるようにカメラ校正するには次の関数 J_1 を最小にするようにパラメータを定めればよい .

$$J_1 = \sum_{\text{すべての点列 } \kappa} \lambda_{\min}^{(\kappa)} \quad (16)$$

4.1 1 階微分

最小固有値 $\lambda_{\min}^{(\kappa)}$ の c に関する導関数を考える . ただし, $c = u_0, v_0, f, a_1, a_2, \dots$ である . $\lambda_{\min}^{(\kappa)}$ を定める式

$$M^{(\kappa)} n_\kappa = \lambda_{\min}^{(\kappa)} n_\kappa \quad (17)$$

を c で微分すると次のようになる .

$$\frac{\partial M^{(\kappa)}}{\partial c} n_\kappa + M^{(\kappa)} \frac{\partial n_\kappa}{\partial c} = \frac{\partial \lambda_{\min}^{(\kappa)}}{\partial c} n_\kappa + \lambda_{\min}^{(\kappa)} \frac{\partial n_\kappa}{\partial c} \quad (18)$$

両辺と n_κ の内積をとると次のようになる .

$(\mathbf{n}_\kappa, \frac{\partial M^{(\kappa)}}{\partial c} \mathbf{n}_\kappa) + (\mathbf{n}_\kappa, M^{(\kappa)} \frac{\partial \mathbf{n}_\kappa}{\partial c}) = \frac{\partial \lambda_{\min}^{(\kappa)}(\mathbf{n}_\kappa, \mathbf{n}_\kappa)}{\partial c} + \lambda_{\min}^{(\kappa)}(\mathbf{n}_\kappa, \frac{\partial \mathbf{n}_\kappa}{\partial c})$ (19)
 $\mathbf{n}_\kappa$ は単位ベクトルであるから $(\mathbf{n}_\kappa, \mathbf{n}_\kappa) = \|\mathbf{n}_\kappa\|^2 = 1$ である．そして，変化方向 $\partial \mathbf{n}_\kappa / \partial c$ は $\mathbf{n}_\kappa$ に直交するので， $(\mathbf{n}_\kappa, \partial \mathbf{n}_\kappa / \partial c) = 0$ である．また $M^{(\kappa)}$ は対称行列であるから， $(\mathbf{n}_\kappa, M^{(\kappa)} \partial \mathbf{n}_\kappa / \partial c) = (M^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa, \partial \mathbf{n}_\kappa / \partial c) = \lambda_{\min}^{(\kappa)}(\mathbf{n}_\kappa, \partial \mathbf{n}_\kappa / \partial c) = 0$ である．したがって式 (19) から

$$\frac{\partial \lambda_{\min}^{(\kappa)}}{\partial c} = (\mathbf{n}_\kappa, \frac{\partial M^{(\kappa)}}{\partial c} \mathbf{n}_\kappa) \quad (20)$$

が得られる．これは固有値問題の摂動定理としてよく知られた結果である³⁾．式 (45) の行列 $M^{(\kappa)}$ の定義より， $\partial M^{(\kappa)} / \partial c$ は次のようになる．

$$\frac{\partial M^{(\kappa)}}{\partial c} = \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{\partial \mathbf{m}_\alpha}{\partial c} \mathbf{m}_\alpha^\top + \mathbf{m}_\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{m}_\alpha}{\partial c} \right)^\top \right) = 2S \left[\sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \mathbf{m}_\alpha}{\partial c} \mathbf{m}_\alpha^\top \right] \equiv M_c^{(\kappa)} \quad (21)$$

ただし， $S[\cdot]$ は対称化作用素 ($S[A] = (A + A^\top)/2$) である．ゆえに関数 J_1 のパラメータ c に関する 1 階微分は次のようになる．

$$\frac{\partial J_1}{\partial c} = \sum_{\text{すべての点列 } \kappa} (\mathbf{n}_\kappa, M_c^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa) \quad (22)$$

4.2 2 階微分

式 (20) を $c' (= u_0, v_0, f, a_1, a_2, \dots)$ で微分する．

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda_{\min}^{(\kappa)}}{\partial c \partial c'} &= \left(\frac{\partial \mathbf{n}_\kappa}{\partial c'}, M_c^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa \right) + \left(\mathbf{n}_\kappa, \frac{\partial^2 M^{(\kappa)}}{\partial c \partial c'} \mathbf{n}_\kappa \right) + \left(\mathbf{n}_\kappa, M_c^{(\kappa)} \frac{\partial \mathbf{n}_\kappa}{\partial c'} \right) \\ &= \left(\mathbf{n}_\kappa, \frac{\partial^2 M^{(\kappa)}}{\partial c \partial c'} \mathbf{n}_\kappa \right) + 2 \left(\frac{\partial \mathbf{n}_\kappa}{\partial c'}, M_c^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa \right) \end{aligned} \quad (23)$$

まず右辺第 1 項を考える．式 (21) を c' で微分すると次のようになる．

$$\frac{\partial^2 M^{(\kappa)}}{\partial c \partial c'} = 2S \left[\sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{\partial^2 \mathbf{m}_\alpha}{\partial c \partial c'} \mathbf{m}_\alpha^\top + \frac{\partial \mathbf{m}_\alpha}{\partial c} \left(\frac{\partial \mathbf{m}_\alpha}{\partial c'} \right)^\top \right) \right] \quad (24)$$

ゆえに次のようになる．

$$(\mathbf{n}_\kappa, \frac{\partial^2 M^{(\kappa)}}{\partial c \partial c'} \mathbf{n}_\kappa) = 2 \sum_{\alpha=1}^N \left((\mathbf{n}_\kappa, \frac{\partial^2 \mathbf{m}_\alpha}{\partial c \partial c'}) (\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{n}_\kappa) + (\mathbf{n}_\kappa, \frac{\partial \mathbf{m}_\alpha}{\partial c}) \left(\frac{\partial \mathbf{m}_\alpha}{\partial c'}, \mathbf{n}_\kappa \right) \right) \quad (25)$$

パラメータがすべて正しければ $(\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{n}_\kappa) = 0$ である．反復過程でパラメータがかなり正しく求まっているとすると， $(\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{n}_\kappa) \approx 0$ である．ゆえに式 (25) は次のように近似できる．

$$(\mathbf{n}_\kappa, \frac{\partial^2 M^{(\kappa)}}{\partial c \partial c'} \mathbf{n}_\kappa) \approx 2 \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{n}_\kappa, \frac{\partial \mathbf{m}_\alpha}{\partial c}) \left(\frac{\partial \mathbf{m}_\alpha}{\partial c'}, \mathbf{n}_\kappa \right) = 2(\mathbf{n}_\kappa, M_{cc'}^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa), \quad (26)$$

$$M_{cc'}^{(\kappa)} \equiv \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{\partial \mathbf{m}_\alpha}{\partial c} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{m}_\alpha}{\partial c'} \right)^\top \quad (27)$$

これは一種のガウス・ニュートン近似である⁴⁾．次に式 (23) の右辺第 2 項を考える． $\mathbf{n}_\kappa$ は単位ベクトルであるから，その変化は $\mathbf{n}_\kappa$ に直交する．行列 $M^{(\kappa)}$ の固有値を $\lambda_1^{(\kappa)} \geq \lambda_2^{(\kappa)} \geq \lambda_{\min}^{(\kappa)}$ とし，対応する単位固有ベクトルを $\mathbf{n}_{\kappa 1}, \mathbf{n}_{\kappa 2}, \mathbf{n}_\kappa$ とすると， $\mathbf{n}_{\kappa 1}, \mathbf{n}_{\kappa 2}, \mathbf{n}_\kappa$ は正規直交系であるから， $\mathbf{n}_\kappa$ に直交するベクトルは $\mathbf{n}_{\kappa 1}, \mathbf{n}_{\kappa 2}$ の線形結合で表せる．ゆえにある定数 β_1, β_2 によって

$$\frac{\partial \mathbf{n}_\kappa}{\partial c} = \beta_1 \mathbf{n}_{\kappa 1} + \beta_2 \mathbf{n}_{\kappa 2} \quad (28)$$

と表せる．式 (18) に式 (20), (28) を代入すると次のようになる．

$$M_c^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa + M^{(\kappa)} (\beta_1 \mathbf{n}_{\kappa 1} + \beta_2 \mathbf{n}_{\kappa 2}) = (\mathbf{n}_\kappa, M_c^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa) \mathbf{n}_\kappa + \lambda_{\min}^{(\kappa)} (\beta_1 \mathbf{n}_{\kappa 1} + \beta_2 \mathbf{n}_{\kappa 2}) \quad (29)$$

$M^{(\kappa)} \mathbf{n}_{\kappa 1} = \lambda_1^{(\kappa)} \mathbf{n}_{\kappa 1}$ ， $M^{(\kappa)} \mathbf{n}_{\kappa 2} = \lambda_2^{(\kappa)} \mathbf{n}_{\kappa 2}$ より次のようになる．

$$\beta_1 (\lambda_1^{(\kappa)} - \lambda_{\min}^{(\kappa)}) \mathbf{n}_{\kappa 1} + \beta_2 (\lambda_2^{(\kappa)} - \lambda_{\min}^{(\kappa)}) \mathbf{n}_{\kappa 2} = (\mathbf{n}_\kappa, M_c^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa) \mathbf{n}_\kappa - M_c^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa \quad (30)$$

両辺と $\mathbf{n}_{\kappa 1}, \mathbf{n}_{\kappa 2}$ との内積をとると次のようになる．

$$\beta_1 (\lambda_1^{(\kappa)} - \lambda_{\min}^{(\kappa)}) = -(\mathbf{n}_{\kappa 1}, M_c^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa), \quad \beta_2 (\lambda_2^{(\kappa)} - \lambda_{\min}^{(\kappa)}) = -(\mathbf{n}_{\kappa 2}, M_c^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa) \quad (31)$$

ゆえに式 (28) より $\partial \mathbf{n}_\kappa / \partial c$ は次のように表せる．

$$\frac{\partial \mathbf{n}_\kappa}{\partial c} = - \frac{(\mathbf{n}_{\kappa 1}, M_c^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa) \mathbf{n}_{\kappa 1}}{\lambda_1^{(\kappa)} - \lambda_{\min}^{(\kappa)}} - \frac{(\mathbf{n}_{\kappa 2}, M_c^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa) \mathbf{n}_{\kappa 2}}{\lambda_2^{(\kappa)} - \lambda_{\min}^{(\kappa)}} \quad (32)$$

これも固有値問題の摂動定理としてよく知られた結果である³⁾．これから式 (23) の右辺第 2 項が次のように書ける．

$$2 \left(\frac{\partial \mathbf{n}_\kappa}{\partial c'}, M_c^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa \right) = - \frac{2(\mathbf{n}_{\kappa 1}, M_c^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa)(\mathbf{n}_{\kappa 1}, M_{c'}^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa)}{\lambda_1^{(\kappa)} - \lambda_{\min}^{(\kappa)}} - \frac{2(\mathbf{n}_{\kappa 2}, M_c^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa)(\mathbf{n}_{\kappa 2}, M_{c'}^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa)}{\lambda_2^{(\kappa)} - \lambda_{\min}^{(\kappa)}} \quad (33)$$

以上より，式 (23) が次のように近似される．

$$\frac{\partial^2 \lambda_{\min}^{(\kappa)}}{\partial c \partial c'} \approx 2 \left((\mathbf{n}_\kappa, M_{cc'}^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa) - \sum_{i=1}^2 \frac{(\mathbf{n}_{\kappa i}, M_c^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa)(\mathbf{n}_{\kappa i}, M_{c'}^{(\kappa)} \mathbf{n}_\kappa)}{\lambda_i^{(\kappa)} - \lambda_{\min}^{(\kappa)}} \right) \quad (34)$$

したがって，関数 J_1 のパラメータ c, c' に関する 2 階微分は次のようになる．

$$\frac{\partial^2 J_1}{\partial c \partial c'} = 2 \sum_{\text{すべての点列 } \kappa} \left((n_\kappa, M_{cc'}^{(\kappa)} n_\kappa) - \sum_{i=1}^2 \frac{(n_{\kappa i}, M_c^{(\kappa)} n_\kappa)(n_{\kappa i}, M_{c'}^{(\kappa)} n_\kappa)}{\lambda_i^{(\kappa)} - \lambda_{\min}^{(\kappa)}} \right) \quad (35)$$

5. 平行性の評価関数

直線群 g に属する点列がバタン上で平行であり、その共通の単位方向ベクトルが l_g であるとする。カメラの視点（レンズ中心）と直線群 g に属する点列 κ を通る平面の法線ベクトル n_κ は l_g と直交するから、 $(l_g, n_\kappa) = 0$ である（図3）。しかし、直線群 g が厳密に平行でなければこれは成り立たない。そこで、なるべく平行になるように、

$$\sum_{\kappa \in \text{直線群 } g} (l_g, n_\kappa)^2 = \sum_{\kappa \in \text{直線群 } g} l_g^\top n_\kappa n_\kappa^\top l_g = (l_g, \sum_{\kappa \in \text{直線群 } g} n_\kappa n_\kappa^\top l_g) = (l_g, N^{(g)} l_g) \quad (36)$$

を最小にするように補正パラメータを調節する。 $N^{(g)}$ は次のように定めた行列である。

$$N^{(g)} = \sum_{\kappa \in \text{直線群 } g} n_\kappa n_\kappa^\top \quad (37)$$

式 (36) は $N^{(g)}$ の 2 次形式であるから、その最小値は $N^{(g)}$ の最小固有値 $\mu_{\min}^{(g)}$ に等しい。すべての直線群の点列が平行になるように校正するために次の関数を最小化すればよい。

$$J_2 = \sum_{\text{すべての直線群 } g} \mu_{\min}^{(g)} \quad (38)$$

5.1 1 階微分

4 節の固有値問題の摂動解析を用いると、関数 J_2 のパラメータ c に関する 1 階微分は次のようになる。

$$\frac{\partial J_2}{\partial c} = \sum_{\text{すべての直線群 } g} (l_g, N_c^{(g)} l_g), \quad N_c^{(g)} = 2S \left[\sum_{\kappa \in \text{直線群 } g} \frac{\partial n_\kappa}{\partial c} n_\kappa^\top \right] \quad (39)$$

ただし、 l_g は式 (37) の行列 $N^{(g)}$ の最小固有値 $\mu_{\min}^{(g)}$ に対する単位固有ベクトルである。ベクトル n_κ の 1 階微分 $\partial n_\kappa / \partial c$ は式 (32) で与えられる。

5.2 2 階微分

4 節の固有値問題の摂動解析を用いると、関数 J_2 のパラメータ c, c' に関する 2 階微分は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 J_2}{\partial c \partial c'} = 2 \sum_{\text{すべての直線群 } g} \left((l_g, N_{cc'}^{(g)} l_g) - \sum_{i=1}^2 \frac{(l_{gi}, N_c^{(g)} l_g)(l_{gi}, N_{c'}^{(g)} l_g)}{\mu_i^{(g)} - \mu_{\min}^{(g)}} \right) \quad (40)$$

ただし、 $\mu_i^{(g)}$ は行列 $N^{(g)}$ の第 i 固有値 ($i = 1, 2$) であり、 l_{gi} は対応する単位固有ベクトル

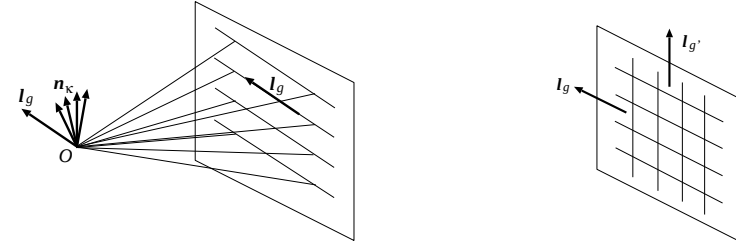


図3 直線群が平行のとき、各直線と視点の張る平面の法線ベクトル n_κ は直線の共通の方向ベクトル l_g と直交する。
図4 平行な直線群 g, g' が互いに直交するとき、それぞれの直線群の方向ベクトル $l_g, l_{g'}$ は直交する。

である。そして行列 $N_{cc'}^{(g)}$ を次のように定義する。

$$N_{cc'}^{(g)} \equiv \sum_{\kappa \in \text{点列群 } g} \left(\frac{\partial n_\kappa}{\partial c} \right) \left(\frac{\partial n_\kappa}{\partial c'} \right)^\top \quad (41)$$

6. 直交性の評価関数

互いに直交する直線群 g, g' が撮影されるとする。直線群 g の空間での方向 l_g は式 (37) の行列 $N^{(g)}$ の最小固有値に対する単位固有ベクトル l_g である。直線群 g, g' が互いに直交する条件は $(l_g, l_{g'}) = 0$ であるから（図4）、この条件を考慮するには次の関数を最小化する。

$$J_3 = \sum_{\text{すべての直交直線群対 } \{g, g'\}} (l_g, l_{g'})^2 \quad (42)$$

6.1 1 階微分

関数 J_3 のパラメータ c に関する 1 階微分は次のようになる。

$$\frac{\partial J_3}{\partial c} = 2 \sum_{\text{すべての直交直線群対 } \{g, g'\}} (l_g, l_{g'}) \left(\left(\frac{\partial l_g}{\partial c}, l_{g'} \right) + (l_g, \frac{\partial l_{g'}}{\partial c}) \right) \quad (43)$$

ベクトル l_g の 1 階微分 $\partial l_g / \partial c$ は次のように計算される（ $\partial l_{g'} / \partial c$ も同様である）。

$$\frac{\partial l_g}{\partial c} = - \sum_{i=1}^2 \frac{(l_{gi}, N_c^{(g)} l_g) l_{gi}}{\mu_i^{(g)} - \mu_{\min}^{(g)}} \quad (44)$$

6.2 2 階微分

2 階微分では近似 $(l_g, l_{g'}) \approx 0$ を用いてもよい（ガウス・ニュートン近似）。したがって関数 J_3 のパラメータ c, c' に関する 2 階微分は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 J_3}{\partial c \partial c'} = 2 \sum_{\text{すべての直交直線群対 } \{g, g'\}} \left(\left(\frac{\partial l_g}{\partial c}, l_{g'} \right) + \left(l_g, \frac{\partial l_{g'}}{\partial c} \right) \right) \left(\left(\frac{\partial l_g}{\partial c'}, l_{g'} \right) + \left(l_g, \frac{\partial l_{g'}}{\partial c'} \right) \right) \quad (45)$$

7. レーベンバーグ・マーカート法

共線性，平行性，直交性をすべて考慮するために次の関数を最小化する．

$$J = J_1/\gamma_1 + J_2/\gamma_1 + J_3/\gamma_1 \quad (46)$$

ただし， $\gamma_i, i = 1, 2, 3$ は各項をバランスさせる重みであり，初期値に対する J_i の値を用いる．各関数 J_i のパラメータに関する 1 階，2 階微分が計算できるので次のレーベンバーグ・マーカート法⁴⁾ でパラメータを最適化することができる．

- (1) 初期値を与える（例えば光軸点は画像フレームの中心， f を公称焦点距離， $a_1 = a_2 = \dots = 0$ ）．そして，それに対する J の値を J_0 とし， $C = 0.0001$ と置く．
- (2) 式 (3) によって入射角 $\theta_{\kappa\alpha}$ を計算し，式 (6) によって入射光ベクトル $m_{\kappa\alpha}$ を計算し，式 (7), (10), (13) によって $\partial m_{\kappa\alpha} / \partial c$ を計算する ($c = u_0, v_0, f, a_1, a_2, \dots$) ．
- (3) それらを用いて J のパラメータに関する 1 階微分 J_c ，2 階微分 $J_{cc'}$ を計算する．
- (4) 次の連立 1 次方程式を解いて $\Delta u_0, \Delta v_0, \Delta f, \Delta a_1, \dots$ を計算する．

$$\begin{pmatrix} (1+C)J_{u_0u_0} & J_{u_0v_0} & J_{u_0f} & J_{u_0a_1} & \cdots \\ J_{v_0u_0} & (1+C)J_{v_0v_0} & J_{v_0f} & J_{v_0a_1} & \cdots \\ J_{fu_0} & J_{fv_0} & (1+C)J_{ff} & J_{fa_1} & \cdots \\ J_{a_1u_0} & J_{a_1v_0} & J_{a_1f} & (1+C)J_{a_1a_1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta v_0 \\ \Delta f \\ \Delta a_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} J_{u_0} \\ J_{v_0} \\ J_f \\ J_{a_1} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (47)$$

- (5) 次のように $\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{f}, \tilde{a}_1, a_2, \dots$ を計算し，それに対する J の値を $\tilde{J}$ とする．

$$\tilde{u}_0 = u_0 + \Delta u_0, \quad \tilde{v}_0 = v_0 + \Delta v_0, \quad \tilde{f} = f + \Delta f, \quad \tilde{a}_1 = a_1 + \Delta a_1, \quad \tilde{a}_2 = a_2 + \Delta a_2, \dots \quad (48)$$

- (6) $\tilde{J} < J_0$ なら次へ進む．そうでなければ $C \leftarrow 10C$ としてステップ (4) に戻る．
- (7) $u_0 \leftarrow \tilde{u}_0, v_0 \leftarrow \tilde{v}_0, f \leftarrow \tilde{f}, a_1 \leftarrow \tilde{a}_1, a_2 \leftarrow \tilde{a}_2, \dots$ とし， $|\Delta u_0| < \epsilon_0, |\Delta v_0| < \epsilon_0, |\Delta f| < \epsilon_f, |\Delta a_1| < \epsilon_1, |\Delta a_2| < \epsilon_2, \dots$ なら $u_0, v_0, f, a_1, a_2, \dots, J$ を返して終了する．そうでなければ $J_0 \leftarrow J, C \leftarrow C/10$ としてステップ (2) に戻る．

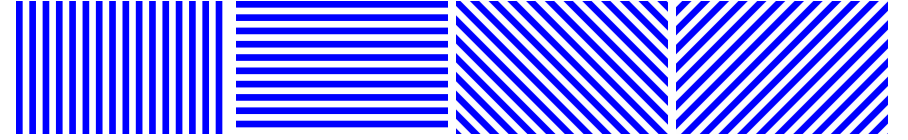


図 5 4 方向の帯パターン

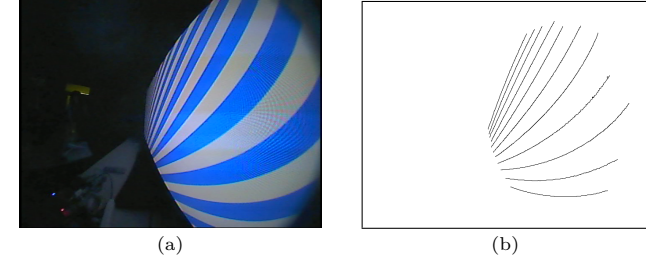


図 6 (a) 帯パターンを撮影した魚眼画像．(b) それから検出したエッジ．

8. 実験

図 5 は校正用の 4 方向の帯パターンある．これを大型ディスプレイ上に表示して魚眼カメラをいろいろな位置に置き，各位置から 4 種類のパターンを撮影する．魚眼カメラを正面に置くと，パターンは画像の中心付近にしか写らないので，いろいろな位置に写るように撮影位置を変える．そして撮影した画像からエッジ検出を行う．図 6(a) はある位置から撮影した 1 例であり，図 6(b) はそれから検出したエッジである．画像サイズは 640×480 画素である．これから帯パターンでない部分（ディスプレイの外側の背景など）やエッジが不鮮明な部分を手で除去し，鮮明なエッジ画素を追跡してリストを作成し，それを校正の入力とした．このようにして 220 本のエッジ画素列が得られた．これには 20 組の平行線群，10 組の直交線群が含まれている．これらを用いて，補正項の項数（「補正次数」と呼ぶ）を 0, 1, ..., 5, とした結果は表 1 のようになる（光軸点 (u_0, v_0) はフレーム中心を (0.0) とした位置）．ただし，レーベンバーグ・マーカート法の収束判定のしきい値は $\epsilon_0 = \epsilon_f = 10^{-3}$, $\epsilon_1 = 10^{-5}$, $\epsilon_2 = 10^{-6}$, $\epsilon_3 = 10^{-7}$, $\epsilon_4 = 10^{-8}$, $\epsilon_5 = 10^{-9}$ とした．そして初期値をいろいろ変えても同じ解に収束することを確認した．反復回数は 5 次の補正でもほぼ 10 回である．

この結果を用いて式 (3) の光軸点からの位置 r と入射角 θ の関係をグラフにプロットしたものが図 7(a) である．ただし，後の応用の都合上，横軸を θ ，縦軸を r としている．補正次数を増やすと式 (1) の立体射影に非常に近い関係式に収束している．次数が 3, 4, 5 でほぼ同じ結果となっているので，これ以上次数を増やす必要はないと考えられる．

表 1 補正次数と校正したパラメータ値．

補正次数	0	1	2	3	4	5
u_0	-1.56761	-1.56968	-1.57134	-1.59349	-1.59385	-1.60081
v_0	0.517809	0.488646	0.430145	0.423562	0.422805	0.426097
f	146.647	149.572	148.112	146.727	146.796	146.501
$a_1/10^{-2}$	—	0.646891	-0.305581	-1.41589	-1.68775	-1.80506
$a_2/10^{-3}$	—	—	2.39013	7.57212	11.1001	9.34256
$a_3/10^{-4}$	—	—	—	8.05471	22.2419	0.387907
$a_4/10^{-5}$	—	—	—	—	18.0654	61.6627
$a_5/10^{-6}$	—	—	—	—	—	0.935994

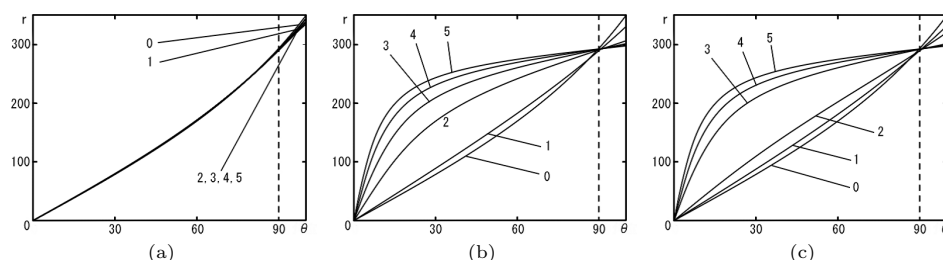


図 7 校正で得られた入射角 θ と像の光軸点からの距離 r (画素) の関係．(a) 共線性，平行性，直交性による結果．(b) 共線性のみによる結果．(c) 共線性，平行性のみによる結果．

比較のために中野ら¹¹⁾，加瀬ら⁶⁾，Okutsu ら¹²⁾ のように共線性のみによる校正結果を図 7(b) に示す．これを見ると補正次数を増やすと式 (1) の立体射影とは全く別の関係式に近付いている．図 7(c) は共線性と平行性を用いる場合であり，この場合も「偽の解」に近付いている．これら偽の解に対する関数 J の値は対応する図 7(a) の解のパラメータを代入したものより小さい．すなわち，偽の解は局所解ではなく，実際に J が最小化されている．この結果から，正しい解を得るためには直交性が不可欠であることが分かる．中野ら^{10),11)} や奥津ら¹³⁾ の光軸に直交する方向の直接的計測は共線性のみによる情報の不足を補うものと考えられるが，本論文のように共線性，平行性，直交性を考えると直接的計測なしに正しい校正がなされる．

校正結果を確認するために正方形格子パターンを用意し，図 8(a) はこれをほぼ斜め 30 度から撮影したものである．図 8(b) はカメラを仮想的に 60 度回転してパターンにほぼ正対した透視投影画像になうように変換したものである（補正次数 5，計算式は付録参照）．左端の欠けている部分は光軸に対して 95 度に近い方向である．このように全視野に渡って正しい透視投影画像に変換されていることが分かる．図 8(c) は比較のために図 7(b),(c) で得られ

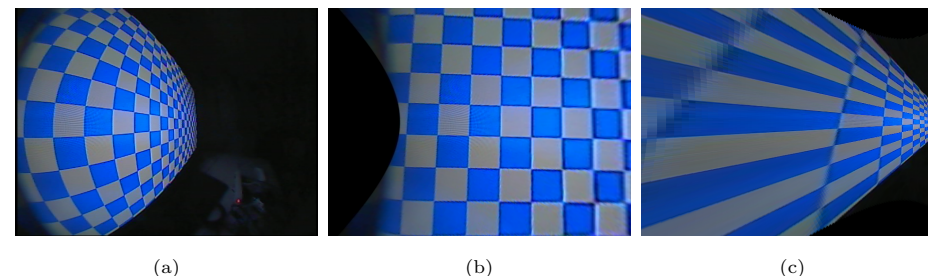


図 8 (a) 正方形格子パターンをほぼ斜め 30 度から撮影した魚眼画像．(b) カメラを仮想的に 60 度回転してパターンにほぼ正対するように変換した透視投影画像．(c) 偽の解によって変換した透視投影画像．

る偽の解を用いて同じ処理を行った結果である．確かに同一直線上の点はほぼ同一直線上になり，平行な直線が平行な直線（をある方向から見たもの）になっている．このことから，共線性と平行性のみでは偽の解が防げず，直交性が本質であることが確認される．偽の解の存在はこれまで知られていなかったものである．

図 9 の上段左はカメラを車両の前方下方（バンパーの下）に搭載して走行中の前方シーンを撮影した魚眼画像である．これから生成した透視投影の正面画像，およびカメラを左，右，下，上に 90 度回転して得られる透視投影画像を示す．このような変換によって，左右からの接近車両を識別したり，真下を見たような俯瞰画像を生成するなどさまざまな応用が可能となる．

9. ま と め

本論文では異なる向きの帯状パターンを描いた複数の参照板を用いて超広角魚眼レンズカメラの撮像の歪を除去する校正法を示した．基本的には駒形ら⁷⁾ の方式に従い，立体射影の式に画像上に観測される量のべき乗として補正項を付加し，点列に最小二乗法によって直線を当てはめ，共線性のみならず，平行性，直交性も考慮した．このような方法は小野寺ら¹⁴⁾ が最初に示したように，カメラに対する参照板の設置が任意であり，参照板中のパターンの位置も知る必要がないという利点を持っている．ただし，駒形ら⁷⁾ は直線当てはめの残差を評価していなかったため，本論文では直線当てはめ固有値問題となることに着目し，固有値問題の詳細な摂動解析を行い，任意個数の補正係数を最適化する一般的な公式を導出した．そして，それを用いて最適化のためのレーベンバーグ・マーカート法の手順を導いた．最後に実際の魚眼カメラと大型ディスプレイを用いて実験を行い，直交条件が本質であり，共線条件と平行条件のみでは偽の解が存在するために正しい校正ができないことを指摘

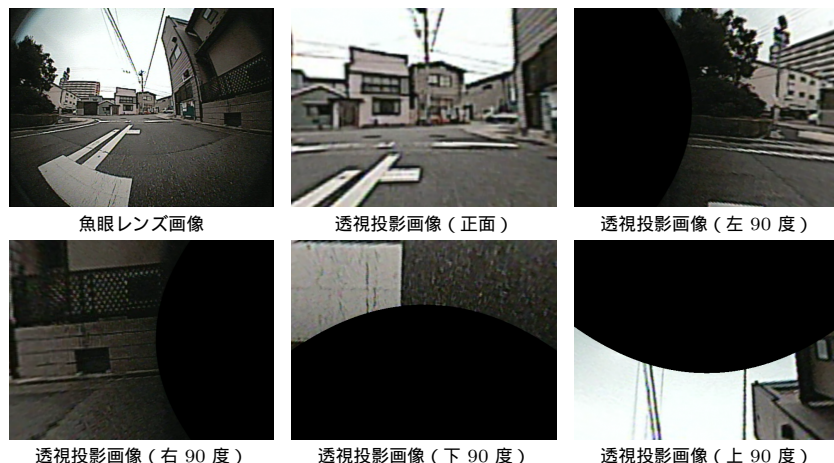


図 9 車載カメラで撮影した魚眼画像，およびこれを透視投影に変換した正面画像，カメラを左右に 90 度回転して観測されるはずの透視投影画像，カメラを上下に 90 度回転して観測されるはずの透視投影画像，

した．そして車載カメラによる応用例を示した．

謝辞：本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 (C 21500172) の助成によった．

参 考 文 献

- 1) F. Devernay and O. Faugeras, Straight lines have to be straight: Automatic calibration and removal of distortion from scenes of structured environments, *Machine Vision Appl.*, **13**-1 (2001-8), 14–24.
- 2) C. Hughes, P. Denny, M. Glavin and E. Jones, Equidistant fish-eye calibration and rectification by vanishing point extraction, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **32**-12 (2010-12), 2289–2296.
- 3) K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, 1996; reprinted Dover, New York, NY, U.S.A., 2005.
- 4) 金谷健一，「これなら分かる最適化数学—基礎原理から計算手法まで—」，共立出版，2005.
- 5) J. Kannala and S. S. Brandt, A general camera model and calibration method for conventional, wide angle, and fisheye-lenses, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **28**-8 (2006-8), 1335–1340.
- 6) 加瀬翔太，光本尚訓，新垣洋平，下村倫子，梅田和昇，複数の魚眼カメラを用いた俯瞰画像生成手法の構築，*精密工学会誌*，**75**-2 (2009-2)，251–255.
- 7) 駒形英樹，石井郁夫，牧野秀夫，高橋章，若月大輔，魚眼カメラ内部パラメータの幾何学

- 的キャリブレーション法，電子情報通信学会論文誌 D，**J89-D-1** (2006-1)，64–73.
- 8) 駒形英樹，石井郁夫，高橋章，若月大輔，今井博英，輝度傾斜パターンを用いた魚眼カメラ内部パラメータの校正，電子情報通信学会論文誌 D，**J93-D-5** (2010-5)，621–631.
- 9) Y.-C. Liu, K.-Y. Lin, and Y.-S. Chen, Bird's eye view vision system for vehicle surrounding monitoring, *Proc. 2nd Int. Workshop, Robvis2008*, Auckland, New Zealand, February 2008, pp. 207–218.
- 10) 中野誠士，李仕剛，千葉則茂，球面画像獲得のための魚眼カメラの校正，電子情報通信学会論文誌 D-II，**J88-D-II-9** (2005-9)，1847–1856.
- 11) 中野誠士，李仕剛，千葉則茂，球面モデルに基づくしま模様パターンを用いた魚眼カメラの校正，電子情報通信学会論文誌 D，**J90-D-1** (2007-1)，73–82.
- 12) R. Okutsu, K. Terabayashi, Y. Aragaki, N. Shimomura, and K. Umeda, Generation of overhead view images by estimating intrinsic and extrinsic camera parameters of multiple fish-eye cameras, *Proceedings of the IAPR Conference on Machine Vision Applications (MVA 2009)*, May 2009, Yokohama, Japan, pp. 447–450.
- 13) 奥津良太，寺林賢司，梅田和昇，球体を用いた魚眼カメラの内部パラメータ校正，電子情報通信学会論文誌 D，**J93-D-12** (2010-12)，2645–2653.
- 14) 小野寺康浩，金谷健一，カメラの位置決めの際の画像の幾何学的補正法，電子情報通信学会論文誌 D-II，**J75-D-II-5** (1992-5)，1009–1013.
- 15) 高木幹夫，下田陽久，「新編 画像解析ハンドブック」，東大出版会，2004.
- 16) 滝本周平，伊藤崇晶，車載カメラを用いた単眼測距検証システムの開発，SEI テクニカルレビュー，Vol. 169 (2006-7)，82–87.
- 17) <http://www.fujitsu-ten.co.jp/release/2010/04/20100420.html>

付 録

魚眼画像を透視投影画像に直すには，透視投影画像用のバッファの各画素 $(\bar{x}, \bar{y})$ に対してまず次の (X, Y, Z) を計算する．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + f^2}} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ f \end{pmatrix} \quad (49)$$

そして魚眼画像の次式で計算した画素 (x, y) の輝度値 (整数座標でなければ周囲の画素の双 1 次補間) を $(\bar{x}, \bar{y})$ に書き込む．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \frac{r(\theta)}{\sqrt{1-Z^2}} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (50)$$

ただし $r(\theta)$ は図 7 に示す入射角 θ に対する光軸点からの距離 r である．カメラを回転行列 R だけ回転して得られる画像を式 (49) の X, Y, Z を次のように置き換えて式 (50) を用いればよい．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \leftarrow R \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (51)$$