論 文

準エルミート $(0, q)$-補間問題と解の陽的表現*

鈴 木 千 里**

Abstract

In this paper an interpolation problem is considered to find a polynomial whose value is prescribed at several points and whose q^{th} derivative is also prescribed at some of these points.

With respect to the problem, 1) a certain relation between its solution and the Hermite interpolation polynomials, 2) a necessary and sufficient condition on which the solution exists uniquely and 3) an explicit representation of the solution are investigated. The case when $q=2$ is treated in some detail. Finally as an important application a numerical integration formula which can directly solve a special differential equation $d^q y/dx^q = f(x, y)$ is obtained.

1. まえがき

数値解析の分野において補間式は広汎な用途を有することから，多くの研究がなされてきた．しかしながら準エルミート補間問題に関しては，解の存在性，収束性，陽的表現などについてまだ充分な成果は得られていない[1]．

本論文では，次のような一つの準エルミート補間問題について考える，すなわち多項式で(1)変域の有限分割の各点で任意に与えられた各実数に一致し，(2)その分割の各点（あるいはその部分）で任意に与えられた各実数に $q(>1)$ 階微係数が一致するような補間式について考察する．この問題の $q=2$ については，すでに P. Turán らのグループによる体系的な研究がある[2~4]．しかしそれらは Legendre 多項式の根を分割点とした特殊な場合で，しかも解の陽的表現には積分作用素が含まれていることからあまり実用的ではない．また J. Dyer[5] は人工衛星の軌道計算用アルゴリズムの研究において，等分割における $q=2$ の補間多項式の存在性について述べているが，その陽的表現については得られていない．この論文では，任意の分割の任意の $q(>1)$ の問題の解（補間多項式）が存在するための条件が明らかにされ，そのうえ解の陽的表現の構成法が与えられる．特に $q=2$ については詳細に議論される．最後に，この補間多項式の重要な一つの応用例として，数値積分の分野での有効性について述べる．

2. 準 備

ここでは本論文で使われる諸記号の定義と問題の定式化を行い，解の二，三の性質について述べる．

2.1 記 号

実数閉区間 $[a, b]$ を I で，1から k までの整数全体を K で表わす．K_s を K の一つの部分集合としてその基数を k' で，元を i_s で表わす．添字集合 K の各添字を実数 $x \in I$ に添付させた全体 $\{x_i \in I; i \in K\}$ を σ_K で，添字集合 K_s で指定される σ_K の部分集合 $\{x_{i_s} \in \sigma_K; i_s \in K_s\}$ を σ_{K_s} で表わす．また添字集合 K の各元によって添付された一つの実数列 $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \cdots, y_k^{(0)}$ を $\sum_K^{(0)}$ で，添字集合 K_s の各元によって添付された一つの実数列 $y_{i_1}^{(q)}, y_{i_2}^{(q)}, \cdots, y_{i_{k'}}^{(q)}$ を $\Sigma_{K_s}^{(q)}$ で表わす．P_n は n 次以下の実多項式全体からなる線型多項式空間とし，多項式 P の r 階導関数を $P^{(r)}(x)$ で表わし，$x = x_i \in I$ での P の r 階微分係数を $P^{(r)}(x_i)$ によって表わすことにする．

---

* A Quasi-Hermite's $(0, q)$-Interpolation Problem and Its Explicit Solution by Chisato SUZUKI (Computer Science Laboratory, FUJITSU Laboratories Ltd.)

** (株)富士通研究所電子研究部

多項式 P が ${}^{\forall}i\in K$ に対し $P(x_i)=y_i^{(0)}$ を満たし，${}^{\forall}i_s\in K_s$ に対し q 階導関数 $P^{(q)}$ が $P^{(q)}(x_{i_s})=y_{i_s}^{(q)}$ となるとき，P は基点集合 (σ_K,σ_{K_s}) の上で規定値条件 $(\Sigma_K^{(0)},\Sigma_{K_s}^{(q)})$ を満たす補間多項式と呼ぶことにする．

なお，σ_K は I の分割と呼ばれることもある．

2.2 問題の定式化

定 義

準エルミート $(0,q)$ 的補間問題とは，基点集合 (σ_K,σ_{K_s}) の上で任意に与えられた規定値条件 $(\Sigma_K^{(0)},\Sigma_{K_s}^{(q)})$ に対して，方程式系

$$\left.\begin{aligned}&P^{(0)}(x_i)=y_i^{(0)},\quad \text{for all } i\in K,\\ &P^{(q)}(x_{i_s})=y_{i_s}^{(q)},\quad \text{for all } i_s\in K_s,\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

が満たされる多項式 P を空間 $\mathrm{P}_n(n\leq k+k'-1)$ の中から見つけることである．

任意の規定値条件に対してこの問題が自明でない一意の解をもつとき poised な問題と呼び，解を準エルミート $(0,q)$ 補間多項式（略して $(0,q)$ 多項式）と呼ぶことにする．

問題が poised なときその解全体を $Q_n^{(q)}$ とすれば，明らかに解空間 $Q_n^{(q)}$ は P_n の一つの部分空間を形成する．そしてその次元 $\dim Q_n^{(q)}$ は $\leq\dim\mathrm{P}_n=k+k'$ となる．そこでこの解空間の一つの基底として次の境界条件を満たす $k+k'-1$ 次以下の多項式系 $\{r_i(x)\}_{i\in K}$，$\{S_{i_s}(x)\}_{i_s\in K_s}$ について考える．

$$\begin{cases}r_i(x_j)=\delta_{i,j},\quad S_{i_s}(x_j)=0\quad \text{for } j\in K,\\ r_i^{(q)}(x_{i_s'})=0,\quad S_{i_s}^{(q)}(x_{i_s'})=\delta_{i_s,i_s'}\ \text{for } i_s\in K_s,\\ (i=1,2,\cdots,k),\quad (i_s=i_1,i_2,\cdots,i_{k'}).\end{cases}\tag{2.2}$$

ここで $\delta_{i,j}$ は Kronecker delta である．

この境界条件を満足する多項式 $r_i(x)$ は，ちょうど規定値条件の $\Sigma_K^{(0)}$ の元の添数 i 要素 $y_i^{(0)}$ だけが 1 で，他の要素がすべて 0 であるような問題の解となる．また上の境界条件を満たす $S_{i_s}(x)$ は，規定値条件の $\Sigma_{K_s}^{(q)}$ の元の添数 i_s 要素 $y_{i_s}^{(q)}$ だけが 1 で，他のすべての要素が 0 であるような問題の解となる．従って，これらの多項式は解空間 $Q_n^{(q)}$ に属している．更にそのうえこれらの多項式は，互いに一次独立の関係にある．事実，任意の $x\in I$ に対して，

$$\sum_{i\in K}C_ir_i(x)+\sum_{i_s\in K_s}C_{i_s}'S_{i_s}(x)=0,\tag{2.3}$$

が恒等的に成立するのは，任意定数 $C_i(i\in K)$，$C_{i_s}'(i_s\in K_s)$ がすべて 0 のときだけである．

ゆえに解空間 $Q_n^{(q)}$ は多くとも $k+k'$ 次元なので，境界条件を満たす $k+k'$ 個の多項式 $\{r_i(x)\}_{i\in K}$，$\{\delta_{i_s}(x)\}_{i_s\in K_s}$ は $Q_n^{(q)}$ の基底として選ぶことができ，解空間は $k+k'$ 次元となる．

そこで，解空間の任意の元 p は

$$P(x)=\sum_{i\in K}C_ir_i(x)+\sum_{i_s\in K_s}C_{i_s}'S_{i_s}(x)\tag{2.4}$$

のように表現できる．ここで C_i,C_{i_s}' は，規定値条件が与えられるとき，一意に定まる定数である．すなわち問題が poised ならば，与えられた規定値条件 $(\Sigma_K^{(0)}=\{y_1^{(0)},\cdots,y_k^{(0)}\},\Sigma_{K_s}^{(q)}=\{y_{i_1},\cdots,y_{i_{k'}}^{(q)}\})$ に対し，解は

$$q(x)=\sum_{i\in K}r_i(x)y_i^{(0)}+\sum_{i_s\in K_s}S_{i_s}(x)y_{i_s}^{(q)},\tag{2.5}$$

のように一意に表わされる．

次の定理は問題の興味ある性質を述べたものである．

定理 2.1

準エルミートの $(0,q)$ 補間問題において，分割 σ_K の基数を k とするとき，もし $q>k$ ならば，その問題は poised ではない．

証 明

背理法によって行う．問題が poised であると仮定すれば，解は高々 $k+k'-1$ 次の多項式である．但し，k' は σ_{K_s} の基数である．そのとき，解空間の基底である $S_{i_s}(i_s=i_1,i_2,\cdots,i_{k'})$ もまた高々 $k+k'-1$ 次の多項式となる．しかし式 (2.2) によれば，$i_{s'}\in K_s-\{i_s\}$ に対して $S_{i_s}^{(q)}(x_{i_s'})=0$ となり，$i_{s'}=i_s$ のとき $S_{i_s}^{(q)}(x_{i_s'})=1$ となることから，q 階導関数 $S_{i_s}^{(q)}$ は，恒等的に零でない $k'-1$ 次の多項式でなければならない．従ってこの事実から，S_{i_s} の次数は $q+k'-1$ で，解の次数は $\geq k+k'-1$ となり仮定に反する．

3. $(0,q)$ 多項式の陽的表現と存在条件

この章の初めでは，すでによく知られたエルミート補間多項式（略して $(0,1)$ 多項式）について陽的な表現を与え，そしてこの多項式から $(0,q)$ 多項式への変換式を求める．次に準エルミート $(0,q)$ 補間問題が poised となるための必要充分条件と解，すなわち，$(0,q)$ 多項式の陽的表現を得る．

3.1 (0,1) 多項式

基点集合 $\{\sigma_K,\sigma_{K_s}\}$ において任意に与えられた規定値条件 $(\Sigma_K^{(0)},\Sigma_{K_s}^{(1)})$ を満たす $(0,1)$ 多項式は，分割 σ_K の全ての元が異なるとき常に一意に存在して，次式で与えられる[6]．

$$P^*(x)=\sum_{i\in K}r_i^*(x)y_i^{(0)}+\sum_{i_s\in K_s}S_{i_s}^*(x)y_{i_s}^{(1)},\tag{3.1}$$

ここで係数 $r_i^*(i=1,2\cdots,k)$, $S_{i_s}^*(i_s=i_1,i_2,\cdots,i_{k'})$ は次のようである：

$$r_i^*(x)=\begin{cases}\{1-(x-x_i)g_i(x_i)\}h_i(x), & if\ i\in K_s,\\ h_i(x), & if\ i\in K-K_s,\end{cases} \quad (3,2)$$

$$S_{i_s}^*(x)=(x-x_{i_s})h_{i_s}(x),\ \text{for } i_s\in K_s, \quad (3.3)$$

$$h_a(x)=\left\{\prod_{P\in K-\{a\}}\frac{(x-x_p)}{(x_a-x_p)}\right\}\left\{\prod_{i_p\in K_s-\{a\}}\frac{(x-x_{i_p})}{(x_a-x_{i_p})}\right\}, \quad (3.4)$$

$$g_a(x)=\sum_{P\in K-\{a\}}\frac{1}{(x-x_p)}+\sum_{i_p\in K_s-\{a\}}\frac{1}{(x-x_{i_p})}. \quad (3.5)$$

ここで式 (3.1) を次のようにベクトル表現しておくことは，次節からの議論に便利である：

$$P^*(x)=\boldsymbol{r}^{*t}(x)\boldsymbol{y}^{(0)}+\boldsymbol{s}^{*t}(x)\boldsymbol{y}^{(1)} \quad (3.6)$$

ただし，t はベクトルの転置を表わし，他の諸量は次のように定義されたベクトルである：

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}^*(x)\equiv(r_1^*(x),r_2^*(x),\cdots,r_k^*(x))^t\\ \boldsymbol{S}^*(x)\equiv(S_{i_1}^*(x),S_{i_2}^*(x),\cdots,S_{i_{k'}}^*(x))^t,\\ \boldsymbol{y}^{(0)}\equiv(y_1^{(0)},y_2^{(0)},\cdots,y_k^{(0)})^t,\\ \boldsymbol{y}^{(1)}\equiv(y_{i_1}^{(1)},y_{i_2}^{(1)},\cdots,y_{i_{k'}}^{(1)})^t.\end{cases} \quad (3.7)$$

3.2 変換式の誘導

(0,1) 多項式の q 階導関数 $p^{*(q)}$ の $x=x_{i_s}\in\sigma_{K_s}$ 点での値を

$$y_{i_s}^{(q)}=P^{*(q)}(x_{i_s}) \quad (3.8)$$

とおけば，(0,1) 多項式は，規定値条件が $(\Sigma_K^{(0)}=\{y_1^{(0)},\cdots,y_k^{(0)}\}$, $\Sigma_{K_s}^{(q)}=\{y_{i_1}^{(q)},\cdots,y_{i_{k'}}^{(q)}\})$ であるような $(0,q)$ 多項式でもある．このことは，$(0,q)$ 多項式の規定値条件と (0,1) 多項式の規定値条件の間には一定の関係のあることを示唆している．実際，式 (3.1) で陽的に与えられた (0.1) 多項式を用いることによって，式 (3.8) から関係式

$$\boldsymbol{y}_{i_s}^{(q)}=\boldsymbol{r}^{*(q)}(x_{i_s})^t\boldsymbol{y}^{(0)}+\boldsymbol{S}^{*(q)}(x_{i_s})^t\boldsymbol{y}^{(q)} \quad (3.9)$$

を得ることができる．ここで，$\boldsymbol{r}^{*(q)}, \boldsymbol{S}^{*(q)}$ はそれぞれ係数多項式 $\boldsymbol{r}^*, \boldsymbol{S}^*$ の q 階導関数である．

また $y_{i_{s'}}^{(q)}$, $i_{s'}=i_1,i_2,\cdots,i_k$ を

$$\boldsymbol{y}^{(q)}\equiv(y_{i_1}^{(q)},y_{i_2}^{(q)},\cdots,y_{i_{k'}}^{(q)})^t \quad (3.10)$$

のようにベクトル表現すれば，式 (3.9) から，

$$\boldsymbol{y}^{(q)}=\boldsymbol{R}^{*(q)t}\boldsymbol{y}^{(0)}+\boldsymbol{S}^{*(q)t}\boldsymbol{y}^{(1)} \quad (3.11)$$

の関係が得られる．ここで $\boldsymbol{R}^{*(q)}, \boldsymbol{S}^{*(q)}$ はそれぞれ $k\times k'$, $k'\times k'$ の行列で次のようである：

$$\boldsymbol{R}^{*(q)}\equiv(\boldsymbol{r}^{*(q)}(x_{i_1}),\boldsymbol{r}^{*(q)}(x_{i_2}),\cdots,\boldsymbol{r}^{*(q)}(x_{i_{k'}}))^t, \quad (3.12)$$

$$\boldsymbol{S}^{*(q)}\equiv(\boldsymbol{S}^{*(q)}(x_{i_1}),\boldsymbol{S}^{*(q)}(x_{i_2}),\cdots,\boldsymbol{S}^{*(q)}(x_{i_{k'}}))^t. \quad (3.13)$$

式 (3.11) は，$(0,q)$ 多項式の (σ_{K_s} の上での) q 階微分係数 $\boldsymbol{y}^{(q)}$ と (0,1) 多項式の規定値条件 $(\Sigma_K^{(0)}, \Sigma_{K_s}^{(1)})$ との関係を表わす式で，係数行列 $\boldsymbol{R}^{*(q)}, \boldsymbol{S}^{*(q)}$ は基点集合 (σ_K,σ_{K_s}) のみに従っていることは特記すべき点である．また $\boldsymbol{S}^{*(q)}$ 行列が正則ならば，式 (3.11) から

$$\boldsymbol{y}^{(1)}=-\boldsymbol{S}^{*(q)-t}\boldsymbol{R}^{*(q)t}\boldsymbol{y}^{(0)}+\boldsymbol{S}^{*(q)-t}\boldsymbol{y}^{(q)} \quad (3.14)$$

を得ることができる．ここで $\boldsymbol{S}^{*(q)-t}$ は $\boldsymbol{S}^{*(q)t}$ の逆行列である．この関係は特に次の重要な意味をもつ；$\boldsymbol{S}^{*(q)}$ が正則となる基点集合の場合，その基点集合の上で与えられた規定条件 $(\Sigma_K^{(0)}, \Sigma_{K_s}^{(q)})$ に対する補間問題は同じ基点集合の上で与えられた規定値条件 $(\Sigma_K^{(0)}, \Sigma_{K_s}^{(1)})$ における補間問題に変換可能である．すなわち規定値条件の変換式である．

この事実は次節で明らかにされる．

3.3 $(0,q)$ 多項式の陽的表現

変換式 (3.14) と (0,1) 多項式 (3.6) を組み合わせることにより，陽的な $(0,q)$ 多項式

$$P(x)=\boldsymbol{r}^t(x)\boldsymbol{y}^{(0)}+\boldsymbol{S}^t(x)\boldsymbol{y}^{(q)} \quad (3.15)$$

ここで，

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}(x)\equiv\{\boldsymbol{r}^*(x)-\boldsymbol{R}^{*(q)}\boldsymbol{S}^{*(q)-1}\boldsymbol{S}^*(x)\}\\ \boldsymbol{S}(x)\equiv\boldsymbol{S}^{*(q)-1}\boldsymbol{S}^*(x)\end{cases} \quad (3.16)$$

を得ることができる．しかし，形式的に得られた式 (3.15) が $(0.q)$ 多項式であることを示す必要がある．それは次の補題で明らかになる．

補題 3.1

$\boldsymbol{S}^{*(q)}$ 行列は正則とする．そのとき式 (3.16) で与えられるベクトル多項式 $\boldsymbol{r}(x), \boldsymbol{S}(x)$ の成分 $r_1(x)$, $r_2(x),\cdots,r_k(x)$ と $S_{i_1}(x),S_{i_2}(x),\cdots,S_{i_{k'}}(x)$ は，境界条件 (2,2) を満たす $k+k'-1$ 次以下の多項式系である．

これは自明であるので証明は省略する．

更にこの補題から次のことが主張できる；(3.16) の係数多項式は基点集合の選び方に関係をもつが，規定値条件に対して全く独立である．従って $\boldsymbol{S}^{*(q)}$ が正則ならば，式 (3.15) によって与えられる多項式は準エルミート $(0,q)$ 補間問題に対する解空間の基底をなし，そして式 (3.15) は任意の規定値条件に対する $(0,q)$ 多項式の陽的な解であると考えることができる．

そこで解，すなわち $(0,q)$ 多項式の存在性に関して次の定理が得られる．

定理 3.1

$\boldsymbol{S}^{*(q)}$ 行列が正則となる基点集合のときの準エルミートの $(0,q)$ 補間問題は poised である．

証　明

補題3.1によって，式(3.16)のベクトルの成分は，境界条件(2,2)を満たす多項式系である．従って，$S^{*(q)}$ が正則なら $(0,q)$ 多項式は存在する．

一意性についても多項式の性質から明らか．

この定理は問題が poised となるための充分な条件を述べたにすぎないが，この条件はまた必要でもある．

定理 3.2

準エルミートの $(0,q)$ 補間問題が poised であるための必要充分条件は，$\det S^{*(q)} \neq 0$ である．

証　明

十分については定理3.1により明らか．従って必要について証明する，q 次以上の多項式 $f\in P_n(n=k+k'-1)$ に対する $(0,q)$ 多項式を

$$P(x)=\boldsymbol{r}^t(x)\boldsymbol{y}^{(0)}+\boldsymbol{S}^t(x)\boldsymbol{y}^{(q)}$$

とする．ここで $\boldsymbol{r}(x), \boldsymbol{S}(x)$ は，境界条件(2,2)を満足する $k+k'-1$ 次以下の多項式を成分にもつベクトルである．そのとき多項式の性質から，$f(x)=P(x)$ となり，これを x に関して一回微分して $x=x_{i_{s'}}\in\sigma_{K_s}$ とおけば $f^{(1)}(x_{i_{s'}})=P^{(1)}(x_{i_{s'}})$ を得る．$f^{(1)}(x_{i_{s'}})$ を $y_{i_{s'}}{}^{(1)}$ とおき $i_{s'}=i_1, i_2, \cdots, i_{k'}$ の順に縦に並べたものを $\boldsymbol{y}^{(1)}$ とすれば，関係式

$$\boldsymbol{y}^{(1)}=\boldsymbol{R}^{(1)t}\boldsymbol{y}^{(0)}+\boldsymbol{S}^{(1)t}\boldsymbol{y}^{(q)} \tag{3.17}$$

を得ることができる．ここで $\boldsymbol{R}^{(1)}\equiv(\boldsymbol{r}^{(1)}(x_{i_1}), \boldsymbol{r}^{(1)}(x_{i_2}), \cdots, \boldsymbol{r}^{(1)}(x_{i_{k'}}))$, $\boldsymbol{S}^{(1)}\equiv(\boldsymbol{S}^{(1)}(x_{i_1}), \boldsymbol{S}^{(1)}(x_{i_2}), \cdots, \boldsymbol{S}^{(1)}(x_{i_{k'}}))$.
式(3.17)は，式(3.11)と同様に $\boldsymbol{y}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(q)}$ の間の関係を表わしている．この2つの関係式を用いて $\boldsymbol{y}^{(1)}$ を消去すれば

$$(\boldsymbol{R}^{*(q)}+\boldsymbol{R}^{(1)}\boldsymbol{S}^{*(q)})^t\boldsymbol{y}^{(0)}+(\boldsymbol{S}^{(1)}\boldsymbol{S}^{*(q)}-I)^t\boldsymbol{y}^{(q)}=0$$

を得る．従って上式が恒等的になりたつためには，各係数の間に

$$\boldsymbol{R}^{*(q)}=\boldsymbol{R}^{(1)}\boldsymbol{S}^{*(q)},\quad \boldsymbol{S}^{(1)}\boldsymbol{S}^{*(q)}=I \tag{3.18}$$

の関係を必要とする．故に上の第2式から

$$\det \boldsymbol{S}^{(1)}\det \boldsymbol{S}^{*(q)}=1$$

を得て，$\det \boldsymbol{S}^{*(2)}\neq 0$ となる．

4. (0,2) 補間多項式

この章では，(0,2) 多項式の詳細を議論する．すなわち (0,1) 多項式から，行列 $\boldsymbol{R}^{*(2)}, \boldsymbol{S}^{*(2)}$ を導き，$\boldsymbol{S}^{*(2)}$ の正則性について論ずる．そして等間隔の分割における二，三の具体的な低次数の (0,2) 多項式を誘導する．

4.1 $\boldsymbol{R}^{*(2)}, \boldsymbol{S}^{*(2)}$ 行列

これらの行列は，陽的に表現された (0,1) 多項式の係数（多項式(3.2)，(3.3)）を x に関して2回微分して $x=x_{i_{s'}}\in\sigma_{K_s}$ とすることによって得られる．

実際，$\boldsymbol{R}^{*(2)}$ の要素 $(i,s')(i=1,2,\cdots,k, s'=1,2,\cdots,k')$ を $r_{i,s'}{}^{*(2)}$ とし，$\boldsymbol{S}^{*(2)}$ の要素 (s,s') $(s,s'=1,2,\cdots,k')$ を $S_{s,s'}{}^{*(2)}$ とすれば，次式のようになる：

$$r_{i,s'}{}^{*(2)}=\begin{cases}-g_{i_s}(x_{i_s})^2+g_{i_s}{}^{(1)}(x_{i_s}), & \text{if } i=i_{s'},\\ \{1-(x_{i_{s'}}-x_i)g_i(x_i)C_{K_s}(i)\}\times\dfrac{2}{(x_{i_{s'}}-x_i)^2}\Lambda_{i,i_{s'}}, & \text{if } i\neq i_{s'},\end{cases} \tag{4.1}$$

$$S_{s,s'}{}^{*(2)}=\begin{cases}2\,g_{i_s}(x_{i_s}), & \text{if } i_s=i_{s'},\\ -\dfrac{2}{(x_{i_s}-x_{i_{s'}})}\Lambda_{i_s,i_{s'}}, & \text{if } i_s\neq i_{s'}.\end{cases} \tag{4.2}$$

ただし，

$$\Lambda_{a,b}=\left\{\prod_{p\in K-\{a,b\}}\frac{(x_b-x_p)}{(x_a-x_p)}\right\}\left\{\prod_{i_p\in K_s-\{a,b\}}\frac{(x_b-x_{i_p})}{(x_a-x_{i_p})}\right\},$$

$$g_a(x_a)=\sum_{p\in K-\{a\}}\frac{1}{(x_a-x_p)}+\sum_{i_p\in K_s-\{a\}}\frac{1}{(x_a-x_p)}, \tag{4.3}$$

$$g_a{}^{(1)}(x_a)=\sum_{p\in K-\{a\}}\frac{-1}{(x_a-x_p)^2}+\sum_{i_p\in K_s-\{a\}}\frac{-1}{(x_a-x_{i_p})^2}, \tag{4.4}$$

そして $C_{K_s}(i)$ は次のように定義された示性関数である．

$$C_{K_s}(i)=\begin{cases}1, & i\in K_s,\\ 0, & i\in K-K_s.\end{cases}$$

従って，これらの $\boldsymbol{R}^{*(2)}, \boldsymbol{S}^{*(2)}$ を用いることにより，基点集合 $\{\sigma_K, \sigma_{K_s}\}$ の上での規定値条件 $(\boldsymbol{y}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(2)})$ に対する (0,2) 多項式の陽的表現は次式で与えられる：

$$P(x)=\boldsymbol{r}^t(x)\boldsymbol{y}^{(0)}+\boldsymbol{S}^t(x)\boldsymbol{y}^{(2)} \tag{4.5}$$

ここで，

$$\boldsymbol{r}(x)=\boldsymbol{r}^*(x)-\boldsymbol{R}^{*(2)}\boldsymbol{S}^{*(2)-1}\boldsymbol{s}^*(x) \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{S}(x)=\boldsymbol{S}^{(2)-1}\boldsymbol{s}^*(x) \tag{4.7}$$

ただし，$\boldsymbol{r}^*(x), \boldsymbol{S}^*(x)$ は式(3.7)によって定義されたベクトル多項式である．

4.2 $\boldsymbol{S}^{*(2)}$ 行列の正則性

定理3.2によって上の (0,2) 多項式が意味を持つためには，行列 $\boldsymbol{S}^{*(2)}$ が正則でなければならない．すでに **3.2** において注意を与えたように，$\boldsymbol{S}^{*(2)}$ の正則性は基点集合 (σ_K, σ_{K_s}) の選択のし方によって定まる．

そこで $\boldsymbol{S}^{*(2)}$ の正則性を保障する基点集合に対する条件を与える．

定理 4.1

基点集合 (σ_K, σ_{K_s}) が次の条件を満たすとき，かつそのときのみ $S^{*(2)}$ 行列は正則である：

$$\det S \equiv \det \begin{pmatrix} g_{1,1} & (x_{i_2}-x_{i_1})^{-1} & \cdots & (x_{i_{k'}}-x_{i_1})^{-1} \\ (x_{i_1}-x_{i_2})^{-1} & g_{2,2} & \cdots & (x_{i_{k'}}-x_{i_2})^{-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (x_{i_1}-x_{i_{k'}})^{-1} & (x_{i_2}-x_{i_{k'}})^{-1} & \cdots & g_{k',k'} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{4.8}$$

ここで，

$$g_{s,s} = \sum_{\substack{p=1 \\ \neq i_s}}^{k} \frac{1}{(x_{i_s}-x_p)} + \sum_{\substack{p=1 \\ \neq s}}^{k'} \frac{1}{(x_{i_s}-x_{i_p})} \tag{4.9}$$

証　明

式 (4.2) で得られた $S^{*(2)}$ の行列式について考える．det $S^{*(2)}$ の各 s 行に因子

$$d_s \equiv \frac{1}{2} \prod_{\substack{p=1 \\ \neq i_s}}^{k} (x_{i_s}-x_p) \prod_{\substack{p=1 \\ \neq S}}^{k'} (x_{i_s}-x_{i_p})$$

を掛け，そして各 $i_s{}'$ 列に因子

$$\bar{d}_{s'} \equiv \prod_{\substack{p=1 \\ \neq i_{s'}}}^{k} \frac{1}{(x_{i_{s'}}-x_p)} \prod_{\substack{p=1 \\ \neq s'}}^{k'} \frac{1}{(x_{i_{s'}}-x_{i_p})}$$

を掛ける．そのとき得られる行列式は det S となる．またこの det S に因子 $C \equiv \Pi_{s=1}^{k'} d_s \Pi_{s'=1}^{k'} \bar{d}_{s'}$ を乗じたものは，ふたたび det $S^{*(s)}$ の値に等しくなる．ところが因子 C を計算すれば $2^{k'}$ となるので det $S^{*(2)} = 2^{k'}$ det S の関係が得られる．従って det $S \neq 0$ なら $S^{*(2)}$ は正則行列となる．

次に準エルミートの (0, 2) 補間問題が nonpoised となる基点集合に対する条件について考察する．しかしこの議論を簡易化するために，基点集合の元の値の大小について次の順序関係を定めておく：

σ_K の元について；$x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k$,

σ_{K_s} の元について；$x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_{k'-1}} < x_{i_{k'}}$,

この問題に関してはすでに若干の結果が得られている．事実 P. Turán ら[2]は，基点集合 (σ_K, σ_{K_s}) が (1) $\sigma_K = \sigma_{K_s}$,（2）σ_K の基数＝奇数,（3）基点 $x_i \in \sigma_K$, $(i=1, 2, \cdots, k)$ は $x_i + x_{k-i} = 0$ を満たし，そして $x_{(k+1)/2} = 0$ であることの条件を満たすとき，問題が nonpoised となることを示した．また，最後の条件を（3）$x_{i+1} - x_i$＝一定によって置換えても nonpoised

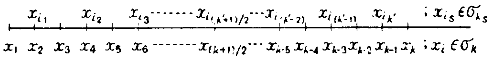

Fig. 1 An Example of the Set of Fundamental Points Leading to a Nonpoised (0, 2)-Interpolation Problem.

となることが J. Dyer[5] により示された．これは，等間隔の分割を意味する．

次の定理は，基点集合に課す条件（1）～（3）を一般化したものである．

定理 4.2

基点集合 (σ_K, σ_{K_s}) が下記の条件を満たす準エルミートの (0, 2) 補間問題は nonpoised である．すなわち，$S^{*(2)}$ は特異行列となる．

（1）$\sigma_K \supset \sigma_{K_s}$.

（2）σ_K の基数＝k（奇数），σ_{K_s} の基数＝k'（奇数），

（3）σ_K の元 $x_i (i=1, 2, \cdots, k)$ は $x_i + x_{k-i} = 2x_{(k+1)/2}$ を満たし，そして σ_{K_s} の元 $x_{i_s} (S=1, 2, \cdots, k')$ は $x_{i_s} + x_{i_{k'-i_s}} = 2x_{(i_{k'}+1)/2}$ を満たす．ただし $x_{(k+1)/2} = x_{(i_{k'}+1)/2}$.

証　明

定理 4.1 によって det $S=0$ を示すことにより証明を行う．そして簡易化のために $x_{(k+1)/2} = x_{(i_{k'}+1)/2} = 0$ とするが，これは本質に全く影響を与えない．この場合，条件（3）から $x_{i_s} - x_{i_{s'}} = -(x_{i_{k'-s}} - x_{i_{k'-s'}})$, $s, s' = 1, 2, \cdots, (k'+1)/2$ がいえ，更にこれから，式 (4.10) の $g_{s,s}$ について，$g_{i_s i_s} = -g_{i_{k'-s}, i_{k'-s}} (s=1, 2, \cdots, (k'-1)/2)$．そして $g_{i_{(k'+1)/2}, i_{(k'+1)/2}} = 0$ がいえる．これらの関係によって det S に対し次の操作が有効となる．すなわち det S の i_s 行と $i_{k'-s}$ 行 $(s=1, 2, \cdots, (k'-1)/2)$ を互換し，$i_{s'}$ 列と $i_{k'-s'}$ 列 $(s'=1, 2, \cdots, (k'-1)/2)$ を互換し，すべての行に (-1) を掛ければ，またもとの det S と一致するので，

$$\det S = (-1)^{(k'-1)/2}(-1)^{(k'-1)/2}(-1)^{k'} \det S$$

が得られる．条件により k' は奇数なので，上式は det $S = -$det S となる．従って det $S=0$.

定理 4.2 の条件を満たす一つの基点集合の元の幾何的布置が **Fig. 1** に示されている．

4.3　二，三の例

a. 基点集合が $\sigma_K = \{x_1=0, x_2=1\}$, $\sigma_{K_s} = \sigma_K$ のとき，存在条件は，

$$\det S = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

となる．従って，任意に与えられた規定値条件 $(\Sigma_K{}^{(0)} = \{y_1{}^{(0)}, y_2{}^{(0)}\}, \Sigma K_s{}^{(2)} = \{y_1{}^{(2)}, y_2{}^{(2)}\})$ に対する (0, 2) 多項式は存在して，

$P(x) = r_1(x) y_1{}^{(0)} + r_2(x) y_2{}^{(0)} + S_1(x) y_1{}^{(2)} + S_2(x) y_2{}^{(2)}$

のようになる．ここで $r_i, S_i (i=1, 2)$ は多項式で，**Table 1**（次頁参照）の case a に示されている．

b. 分割 σ_K が $\{x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2\}$ の場合：

Table 1 Examples of $(0,2)$-Interpolation Polynomials $P(x)=\sum_{i\in K} r_i(x)y_i^{(0)}+\sum_{is\in K_s} S_i(x)y_{is}^{(2)}$

Cases	Fundamental Point Sets		r_i or s_{is}	$C(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)$								
	σ_K	σ_{K_s}		C	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a	$x_1=0$	$x_{i_1}=x_1$	r_1	1	1	−1	0	0				
	$x_2=1$	$x_{i_2}=x_2$	r_2	1	0	1	0	0				
			s_1	1/6	0	−2	3	−1				
			s_2	1/6	0	−1	0	1				
b-1	$x_1=0$	$x_{i_1}=x_1$	r_1	1/6	6	−7	0	1				
	$x_2=1$		r_2	1/6	0	8	0	−2				
	$x_3=2$		r_3	1/6	0	−1	0	1				
			s_1	1/6	0	−2	3	−1				
b-3	$x_1=0$	$x_{i_1}=x_1$	r_1	1/2	2	−1	0	−2	1			
	$x_2=1$	$x_{i_2}=x_2$	r_2	1/2	0	0	0	4	−2			
	$x_3=2$		r_3	1/2	0	1	0	−2	1			
			s_1	1/6	0	−2	3	−1	0			
			s_2	1/6	0	−4	0	7	−3			
b-5	$x_1=0$	$x_{i_1}=x_1$	r_1	1/10	10	−13	0	4	−1			
	$x_2=1$	$x_{i_2}=x_3$	r_2	1/10	0	16	0	−8	2			
	$x_3=2$		r_3	1/10	0	−3	0	4	−1			
			s_1	1/60	0	−16	30	−17	3			
			s_3	1/60	0	4	0	−7	3			
c	$x_1=0$	$x_{i_1}=x_1$	r_1	1/42	42	−149	0	336	−350	147	−28	2
	$x_2=1$	$x_{i_2}=x_2$	r_2	1/42	0	216	0	−588	665	−315	70	−6
	$x_3=2$	$x_{i_3}=x_3$	r_3	1/42	0	−27	0	168	−280	189	−56	6
	$x_4=3$	$x_{i_4}=x_4$	r_4	1/42	0	−40	0	84	−35	−21	14	−2
			s_1	1/1,260	0	−72	630	−1,225	980	−378	70	−5
			s_2	1/1,260	0	2,376	0	−7,980	8,575	−3,591	665	−45
			s_3	1/1,260	0	1,404	0	−3,255	1,960	126	−280	45
			s_4	1/1,260	0	72	0	−140	35	63	−35	5

b-1　基点集合が $\sigma_K, \sigma_{K_s}=\{x_{i_1}=0\}$ のとき，存在条件は $\det \boldsymbol{S}=-3/2$ となる．従って任意に与えられた規定値条件 $(\Sigma_K^{(0)}=\{y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)}\}$, $\Sigma_{K_s}^{(2)}=\{y_1^{(2)}\})$ に対する $(0,2)$ 多項式は存在して，

$$P(x)=r_1(x)y_1^{(0)}+r_2(x)y_2^{(0)}+r_3(x)y_3^{(0)}+S_1(x)y_1^{(2)}$$

のようになる．ここで $r_i(i=1,2,3)$, S_1 は多項式で Table 1 の case b-1 に示されている．

b-2　基点集合が $\sigma_K, \sigma_{K_s}=\{x_{i_1}=1\}$ のとき，存在条件は $\det \boldsymbol{S}=0$ となる．従って，このような基点集合における $(0,2)$ 多項式は存在しない．

b-3　基点集合が $\sigma_K, \sigma_{K_s}=\{x_{i_1}=0,\ x_{i_2}=1\}$ のとき存在条件は，

$$\det \boldsymbol{S}=\begin{vmatrix} -5/2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{3}{2}$$

となる．従って，任意に与えられた規定値条件 $(\Sigma_K^{(0)}=\{y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)}\}$, $\Sigma_{K_s}^{(2)}=\{y_1^{(2)}, y_2^{(2)}\})$ に対する $(0,2)$ 多項式は存在して，

$$P(x)=r_1(x)y_1^{(0)}+r_2(x)y_2^{(0)}+r_3(x)y_3^{(0)}+S_1(x)y_1^{(2)}+S_2(x)y_2^{(2)}$$

のようになる．ここで $r_i(i=1,2,3)$, $S_i(i=1,2)$ は多項式で Table 1 の case b-3 に示されている．

b-4　基点集合が $\sigma_K, \sigma_{K_s}=\sigma_K$ のとき，存在条件は，

$$\det \boldsymbol{S}=\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

となる．従ってこのような基点集合のもとでは，$(0,2)$ 多項式は存在しない．

c.　基点集合が $\sigma_K=\{x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3\}$, $\sigma_{K_s}=\sigma_K$ のとき，存在条件は

$$\det \boldsymbol{S}=\begin{vmatrix} -11/3 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ -1 & -1 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1 & 1 & 1 \\ -1/3 & -1/2 & -1 & 11/3 \end{vmatrix}=\frac{105}{16}$$

となる．従って，任意に与えられた規定値条件 $(\Sigma_K^{(0)}=\{y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)}, y_4^{(0)}\}$, $\Sigma_{K_s}^{(2)}=\{y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, y_3^{(2)}, y_4^{(2)}\})$ に対する $(0,2)$ 多項式は存在して，

$$P(x)=r_1(x)y_1^{(0)}+r_2(x)y_2^{(0)}+r_3(x)y_3^{(0)}+r_4(x)y_4^{(0)}+S_1(x)y_1^{(2)}+S_2(x)y_2^{(2)}+S_3(x)y_3^{(2)}+S_4(x)y_4^{(2)}$$

のようになる．ここで $r_i, S_i(i=1,2,3,4)$ は多項式で，Table 1 の Case c に示されている．

5. 応　用

$(0, q)$ 多項式の重要な一つの応用例として

$$d^q y/dx^q = f(x, y),\ (q \text{は整数} \geq 2) \tag{5.1}$$

型の微分方程式の初期値問題の数値解法について述べる．その場合，基点集合 (σ_K, σ_{K_s}) を等分割点上で構成することが便利である．いま σ_K の各点 x_i における問題の解の値 y_i が既知とするとき，σ_{K_s} の各点 x_{i_s} における解の q 階微分係数 $y_{i_s}{}^{(q)}$ も式 (5,1) によって得ることができる．そのとき，これらを規定値条件とした $(0, q)$ 多項式は

$$P(x) = \sum_{i \in K} r_i(x) y_i + \sum_{i_s \in K_s} S_{i_s}(x) f(x_{i_s}, y_{i_s}) \tag{5,2}$$

のように書くことができる．ここで r_i, S_{i_s} は (2,2) の境界条件を満たす多項式である．すると式 (5,2) は σ_K を含む区間における一つの近似解となる．更に興味あるのは上式から導かれる逐次式で，式 (5,2) を q 回微分して $f(x_t, y_t{}^*)$ と置き（ここで $y_t{}^*$ は，等式が成りたつような適当な値をもつ $y(x_t)$ の近似値），更に $x_i = x_{n+i}$，$x_t = x_{n+\theta} (\equiv x_n + \theta h)$ と置き換えることによって得られ，次式のようになる．

$$\sum_{i \in K} \alpha_i(\theta) y_{n+i} = h^q \sum_{i_s \in K_s} \beta_{i_s}(\theta) f(x_{i_s}, y_{n+i_s}) + h^q \gamma(\theta) f(x_{n+\theta}, y_{n+\theta}{}^*) \tag{5.3}$$

ここで，h は分割の単位，θ は非整数で各係数は

$$\alpha_i(\theta) = r_i{}^{(q)}(\theta)/r_k{}^{(q)}(\theta), \quad \text{for } i \in K,$$
$$\beta_i(\theta) = -S_{i_s}{}^{(q)}(\theta)/r_k{}^{(q)}(\theta), \quad \text{for } i_s \in K_s,$$
$$\gamma(\theta) = 1/r_k{}^{(q)}(\theta),$$

によって定義されている．

この逐次式は，$f(x_{n+\theta}, y_{n+\theta}{}^*)$ を計算するために $y_{n+\theta}{}^*$ の値を適当な手段によって（例えば補間(外)式を用いて）求める必要があることを除いて，通常の P-C 多段法と全く同等に扱える．ただ θ の値の選択については注意が必要で，逐次式の安定性を考慮せねばならない．もし h が充分に小さければ，式 (5,3) の安定性は $h=0$ として得られる差分式の特性多項式

$$\rho(Z\,;\theta) = \alpha_0(\theta) + \alpha_1(\theta) Z + \cdots + \alpha_k(\theta) Z^k$$

の性質に従い，そしてこの多項式の根の絶対値がすべて1以下で，1に等しくなる根の重複度が高々 q となるように θ を選ぶことによって保障される．一例として $q=2$ の場合，(0,2) 多項式

$$P(x) = \sum_{i=1}^{4} r_i(x) y_i{}^{(0)} + h^2 \sum_{i=1}^{3} S_i(x) y_i{}^{(2)},$$

$(r_i, i=1, 2, 3, 4,\ S_i, i=1, 2, 3$ は **Table 2** 参照) を用いて逐次式を構成するとき，次式のようになる，

Table 2 Polynomial Coefficients $\{r_i\}$, $\{s_{i_s}\}$ of $(0, q)$-Interpolation Polynomial on Fundamental Point Sets $\sigma_K = \{0, 1, 2, 3\}$ and $\sigma_{K_s} = \{0, 1, 2\}$.

$\{r_i\}$	$r_1(x) = -1/30(10x^6 - 87x^5 + 260x^4 - 280x^3 + 127x - 30)$
	$r_2(x) = 1/30(20x^6 - 171x^5 + 505x^4 - 340x^3 + 260x)$
	$r_3(x) = -1/30(10x^6 - 81x^5 + 230x^4 - 240x^3 + 81x)$
	$r_4(x) = 1/30(3x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 8x)$
$\{s_{i_s}\}$	$s_1(x) = 1/180(5x^6 - 45x^5 + 145x^4 - 195x^3 + 90x^2)$
	$s_2(x) = 1/180(50x^6 - 432x^5 + 1,270x^4 - 1,320x^3 + 432x)$
	$s_3(x) = 1/180(5x^6 - 63x^5 + 235x^4 - 285x^3 + 108x)$

$$\sum_{i=0}^{3} \alpha_i y_{n+i} = h^2 \sum_{i=0}^{2} \beta_i f(x_{n+i}, y_{n+i}) + h^2 r f(x_{n+\theta}, y_{n+\theta}{}^*)$$

ここで $\alpha_0 = -5\theta + 14,\ \beta_0 = -(5\theta^2 - 15\theta + 3)/12\theta,$

$\alpha_1 = 10\theta - 27,\quad \beta_1 = -(25\theta^2 - 94\theta + 66)/6(\theta - 1),$

$\alpha_2 = -5\theta + 2,\quad \beta_2 = -(5\theta^2 - 37\theta + 57)/12(\theta - 2),$

$\alpha_3 = 1,\qquad \gamma = 1/2\theta(\theta^2 - 3\theta + 2),$

そして，上式に対応する特性多項式の根は，1（重根）と $(5\theta - 14)$ となり，θ が開区間 $(13/5, 3)$ に属す点を選ぶ限り逐次式は安定である．なおここで論じた逐次式の安定性，収束性などに関する詳細は文献 7), 8) を参照されたい．

6. む す び

本論文では準エルミートの $(0, q)$ 補間問題が従来試みられなかった方法によって解かれた．解とエルミート補間式との関係を明らかにして，一つの変換によってエルミート補間式から陽的な解（式 (3.15)）を求めた．そのとき，そのような一意の変換が可能となるための条件，すなわち一意の解が存在するための必要充分条件も定理 3.2 によって示された．

また比較的研究の進んでいる $q=2$ の場合については，更に詳細な議論を行い，(0,2) 多項式の存在条件は簡単な行列の正則性と同等なことが示された（定理 4.1），しかし本論文で得られた $(0, q)$ 多項式を実際に利用するためには，更にその補間誤差について研究する必要がある．なお $f \in C_I{}^{(q)}$ に対する補間誤差 e の評価は可能で，エルミート補間誤差を e^* とすれば，**3.** の変換の論法によって，

$$e(x) = e^*(x) - \mathbf{s}^{*t}(x) \mathbf{S}^{*-t} \mathbf{e}^{*(q)}, \qquad \text{for } x \in I,$$

の関係を得ることができる．ここで，$\mathbf{e}^{*(q)} = (e^{*(q)}(x_i), e^{*(q)}(x_{i_2}), \cdots, e^{*(q)}(x_{i_k}))^t$ で，$e^{*(q)}(x)$ は e^* の q 階導関数である．

最後に，本論文の陽的な $(0, q)$ 多項式は行列式によって定義される $(0, q)$ 多項式のように，分割数の増加

にともない演算回数が急激に増加することはないし，また等分割の場合，定義を与える行列式はしばしば悪条件となるが本多項式ではそのような事態は生じないことを指摘しておく．

参考文献

1) A. Sharm : Some Poised and Nonpoised Problem of Interpolation, SIAM Review, Vol. 14, No. 1, pp. 129～150 (1972).
2) J. Surányi and P. Turán : Notes on Interpolation. I. (On Some Interpolatorical Properties of the Ultraspherical Polynomials), Acta Math. Acad. Sci. Hung., 6, pp. 67～79 (1955).
3) J. Balazs and P. Turán : Notes on Interpolation. II. (Explicit Formulae), Acta Math. Acad. Sci. Hung., 8, pp. 201～215 (1957).
4) J. Balażs and P. Turán : Notes on Interpolation. III. (Convergence), Acta Math. Acad. Sci. Hung., 9, pp. 195～214 (1958).
5) J. Dyer : Generalized Multistep Methods in Satellite Orbit Computation, J. ACM, Vol. 15. No. 4, pp. 712～719 (1968).
6) A. Ralston : A First Course in Numerical Analysis, McGrow-Hill, New York, (1965).
7) Ch. Suzuki : Off-Grid Type Numerical Integration Methods in Orbit Computation, FUJITSU S. T. J., Vol. 10, No. 4, pp. 53～82(1974).
8) Ch. Suzuki, T. Fukunaga and Y. Kosaka : Newly Developed Generalied Multistep Methcd in Numerical Integration, FUJITSU S. T. J., Vol. 11, No. 3, pp. 51～78 (1975).

(昭和51年5月14日受付)
(昭和51年8月13日再受付)