

## 辺縮約制約を持つ部分 $k$ -木への辺縮約問題に 対する多項式時間アルゴリズム

山田 貴志<sup>†1</sup> 正代 隆義<sup>†2</sup>

グラフ辺縮約問題とは、2つのグラフ  $G$  と  $H$  を入力とするとき、 $G$  を辺縮約によって  $H$  に変換できるかを問う問題である。この問題は  $H$  が支配頂点を持たないならば NP 完全である。グラフ  $H$  の縮約不能頂点  $v$  とは、辺縮約によって  $v$  へ同一視される  $G$  の頂点数がちょうど 1 となる頂点である。それ以外の頂点を縮約可能頂点と呼ぶ。本論文では、グラフ  $H$  の頂点のうち、独立かつ次数 2 の頂点を縮約可能頂点と指定することで、 $H$  が部分  $k$ -木である場合に、グラフ辺縮約問題が多項式時間計算可能であることを示す。

### A Polynomial Time Algorithm for Restricted Edge Contraction of Partial $k$ -trees

TAKASHI YAMADA<sup>†3</sup> and TAKAYOSHI SHOUDAI<sup>†3</sup>

This paper deals with a problem to decide whether a given graph structure appears as a *pattern* in the structure of a given graph.  $H$ -contractibility problem takes as input two graphs  $G$  and  $H$ , and asks whether  $G$  can be contracted to  $H$ . This problem is NP-complete if  $H$  does not have a dominating vertex. A vertex  $v$  in  $H$  is said to be *uncontractible* if only one vertex in  $G$  can be mapped to  $v$  by edge contractions. In this paper, we show that  $H$ -contractibility problem is polynomial-time solvable if  $H$  is a partial  $k$ -tree and all contractible vertices in  $H$  are distinguished as independent vertices of degree 2.

### 1. はじめに

情報化技術の発達により、地図データ、CAD、ゲノムデータ、化学化合物、World Wide Web といったグラフ構造を持つデータが大量にデータベースに記録されるようになった。グラフ構造を持つデータのデータベースを対象にした計算問題に、あるグラフの構造がパターンとして別のグラフの構造に表れるかを判定するものがある。グラフ辺縮約問題はこのような問題の 1 つとみなすことができる。グラフ辺縮約問題とは、2つのグラフ  $G$  と  $H$  を入力とし、辺縮約によって  $G$  を  $H$  に変換することができるかをどうかを問う判定問題である。この問題は、 $H$  が支配頂点を持たない場合、NP 完全であることが知られている<sup>3)</sup>。このことから、辺縮約問題を NP 完全にする入力  $H$  で頂点数が最小のものは、頂点数 4 の道、および頂点数 4 のサイクルである。この問題に対して、入力  $H$  に制限を加えることで多項式時間アルゴリズムを求める研究が行われている<sup>4),6)</sup>。

部分  $k$ -木とは、木幅が定数で抑えられるグラフであり、実用的なアプリケーションとして、化学化合物のデータベースを対象としたグラフマイニングに利用することができる<sup>5),9),10)</sup>。例えば、化学化合物のデータベースで、グラフマイニングのターゲットとして知られている NCI Chemical Dataset<sup>\*1</sup>では、それに含まれる化学化合物 250,251 個の分子グラフのうち、99.37% が部分 3-木である<sup>5)</sup>。グラフを入力とする問題で一般的には計算が困難であるものでも、部分  $k$ -木のクラスでは多項式時間で計算可能であることがよくある<sup>1)</sup>。グラフ同型性判定問題はそのような問題のうちの 1 つである<sup>2),7)</sup>。

グラフ  $H$  の縮約不能頂点  $v$  とは、辺縮約によって  $v$  へ同一視される  $G$  の頂点数がちょうど 1 となる頂点である。縮約不能頂点以外の  $H$  の頂点を縮約可能頂点と呼ぶ。本論文では、グラフ  $H$  の頂点のうち、独立かつ次数 2 の頂点を縮約可能頂点と指定することで、グラフ制約辺縮約問題を定義する。さらに、部分  $k$ -木同型性判定アルゴリズムのアイデア<sup>7)</sup>を用いることで、 $H$  が部分  $k$ -木である場合にグラフ制約辺縮約問題が多項式時間計算可能であることを示す。

### 2. 定 義

本論文で扱うグラフは有限の頂点数を持つ無向グラフであり、ループや多重辺を持たないものとする。グラフ  $G$  に対し、 $G$  の頂点集合を  $V(G)$ 、辺集合を  $E(G)$  と表記

<sup>†1</sup> 九州大学大学院システム情報科学府情報学専攻

<sup>†2</sup> 九州大学大学院システム情報科学研究院情報学部門

<sup>†3</sup> Department of Informatics, Kyushu University, Japan

\*1 <http://cactus.nci.nih.gov>

する。  $V(G)$  の部分集合  $U$  に対し、  $G$  の  $U$  による誘導部分グラフを  $G[U]$  と表記し、  $G[U] = (U, \{\{u, w\} \in E(G) \mid u, w \in U\})$  と定める。また、  $v \in V(G)$  の次数を  $\deg_G(v)$  と表記する。

**定義 1 (樹状分解)**. グラフ  $G$  の樹状分解  $(T, \mathcal{X})$  を、  $T$  が木であり、  $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}(\alpha) \mid \alpha \in V(T) \text{ かつ } \mathcal{X}(\alpha) \subseteq V(G)\}$  が次を満たすものと定める。

- (1)  $\bigcup_{\alpha \in V(T)} \mathcal{X}(\alpha) = V(G)$ ,
- (2)  $\forall v, w \in V(G) [\{v, w\} \in E(G) \Rightarrow \exists \alpha \in V(T) [\{v, w\} \subseteq \mathcal{X}(\alpha)]]$ ,
- (3)  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V(T) [\beta \text{ が } \alpha \text{ から } \gamma \text{ への道上の頂点である} \Rightarrow \mathcal{X}(\alpha) \cap \mathcal{X}(\gamma) \subseteq \mathcal{X}(\beta)]$ .

樹状分解  $(T, \mathcal{X})$  の幅を、  $\max_{\alpha \in V(T)} |\mathcal{X}(\alpha)| - 1$  と定める。グラフ  $G$  の木幅とは、グラフ  $G$  の樹状分解で幅最小であるものの幅である。部分  $k$ -木とは、木幅が  $k$  以下であるグラフのことを言う。グラフ  $G$  の樹状分解で、  $G$  の木幅と等しい幅をもつものを、そのグラフの最適な樹状分解と呼ぶ。グラフ  $G$  の頂点と区別するため、以後、  $T$  の頂点をノードと呼ぶ。また、樹状分解  $(T, \mathcal{X})$  の木  $T$  は根付き木であるとみなす。  $T$  の根ノードを  $r_T$  と表記する。

樹状分解  $(T, \mathcal{X})$  とそのノード  $\alpha \in V(T)$  に対し、  $T$  の  $\alpha$  を根とする極大部分木を  $T^{\downarrow \alpha}$  と表記する。また、  $T^{\downarrow \alpha}$  の各要素の和集合を  $\mathcal{X}(T^{\downarrow \alpha})$  と表記する。すなわち、  $\mathcal{X}(T^{\downarrow \alpha}) = \bigcup_{\beta \in V(T^{\downarrow \alpha})} \mathcal{X}(\beta)$ 。

次に、名古屋<sup>7)</sup>、戸田<sup>8)</sup>に従って、樹状分解の正規形を定める。樹状分解  $(T, \mathcal{X})$  が  $\forall \{\alpha, \beta\} \in E(T) [|\mathcal{X}(\alpha) \setminus \mathcal{X}(\beta)| = |\mathcal{X}(\beta) \setminus \mathcal{X}(\alpha)| = 1]$  を満たすとき、この樹状分解を滑らかであると言う。また、樹状分解  $(T, \mathcal{X})$  が  $\forall \{\alpha, \beta\} \in E(T) [\beta \text{ は } \alpha \text{ の子供であり、 } G[\mathcal{X}(T^{\downarrow \beta}) \setminus \mathcal{X}(\alpha)] \text{ が連結}]$  を満たすとき、この樹状分解は部分木連結特性を持つと言う。

**定義 2 (正規形樹状分解)**. 以下の3つの条件を満たす樹状分解  $(T, \mathcal{X})$  を、正規形樹状分解と呼ぶ。

- (1)  $(T, \mathcal{X})$  は最適である、
- (2)  $(T, \mathcal{X})$  は滑らかである、
- (3)  $T$  が根付き木であり、  $(T, \mathcal{X})$  が部分木連結特性を持つ。

部分  $k$ -木  $G$  の正規形樹状分解  $(T, \mathcal{X})$  のノード  $\alpha, \beta \in V(T)$  に対し、  $\beta$  が  $\alpha$  の子ノードであるとき、  $S_\beta = \mathcal{X}(\alpha) \cap \mathcal{X}(\beta)$ 、  $P_\beta = \mathcal{X}(\beta) \setminus \mathcal{X}(\alpha)$  と表記する。根ノード  $r_T \in V(T)$  に対しては、  $S_{r_T} = \emptyset$ 、  $P_{r_T} = \mathcal{X}(r_T)$  となる。根ではないノード  $\beta$  に対しては、  $(T, \mathcal{X})$  が滑らかであることから、  $|S_\beta| = k$ 、  $|P_\beta| = 1$  である。

**定理 1 (名古屋<sup>7)</sup>)**. 部分  $k$ -木  $G$  の最適な樹状分解が与えられたとき、  $G$  の正規形樹状分

解は  $O(kn^2)$  時間で構成することができる。ただし、  $n$  は  $G$  の頂点数である。

部分  $k$ -木  $G$  とグラフ  $H$  が与えられたとき、  $G$  の正規形樹状分解を用いることで、  $G$  が  $H$  に同型なグラフであるかを多項式時間で判定することができる。

**定理 2 (Bodlaender<sup>2)</sup>、名古屋<sup>7)</sup>)**. 部分  $k$ -木  $G$  の最適な樹状分解が与えられたとき、部分  $k$ -木の同型判定問題は、  $O(n^{k+4})$  時間で計算可能である。ただし、  $n$  は同型判定を行う部分  $k$ -木の頂点数である。

### 3. グラフ制約辺縮約問題

**定義 3 ( $H$ -証拠構造)**.  $G, H$  をグラフとする。  $H$ -証拠構造  $\mathcal{W}$  とは、以下の四つの条件を満たすように  $V(G)$  を  $|V(H)|$  個の集合に分割し、各要素にそれぞれ  $H$  の頂点を割り当てたものである。  $h \in V(H)$  に割り当てられた  $\mathcal{W}$  の要素を  $W(h)$  と表記する。すなわち、  $\mathcal{W} = \{W(h) \mid h \in V(H)\}$  とするとき、

- (1)  $\bigcup_{h \in V(H)} W(h) = V(G)$ 、
- (2)  $h \neq h' (h, h' \in V(H))$  に対し  $W(h) \cap W(h') = \emptyset$ 、
- (3) 各集合  $W(h) \in \mathcal{W}$  に対し、誘導部分グラフ  $G[W(h)]$  が連結である、かつ
- (4) 任意の  $h, h' \in V(H)$  に対し  $h$  と  $h'$  が  $H$  上で隣接するとき、そのときに限り  $W(h)$  の要素の頂点と  $W(h')$  の要素の頂点から成る辺が  $G$  上に存在する。

各集合  $W(h) \in \mathcal{W}$  を  $H$ -証拠集合と呼ぶ。  $G$  が  $H$ -証拠構造を持つとき、各証拠集合  $W(h) \in \mathcal{W}$  に対し、  $W(h)$  に属する頂点に辺縮約を繰り返し、一つの頂点とすることで、  $G$  を  $H$  に変換することができる。まず、本論文で扱う問題を下記のように定義する。

#### 一般化辺縮約問題

入力：グラフ  $G$ 、グラフ  $H$ 、  $V(H)$  の部分集合  $U$ 。

問題：グラフ  $G$  の  $H$ -証拠構造  $\mathcal{W}$  で、  $\forall h \in V(H) \setminus U [ |W(h)| = 1 ]$  を満たすものが存在するか？

$U$  の要素を縮約可能頂点、  $V(H) \setminus U$  の要素を縮約不能頂点と呼ぶ。グラフ  $G$ 、グラフ  $H$ 、頂点集合  $U$  が与えられたとき、これらを入力とした一般化辺縮約問題が *yes* を返すならば、  $G$  は  $(H, U)$ -縮約可能であるという。  $U = V(H)$  であるとき、  $G$  が  $(H, U)$ -縮約可能であることは、  $G$  が  $H$ -縮約可能であることと同値である。一般化辺縮約問題は辺縮約問題を包含するため、明らかに NP 完全である。図1に縮約可能頂点と縮約不能頂点の例を示す。図1において、グラフ  $G$  は  $(H_1, \{b, c\})$ -縮約可能であるが、  $(H_2, \{g\})$ -縮約可能ではない。

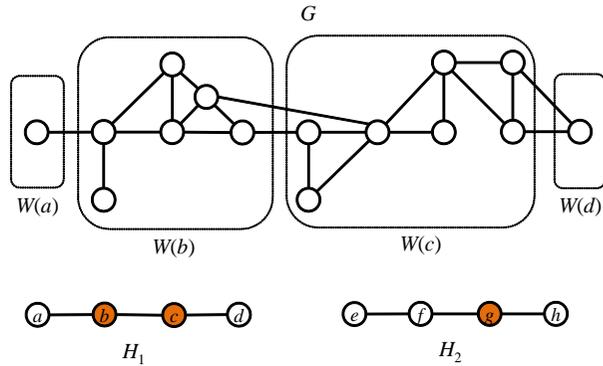


図1 色付きの頂点で縮約可能頂点，無色の頂点で縮約不能頂点を表す．グラフ  $G$  は  $H_1$ -証拠構造  $\mathcal{W} = \{W(a), W(b), W(c), W(d)\}$  により  $(H_1, \{b, c\})$ -縮約可能である．しかし  $(H_2, \{g\})$ -縮約可能ではない．

本論文の目的は次の定理を示すことである．

定理 3.  $G$  と  $H$  をグラフ， $U$  を  $V(H)$  の部分集合とする． $G, H, U$  が次の 3 つの条件を満たすとする：

- (1) 定数  $k \geq 1$  に対して， $H$  は部分  $k$ -木である，
- (2)  $U$  は  $H$  の独立点集合である，かつ
- (3)  $\forall v \in U [\deg_H(v) = 2]$  .

このとき，一般化辺縮約問題は  $O(N^{k+4.5})$  時間で計算可能である．ただし， $N$  は  $G$  の頂点数である．

定理 3 の問題を次のように定義する．

#### グラフ制約辺縮約問題

入力：グラフ  $G$ ，グラフ  $H$ ，以下の条件を満たす  $V(H)$  の部分集合  $U$ ：

- (1)  $U$  は  $H$  の独立点集合である，かつ
- (2)  $\forall v \in U [\deg_H(v) = 2]$  .

問題：グラフ  $G$  の  $H$ -証拠構造  $\mathcal{W}$  で， $\forall h \in V(H) \setminus U [|\mathcal{W}(h)| = 1]$  を満たすものが存在するか？

グラフ制約辺縮約問題において，グラフ  $H$  が部分  $k$ -木 ( $k \geq 1$ ) であるとき，この問題を部分  $k$ -木制約辺縮約問題と呼ぶ．

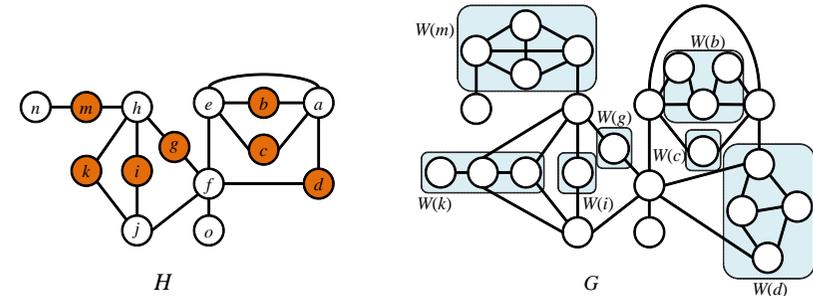


図2 グラフ  $H$  は縮約可能頂点集合  $U = \{b, c, d, g, i, k, m\}$  を持つ． $G$  は  $(H, U)$ -縮約可能である．

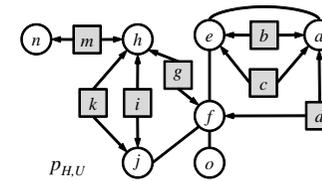


図3 図3のグラフ  $H$  と縮約頂点集合  $U$  に対するグラフパターン  $p_{H,U}$  . この図以降では，構造変数  $(u, \{v, w\})$  をその第 1 成分の頂点識別子  $u$  を内部に記した正方形と第 2 成分の頂点集合  $\{v, w\}$  の要素を指す矢印で表す．

#### 4. グラフパターン照合問題

グラフ制約辺縮約問題の入力  $G, H, U$  が与えられたとき，縮約可能頂点  $u \in U$  と  $u$  の隣接頂点集合  $\{v, w\}$  の組  $(u, \{v, w\})$  を構造変数と呼ぶ． $v, w$  は  $V(H) \setminus U$  の頂点であることに注意する．

定義 4 (グラフパターン). グラフ  $H$  の独立点集合  $U$  に対し， $U$  に含まれる全ての頂点の次数が 2 であるとき，次に定める 3 つ組  $p_{H,U} = (V, E, P)$  をグラフパターンと呼ぶ．

- (1)  $V = V(H) \setminus U$  ,
- (2)  $E = \{\{v, w\} \mid v, w \in V(H) \setminus U \text{ かつ } \{v, w\} \in E(H)\}$  ,
- (3)  $P = \{(u, \{v, w\}) \mid u \in U \text{ かつ } v \text{ と } w \text{ は } u \text{ の隣接頂点}\}$  .

グラフパターン  $p_{H,U} = (V, E, P)$  に対し， $V$  を頂点集合， $E$  を辺集合， $P$  を構造変数集合と呼ぶ．グラフと同様に，グラフパターン  $p_{H,U}$  の頂点集合を  $V(p_{H,U})$ ，辺集合を

$E(p_{H,U})$ , 構造変数集合を  $P(p_{H,U})$  と表記する. 図 2 のグラフ  $H$  と縮約可能頂点集合  $U = \{b, c, d, g, i, k, m\}$  に対するグラフパタン  $p_{H,U}$  を図 3 に示す. グラフパタン  $p_{H,U}$  は頂点集合  $V(p_{H,U}) = V(H) \setminus U$ , 辺集合  $E(p_{H,U}) = E(H) \setminus \{(x, u) \in E(H) \mid x \in U\}$ , 構造変数集合  $P(p_{H,U}) = \{(x, N_H(u)) \mid x \in U\}$  を持つ. ここで,  $N_H(u)$  は頂点  $u$  の隣接頂点集合を表す.

頂点集合の部分集合  $A \subseteq V(p_{H,U})$  に対し,  $p_{H,U}$  の  $A$  による誘導部分パタンを  $p_{H,U}[A] = (A, \{(u, w) \in E(p_{H,U}) \mid u, w \in A\}, \{(v, \{v_1, v_2\}) \in P(p_{H,U}) \mid v_1, v_2 \in A\})$  と定める.

**定義 5 (束縛).** 構造変数  $(v, \{v_1, v_2\}) \in P(p_{H,U})$  に対し,  $v_1$  と  $v_2$  を適当に並べて二つ組  $(v_1, v_2)$  を構成する.  $C$  を頂点数 3 以上の連結なグラフとし,  $w_1, w_2 \in V(C)$  を  $G[V(C) \setminus \{w_1, w_2\}]$  が連結であり,  $\{w_1, w_2\} \notin E(C)$  を満たす頂点とする. このとき, 演算  $(v, (v_1, v_2)) := [C, (w_1, w_2)]$  を束縛と呼び, 以下の操作を表す.

- (1) グラフパタン  $(V(p_{H,U}) \cup V(C), E(p_{H,U}) \cup E(C), P(p_{H,U}))$  を構成する.
- (2) 辺  $\{v_1, w_1\}, \{v_2, w_2\}$  を追加する.
- (3) 辺  $\{v_1, w_1\}, \{v_2, w_2\}$  を縮約する. 縮約後の頂点の識別子は, それぞれ  $v_1, v_2$  とする.
- (4) 構造変数  $(v, \{v_1, v_2\})$  を削除する.

束縛の集合  $\theta$  を代入と呼ぶ. グラフパタン  $p_{H,U}$  に  $\theta$  に含まれるすべての束縛を施して得られるグラフを  $p_{H,U}\theta$  と表記する. 束縛と縮約可能頂点に対する辺縮約の関係を図 4 に示す. 束縛とは,  $H$ -証拠集合の 1 つを辺縮約によって 1 つの頂点にするという操作の逆操作である.

**定義 6 (照合).** グラフパタン  $p_{H,U}$  がグラフ  $G$  に照合するとは,  $p_{H,U}$  に対する代入  $\theta$  が存在して,  $p_{H,U}\theta$  が  $G$  と同型になるときをいう.

#### グラフパタン照合判定問題

入力: グラフ  $G$ , グラフパタン  $p_{H,U}$ .

問題: グラフパタン  $p_{H,U}$  がグラフ  $G$  に照合するか?

この問題がグラフ制約辺縮約問題と同値であることを示す.

**命題 1.** グラフ  $G$ , グラフ  $H$ ,  $V(H)$  の部分集合  $U$  がグラフ制約辺縮約問題の入力であるとき,  $G$  が  $(H, U)$ -縮約可能である  $\Leftrightarrow$  グラフパタン  $p_{H,U}$  は  $G$  に照合する.

**証明.** ( $\Rightarrow$ )  $G$  が  $(H, U)$ -縮約可能であるとき, 条件を満たす  $H$ -証拠構造の 1 つを  $\mathcal{W}$  とおく.  $p_{H,U}$  の各構造変数  $(v, \{v_1, v_2\})$  に対し,  $W(v_1) = \{v'_1\}$ ,  $W(v_2) = \{v'_2\}$  とおく.  $G$  の誘導部分グラフ  $G[W(v) \cup W(v_1) \cup W(v_2)]$  の辺集合から,  $\{v'_1, v'_2\}$  を削除したグラフを

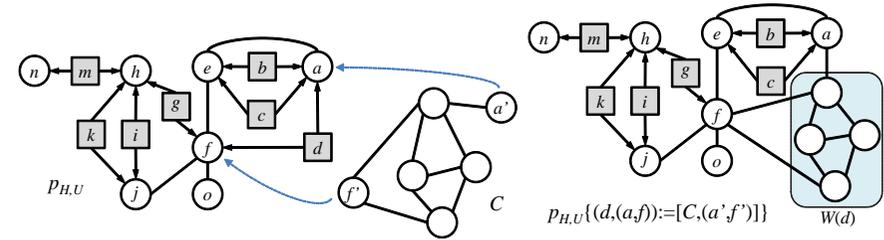


図 4 束縛の例. 束縛  $(d, (a, f)) := [C, (a', f')]$  は, 構造変数  $(d, \{a, f\})$  にグラフ  $C$  を代入する操作のことである. この操作の結果, グラフ  $H'$  が得られる. 束縛によって追加された頂点は, 辺縮約によって 1 つの頂点にすることができる.

$G_v$  とおく.  $p_{H,U}$  の各構造変数  $(v, \{v_1, v_2\})$  に対する束縛  $(v, (v_1, v_2)) := [G_v, (v'_1, v'_2)]$  の集合を  $\theta$  とおく. このとき,  $p_{H,U}\theta$  が  $G$  に同型なグラフであることを示す.  $V(p_{H,U}\theta)$  は,  $V(p_{H,U})$ , および各構造変数  $(v, \{v_1, v_2\}) \in P(p_{H,U})$  に対する  $W(v)$  の和集合である. 以下に示す写像  $\varphi: V(p_{H,U}\theta) \rightarrow V(G)$  を構成する.

$$\varphi(h) = \begin{cases} w & h \in V(p_{H,U}) \text{ かつ } W(h) = \{w\} \text{ のとき,} \\ h & \exists (v, \{v_1, v_2\}) \in P(p_{H,U}) [h \in W(v)] \text{ のとき.} \end{cases}$$

$h, h' \in V(p_{H,U})$  のとき,  $W(h) = \{\varphi(h)\}$ ,  $W(h') = \{\varphi(h')\}$  であることから,  $H$ -証拠構造の定義より  $\{h, h'\} \in E(H) \Leftrightarrow \{\varphi(h), \varphi(h')\} \in E(G)$  が成り立つ. また,  $E(p_{H,U})$  の定義より  $\{h, h'\} \in E(H) \Leftrightarrow \{h, h'\} \in E(p_{H,U})$  であるため,  $\{h, h'\} \in E(p_{H,U}) \Leftrightarrow \{\varphi(h), \varphi(h')\} \in E(G)$  が成り立つ. さらに, 構造変数  $(u, \{v, w\}) \in P(p_{H,U})$  に対し  $h, h' \in W(u)$  であるとき,  $(u, \{v, w\})$  に束縛されるグラフ  $G_u$  と束縛の定義から,  $\{h, h'\} \in E(p_{H,U}) \Leftrightarrow \{\varphi(h), \varphi(h')\} \in E(G)$  が成り立つ.

2 つの異なる構造変数  $(v, \{v_1, v_2\}) \in P(p_{H,U})$ ,  $(u, \{u_1, u_2\}) \in P(p_{H,U})$  に対し,  $h \in W(v)$ ,  $h' \in W(u)$  であるとき, 束縛の定義から  $\{h, h'\} \notin E(p_{H,U}\theta)$  である. また, 縮約可能頂点  $v, u$  は  $H$  上で隣接しないという条件と,  $H$ -証拠構造の定義から,  $\{h, h'\} \notin E(G)$  である. したがって  $\{h, h'\} \in E(p_{H,U}) \Leftrightarrow \{\varphi(h), \varphi(h')\} \in E(G)$  が成立している.

構造変数  $(u, \{v, w\}) \in P(p_{H,U})$  に対し,  $h \in V(p_{H,U})$ ,  $h' \in W(u)$  であるとする.  $h = v$  または  $h = w$  であるとき, 構造変数  $(u, \{v, w\})$  に束縛されるグラフ  $G_u$  と束縛の定義から,  $\{h, h'\} \in E(p_{H,U}) \Leftrightarrow \{\varphi(h), \varphi(h')\} \in E(G)$  が成り立つ.  $h \neq v$  かつ  $h \neq w$  であるとき,  $H$  において  $u$  の隣接頂点は  $v, w$  のみであるため,  $\{h, u\} \notin E(H)$  で

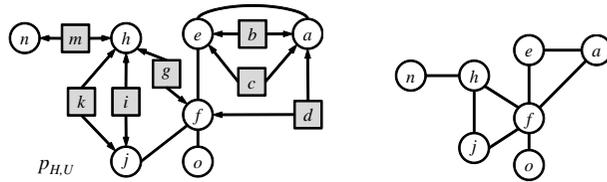


図5 グラフパターン  $p_{H,U}$  とその基礎グラフ (右) .

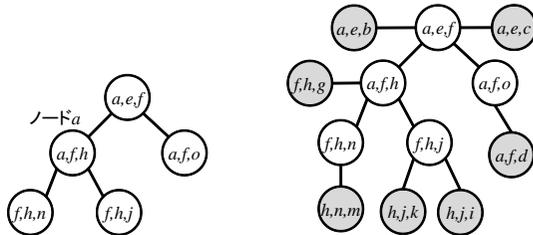


図6 図5の  $p_{H,U}$  に対する正規形樹状分解の例 (左) と  $H$  の幅2の樹状分解 (右) .

ある . このことから ,  $H$ -証拠構造の定義より  $\{\psi(h), \psi(h')\} \notin E(G)$  である . したがって  $\{h, h'\} \in E(p_{H,U}) \Leftrightarrow \{\varphi(h), \varphi(h')\} \in E(G)$  が成立している .

よって ,  $\varphi$  は  $p_{H,U}\theta$  から  $G$  への同型写像である .

( $\Leftarrow$ )  $p_{H,U}$  の各構造変数に束縛を施し ,  $G$  に同型なグラフ  $p_{H,U}\theta$  を構成したと仮定する . 束縛  $(v, (v_1, v_2)) := [p, (u_1, u_2)]$  に用いられるグラフ  $p$  は ,  $u_1, u_2$  以外の頂点を1つに縮約することで , 頂点数3の道にすることができる .  $G$  が  $p_{H,U}$  に照合するとき , 束縛により合成された部分に上記の縮約を施すことで ,  $G$  を  $H$  に縮約することができる .  $\square$

グラフパターン  $p_{H,U}$  の各構造変数に束縛を施し ,  $G$  に同型なグラフ  $p_{H,U}\theta$  を構成したとき ,  $p_{H,U}\theta$  から  $G$  への同型写像を  $\psi$  とおく . このとき ,  $\psi$  の  $V(p_{H,U})$  を定義域とする部分写像を ,  $p_{H,U}$  から  $G$  へのパターン写像と呼ぶ . グラフパターン  $p_{H,U}$  に対して , グラフ  $(V(p_{H,U}), E(p_{H,U}) \cup \{\{v, w\} \mid \exists u \in U [(u, \{v, w\}) \in P(p_{H,U})]\})$  を  $p_{H,U}$  の基礎グラフと呼ぶ . 基礎グラフの例を図5に示す .

定義7 (部分  $k$ -木パターン). グラフパターン  $p_{H,U}$  が部分  $k$ -木パターンであるとは ,  $p_{H,U}$  の基礎グラフが部分  $k$ -木であるときをいう .

グラフパターン  $p_{H,U}$  の樹状分解を , その基礎グラフの樹状分解と定義する . また , グラフ

パターン  $p_{H,U}$  が連結であるとは , その基礎グラフが連結であることをいう .  $p_{H,U}$  が連結であるとき ,  $p_{H,U}$  に任意の束縛を施して得られるグラフパターンも連結である .

命題2. グラフ  $H$  と  $V(H)$  の部分集合  $U$  をグラフ制約辺縮約問題の入力とする .  $k \geq 2$  とするとき ,  $p_{H,U}$  が部分  $k$ -木パターンである  $\Leftrightarrow H$  は部分  $k$ -木である .

証明 . ( $\Rightarrow$ ) 部分  $k$ -木パターン  $p_{H,U}$  の最適な樹状分解  $(T, \mathcal{X})$  が与えられているとする . すべての縮約可能頂点  $u \in U$  とその2つの隣接頂点  $v, w \in V(p_{H,U})$  に対し ,  $T$  に  $u, v, w$  を要素に持つノードを追加し , 追加したノードと ,  $v, w$  を要素に含むノードの1つを辺で結ぶ . この操作により得られた  $(T', \mathcal{X}')$  (例 : 図6の右) が , 樹状分解の条件を満たすことを示す .

定義から  $\bigcup_{\alpha \in V(T)} \mathcal{X}(\alpha) = V(p_{H,U}) = V(H) \setminus U$  である . さらに , 上の操作で追加されたノードの要素の総和は , 明らかに  $U$  を包含する . したがって ,  $\bigcup_{\alpha \in V(T')} \mathcal{X}(\alpha) = V(H)$  である .

次に ,  $v, w \in V(H)$  に対し  $\{v, w\} \in E(H)$  であるとする .  $v, w \in V(H) \setminus U$  であるなら ,  $v, w \in \mathcal{X}(\alpha)$  を満たすノード  $\alpha$  が  $T$  に含まれる .  $v \in U$  であるなら , 上の操作により  $v, w$  を要素に含むノードが追加されている .  $w \in U$  である場合も同様 .  $U$  の制限から ,  $v, w \in U$  であることはない . したがって ,  $\forall v, w \in V(H) [\{v, w\} \in E(H) \Rightarrow \exists \alpha \in V(T') [\{v, w\} \subseteq \mathcal{X}(\alpha)]]$  である .

最後に , 上の操作で追加されたノードを  $\alpha$  とし , その要素を  $u \in U, v, w \in V(p_{H,U})$  とおく .  $u$  を要素に含むノードは  $\alpha$  のみであるため , 任意のノード  $\gamma \in V(T')$  に対し ,  $\mathcal{X}(\alpha) \cap \mathcal{X}(\gamma) \subseteq \{v, w\}$  が成り立つ . これより ,  $\alpha$  の隣接頂点  $\alpha' \in V(T)$  に対し  $\{v, w\} \in \mathcal{X}(\alpha')$  であるため ,  $\mathcal{X}(\alpha) \cap \mathcal{X}(\gamma) \subseteq \mathcal{X}(\alpha') \cap \mathcal{X}(\gamma)$  が成り立つ . さらに , 上の操作で追加されたノードはすべて葉ノードであるため ,  $\alpha'$  から  $\gamma$  への道上の任意の頂点  $\beta$  に対し ,  $\beta \in V(T)$  である . したがって ,  $\gamma \in V(T)$  であるなら ,  $\alpha'$  から  $\gamma$  への道上の任意の頂点  $\beta$  に対し ,  $\mathcal{X}(\alpha') \cap \mathcal{X}(\gamma) \subseteq \mathcal{X}(\beta)$  が成り立つ .  $\gamma \notin V(T)$  であるなら ,  $\gamma$  の隣接ノード  $\gamma' \in V(T)$  に対し  $\mathcal{X}(\alpha') \cap \mathcal{X}(\gamma) \subseteq \mathcal{X}(\alpha') \cap \mathcal{X}(\gamma')$  であるため ,  $\mathcal{X}(\alpha') \cap \mathcal{X}(\gamma')$  について同様の議論をすればよい . したがって ,  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V(T') [\beta \text{ が } \alpha \text{ から } \gamma \text{ への道上のノードである} \Rightarrow \mathcal{X}(\alpha) \cap \mathcal{X}(\gamma) \subseteq \mathcal{X}(\beta)]$  が成り立つ .

これより ,  $(T', \mathcal{X}')$  は  $V(H)$  の幅  $k$  の樹状分解である .

( $\Leftarrow$ )  $H$  の木幅が  $k$  であるとする .  $u \in U$  とその隣接頂点  $v, w \in V(H) \setminus U$  に対し , 辺  $\{u, v\}$  , または辺  $\{u, w\}$  を縮約し , 縮約後の頂点識別子は , それぞれ  $v, w$  とする . この操作により ,  $H$  から頂点  $u$  が取り除かれ , 辺  $\{v, w\}$  が追加される . すべての  $u \in U$  に対して

この操作を行うことで、グラフ  $(V(H) \setminus U, \{\{v, w\} \in E(H) \mid v, w \in V(H) \setminus U\} \cup \{\{v, w\} \mid \exists u \in U[\{v, w\} \in P(p_{H,U})]\}) = (V(p_{H,U}), E(p_{H,U}) \cup \{\{v, w\} \mid \exists u \in U[\{v, w\} \in P(p_{H,U})]\})$ 、すなわち、 $p_{H,U}$  の基礎グラフが得られる。このグラフは  $H$  のマイナーであるため、その木幅は  $k$  以下である。したがって、 $p_{H,U}$  は部分  $k$ -木パタンである。□

### 5. 部分 $k$ -木制約辺縮約問題に対する多項式時間アルゴリズム

**定義 8 (ノード写像).** グラフ  $G$  と部分  $k$ -木パタン  $p_{H,U}$  が与えられたとき、 $p_{H,U}$  の正規形樹状分解  $(T, \mathcal{X})$  のノード  $\alpha \in V(T)$  に対し、写像  $\psi : \mathcal{X}(\alpha) \rightarrow V(G)$  が  $\{v, w\} \in E(p_{H,U}) \Leftrightarrow \{\psi(v), \psi(w)\} \in E(G)$  を満たすとき、 $\psi$  を  $\alpha$  のノード写像と呼ぶ

部分  $k$ -木パタン  $p_{H,U}$  の正規形樹状分解  $(T, \mathcal{X})$  のノード  $\alpha \in V(T)$  に対し、誘導部分グラフパタン  $p_{H,U}[\mathcal{X}(T^{\perp\alpha})]$  から、 $\{(u, \{v, w\}) \in P(H) \mid v, w \in S_\alpha\}$  に含まれる構造変数を取り除いたグラフパタンを  $p_{H,U}(\alpha)$  と表記する (例: 図 8)。また、 $\alpha$  のノード写像  $\psi$  に対し、グラフ  $G[V(G) \setminus \psi(S_\alpha)]$  の連結成分で  $\psi(P_\alpha)$  を含む連結成分を  $D_{\alpha,\psi}$  と表記する。

グラフ  $G, H$  に対し、 $A, B$  を  $V(H)$  の部分集合とする。写像  $\psi : A \rightarrow V(G)$  が写像  $\varphi : B \rightarrow V(G)$  に矛盾しないとは、 $\forall v \in (A \cap B)[\psi(v) = \varphi(v)]$  及び  $\forall v, w \in V(H)[\{v, w\} \in E(H) \Leftrightarrow \{\psi(v), \varphi(w)\} \in E(G)]$  を満たすことをいう。

#### ノード写像拡張

入力: 部分  $k$ -木パタン  $p_{H,U}$ 、正規形樹状分解  $(T, \mathcal{X})$ 、ノード  $\alpha \in V(T)$ 、グラフ  $G$ 、ノード写像  $\psi$ 。

問題:  $p_{H,U}(\alpha)$  から  $G[V(D_{\alpha,\psi} \cup \psi(S_\alpha))]$  への、 $\psi$  に矛盾しないパタン写像が存在するか?

ノード写像拡張が *yes* を返す時、ノード写像  $\psi$  を  $ISO(\alpha, G)$  に追加する。以上の定義より次の補題が得られる。

**補題 1.** グラフ  $G$  が部分  $k$ -木パタン  $p_{H,U}$  に照合する  $\Leftrightarrow T$  の根ノード  $r_T$  に対し  $ISO(r_T, G) \neq \emptyset$ 。

**定義 9 (2部グラフ  $Q(\alpha, \psi)$ ).**  $B$  を  $\alpha$  の子ノードの集合とし、 $g = |B|$  とおく。  $P_\alpha$  の頂点と  $\mathcal{X}(\alpha)$  の頂点から成る構造変数の集合を  $\mathcal{P} = \{(v, \{v_1, v_2\}) \in P(p_{H,U}(\alpha)) \mid \{v_1, v_2\} \subseteq \mathcal{X}(\alpha)\}$  とする。  $\mathcal{D}$  を  $G[V(D_{\alpha,\psi}) \setminus P_\alpha]$  の連結成分の集合とする。このとき、2部グラフ  $Q(\alpha, \psi) = (U, V, E)$  を次のように定義する。

(1)  $U = B \cup \mathcal{P}$

**Algorithm** PATTERNMATCHING;

入力: グラフ  $G$ 、部分  $k$ -木パタン  $p_{H,U}$ 。

出力:  $G$  が  $p_{H,U}$  に照合するなら *yes*、それ以外なら *no*。

**begin**

// 前処理:  $p_{H,U}$  の正規形樹状分解  $(T, \mathcal{X})$  を構成する;

**forall**  $\alpha \in V(T)$  **do**

**forall**  $\alpha$  のノード写像  $\psi$  **do**

**if** NODEMAPPINGEXTENSION( $G, p_{H,U}, (T, \mathcal{X}), \alpha, \psi$ )=*yes* **then**

$ISO(\alpha, G)$  に  $\psi$  を追加する;

**if** 根ノード  $r_T$  に対し、 $ISO(r_T, G) \neq \emptyset$  **then return yes else return no**

**end.**

**Procedure** NODEMAPPINGEXTENSION( $G, p_{H,U}, (T, \mathcal{X}), \alpha, \psi$ );

入力: グラフ  $G$ 、部分  $k$ -木パタン  $p_{H,U}$ 、正規形樹状分解  $(T, \mathcal{X})$ 、ノード写像  $\psi$ 。

**begin**

$G, p_{H,U}, (T, \mathcal{X}), \alpha, \psi$  から、2部グラフ  $Q(\alpha, \psi)$  を構成する;

**if**  $Q(\alpha, \psi)$  が完全マッチングを持つ **then return yes else return no**

**end;**

図 7 多項式時間部分  $k$ -木パタン照合アルゴリズム

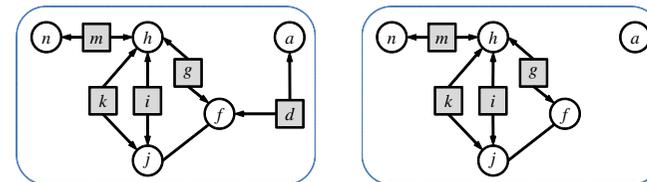


図 8 図 3 の  $p_{H,U}$  と図 6 の木 (左) のノード  $\alpha$  に対する、 $p_{H,U}[T^{\perp\alpha}]$ (左) と  $p_{H,U}(\alpha)$ (右)。

(2)  $V = \mathcal{D}$

(3)  $E = E_A \cup E_B$ , ただし

$$\begin{aligned}
 E_A &= \{ \{ \beta, D \} \mid (\beta \in \mathcal{B}) \wedge (D \in \mathcal{D}) \\
 &\quad \wedge (\exists \psi_\beta \in ISO(\beta, G) [(\psi_\beta \text{ が } \psi \text{ に矛盾しない}) \wedge (D = D_{\beta, \psi_\beta})]) \}, \\
 E_B &= \{ \{ (v, \{v_1, v_2\}), D \} \mid ((v, \{v_1, v_2\}) \in \mathcal{P}) \wedge (D \in \mathcal{D}) \\
 &\quad \wedge (G[V(D) \cup \{ \psi(v_1), \psi(v_2) \}]) \text{ が連結である} \\
 &\quad \wedge (G[V(D) \cup \{w\}] \text{ がすべての } w \in \mathcal{X}(\alpha) \setminus \{v_1, v_2\} \text{ に対して非連結}) \}.
 \end{aligned}$$

補題 2. 2部グラフ  $Q(\alpha, \psi)$  に完全マッチングが存在する  $\Leftrightarrow \psi \in ISO(\alpha, G)$ .

証明.  $(\Rightarrow)$   $Q(\alpha, \psi)$  に完全マッチング  $M$  が存在することを仮定する. 辺集合  $E_A$  の定義より,  $\{ \beta, D \} \in (M \cap E_A)$  に対し,  $p_{H,U}(\beta)$  を  $G[V(D) \cup \psi(S_\beta)]$  に同型なグラフにする束縛の集合  $\theta_\beta$  が存在する.  $p_{H,U}(\beta)$  に  $\theta_\beta$  に属するすべての束縛を施すことで得られるグラフを  $p_{H,U}(\beta)\theta_\beta$  とおき,  $p_{H,U}(\beta)\theta_\beta$  から  $G[V(D) \cup \psi(S_\beta)]$  への  $\psi$  に矛盾しない同型写像を  $\varphi_\beta$  とおく.  $p_{H,U}(\alpha)$  に  $\bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} \theta_\beta$  に含まれる束縛を施す. また,  $\{ (u, \{v, w\}), D \} \in (M \cap E_B)$  に対し,  $p_{H,U}(\alpha)$  に束縛  $(u, (v, w)) := [G[V(D) \cup \{ \psi(v), \psi(w) \}], (\psi(v), \psi(w))]$  を施す. これにより,  $p_{H,U}(\alpha)$  のすべての構造変数に束縛を施すことができる. この操作で得られるグラフを  $p_{H,U}\theta$  とおく. このとき, 以下に示す写像  $\varphi: V(p_{H,U}\theta) \rightarrow V(G[V(D_{\alpha, \psi} \cup \psi(S_\alpha))])$  を構成する.

$$\varphi(v) = \begin{cases} \psi(v) & v \in \mathcal{X}(\alpha) \text{ のとき,} \\ \varphi_\beta(v) & v \in V(p_{H,U}(\beta)\theta_\beta) \text{ のとき,} \\ v & v \text{ は } \mathcal{P} \text{ の構造変数への束縛により追加された頂点であるとき.} \end{cases}$$

$v, w \in \mathcal{X}(\alpha)$  に対し, ノード写像の定義から  $\{v, w\} \in E(p_{H,U}\theta) \Leftrightarrow \{ \varphi(v), \varphi(w) \} \in E(G[V(D_{\alpha, \psi} \cup \psi(S_\alpha))])$  である.

任意の  $\beta \in \mathcal{B}$  に対し  $v, w \in V(p_{H,U}(\beta)\theta_\beta)$  であるとき,  $\varphi_\beta$  が  $V(G[V(D_{\alpha, \psi} \cup \psi(S_\alpha))])$  の部分グラフへの同型写像であることから,  $\{v, w\} \in E(p_{H,U}\theta) \Leftrightarrow \{ \varphi(v), \varphi(w) \} \in E(G[V(D_{\alpha, \psi} \cup \psi(S_\alpha))])$  である. また,  $\varphi_\beta$  は  $\psi$  に矛盾しない写像であるため,  $v \in \mathcal{X}(\alpha), w \in V(p_{H,U}(\beta)\theta_\beta)$  に対し,  $\{v, w\} \in E(p_{H,U}\theta) \Leftrightarrow \{ \varphi(v), \varphi(w) \} \in E(G[V(D_{\alpha, \psi} \cup \psi(S_\alpha))])$  である.

任意の  $\beta_i, \beta_j \in \mathcal{B} [\beta_i \neq \beta_j]$  に対し  $v \in V(H_{\beta_i}\theta_{\beta_i}), w \in V(H_{\beta_j}\theta_{\beta_j})$  であるとする.  $\{v, w\} \in E(p_{H,U}\theta)$  であるとき, 樹状分解の定義から  $v, w \in \mathcal{X}(\alpha)$  であるため,  $\{ \varphi(v), \varphi(w) \} \in E(G[V(D_{\alpha, \psi} \cup \psi(S_\alpha))])$  である.  $\{ \varphi(v), \varphi(w) \} \in E(G[V(D_{\alpha, \psi} \cup \psi(S_\alpha))])$  であるとき,  $D_{\beta_i, \psi_{\beta_i}}, D_{\beta_j, \psi_{\beta_j}}$  は  $G[V(G) \setminus \mathcal{X}(\alpha)]$  の連結成分であるため,  $\varphi(v), \varphi(w) \in$

$\psi(\mathcal{X}(\alpha))$  である. これより,  $\{v, w\} \in E(p_{H,U}\theta)$  である. したがって,  $\{v, w\} \in E(p_{H,U}\theta) \Leftrightarrow \{ \varphi(v), \varphi(w) \} \in E(G[V(D_{\alpha, \psi} \cup \psi(S_\alpha))])$  である.

$v, w$  がそれぞれ構造変数  $(u, \{u_1, u_2\}), (u', \{u'_1, u'_2\}) \in \mathcal{P}$  への束縛によって追加された頂点であるとする.  $u = u'$  であるとき, 束縛の定義から  $\{v, w\} \in E(p_{H,U}\theta) \Leftrightarrow \{ \varphi(v), \varphi(w) \} \in E(G[V(D_{\alpha, \psi} \cup \psi(S_\alpha))])$  である.  $u \neq u'$  であるとき, 束縛の定義から  $\{v, w\} \notin E(p_{H,U}\theta)$  である. さらに,  $\varphi(v), \varphi(w)$  は  $G[V(G) \setminus \mathcal{X}(\alpha)]$  の異なる連結成分に属するため,  $\{ \varphi(v), \varphi(w) \} \notin E(G[V(D_{\alpha, \psi} \cup \psi(S_\alpha))])$  である. したがって,  $\{v, w\} \in E(p_{H,U}\theta) \Leftrightarrow \{ \varphi(v), \varphi(w) \} \in E(G[V(D_{\alpha, \psi} \cup \psi(S_\alpha))])$  が成立している.

$v \in (\mathcal{X}(\alpha) \cup V(p_{H,U}(\beta)\theta_\beta))$  であり,  $w$  が構造変数  $(u, \{u_1, u_2\}) \in \mathcal{P}$  への束縛によって追加された頂点であるとする. このとき,  $\exists \{ (u, \{u_1, u_2\}), D \} \in (M \cap E_B), w \in V(D)$  であるため,  $E_B$  の定義より,  $\{v, w\} \in E(p_{H,U}\theta) \Leftrightarrow \{ \varphi(v), \varphi(w) \} \in E(G[V(D_{\alpha, \psi} \cup \psi(S_\alpha))])$  である.

これらのことから,  $\varphi$  は  $p_{H,U}\theta$  から  $G[V(D_{\alpha, \psi} \cup \psi(S_\alpha))]$  への同型写像である.

$(\Leftarrow)$   $p_{H,U}(\alpha)$  から  $G[V(D_{\alpha, \psi} \cup \psi(S_\alpha))]$  への  $\psi$  に矛盾しないパタン写像  $\varphi$  が存在すると仮定する. 樹状分解の定義から, 任意の  $\beta_i, \beta_j \in \mathcal{B}$  に対し,  $p_{H,U}(\beta_i)$  の頂点から  $p_{H,U}(\beta_j)$  の頂点への道は, 必ず  $\mathcal{X}(\alpha)$  の頂点を含む. このため,  $p_{H,U}(\beta_i)$  の頂点と  $p_{H,U}(\beta_j)$  の頂点が同一の連結成分  $D \in \mathcal{D}$  に写像されることはない. また, 各  $\beta \in \mathcal{B}$  に対し  $p_{H,U}(\beta)[V(p_{H,U}(\beta)) \setminus S_\beta]$  は連結であるため,  $V(p_{H,U}(\beta)) \setminus S_\beta$  に含まれる頂点は同一の連結成分  $D \in \mathcal{D}$  に写像される. したがって, 各  $\beta \in \mathcal{B}$  に対し,  $\varphi(V(p_{H,U}(\beta)) \setminus S_\beta) \subseteq V(D)$  を満たす連結成分  $D \in \mathcal{D}$  が存在する. したがって,  $\varphi$  の  $V(p_{H,U}(\beta))$  を定義域とする部分は,  $p_{H,U}(\beta)$  から  $G[V(D) \cup \psi(S_\beta)]$  へのパタン写像となっている. これより  $\{ \beta, D \} \in E_A$  であるため,  $\{ \beta, D \}$  を  $M$  に追加する. また, 構造変数  $(u, \{v, w\}) \in \mathcal{P}$  に施した束縛  $(u, (v, w)) := [p, (v', w')]$  に対し, 束縛によって得られたグラフから  $v, w \in \mathcal{X}(\alpha)$  を削除すると  $p[V(p) \setminus \{v', w'\}]$  は1つの連結成分になることから,  $V(D) = \varphi(V(p) \setminus \{v', w'\})$  を満たす  $D \in \mathcal{D}$  が存在する. このとき,  $\{ (u, \{v, w\}), D \} \in E_B$  であるため,  $\{ (u, \{v, w\}), D \}$  を  $M$  に追加する. これにより得られた  $M$  は,  $Q(\alpha, \psi)$  の完全マッチングである.  $\square$

[定理 3 の証明] 補題 1, 2 より, 部分  $k$ -木制約辺縮約問題の入力グラフ  $G$ , 部分  $k$ -木  $H$ ,  $V(H)$  の部分集合  $U$  が与えられたとき, 図 7 の PATTERNMATCHING に  $G$ , 部分  $k$ -木パタン  $p_{H,U}$  を入力として与えることで, 部分  $k$ -木制約辺縮約問題を解くことができる. 次に, 入力  $G$  の頂点数を  $N$  とおいたときの PATTERNMATCHING の計算時間について, 最適な

樹状分解は  $O(n^{k+2})$  で構成可能<sup>1)</sup> であり, 最適な樹状分解から正規形樹状分解を  $O(kn^2)$  時間で構成することができる<sup>8)</sup>. したがって, 前処理に要する時間は  $O(n^{k+2})$  である. 入力  $H$  に対する部分  $k$ -木パタン  $p_{H,U}$  の頂点数を  $n$  とおくと, 正規形樹状分解のノード数は  $n - k$  個である. 各ノード  $\alpha$  に対し, ノード写像の個数は  $O(N^{k+1})$  である. 補題 2 より, 各ノード写像  $\psi$  に対し, ノード写像拡張を解くには 2 部グラフ  $Q(\alpha, \psi)$  の完全マッチング存在判定を解けばよい.  $Q(\alpha, \psi)$  の頂点数は  $O(N)$  であることから, 完全マッチング存在判定は  $O(N^{2.5})$  時間で計算可能である. これらのことから, 全体の計算時間は  $O(N^{k+4.5})$  である.  $\square$

## 6. まとめと今後の課題

本論文ではまず縮約の方法を一般化し, グラフ制約辺縮約問題を定義した. 次にグラフ制約辺縮約問題の入力であるグラフ  $H$  と  $V(H)$  の部分集合  $U$  からグラフパタン  $p_{H,U}$  を定義した. またグラフパタン照合問題を定義し, それがグラフ制約辺縮約問題と同値であることを示した. さらに部分  $k$ -木パタンを定義し,  $p_{H,U}$  が部分  $k$ -木パタンであるとき, 正規形樹状分解  $(T, \mathcal{X})$  を用いて,  $T$  のノードに対する動的計画法によって, 部分  $k$ -木パタン照合問題が多項式時間計算可能であることを示した. 具体的には, 各ノードに対する照合判定を, 2 部グラフの完全マッチング問題を用いて行うことができ, 結果として,  $G$  の頂点数を  $N$ ,  $H$  が部分  $k$ -木であるとき,  $O(N^{k+4.5})$  時間で計算できることを示した.

今後の課題としては, 縮約可能頂点の次数が 3 の場合の計算時間を検証することがあげられる. 縮約可能頂点の次数が 3 の場合, 縮約可能頂点とその隣接頂点を特別な辺とみなす手法が使えなくなるため, 新しいパタン照合の方法が必要になる.

謝辞 本研究の一部は, 科学研究費補助金 (20500016) の助成を受けたものである.

## 参考文献

- 1) Arnborg, S., Corneil, G.D., and Proskurowski, A.: Complexity of Finding Embedding in a  $k$ -Tree, SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 8, pp.277–284 (1987).
- 2) Bodlaender, L.H.: Polynomial Algorithm for Graph Isomorphism and Chromatic Index on Partial  $k$ -Trees, Journal of Algorithms, 11, pp.631–643 (1990).
- 3) Brouwer, A. E., Veldman, H. J.: Contractibility and NP-completeness, Journal of Graph Theory, 11, pp.71–79 (1987).
- 4) Hof, P., Kamiński, M., Paulusma, D., Szeider, S., and Thilikos, M.D.: On Graph Con-

- tractions and Induced Minors, Discrete Applied Mathematics (2010), to appear.
- 5) Horváth, T., and Ramon, J.: Efficient Frequent Connected Subgraph Mining in Graphs of Bounded Tree-Width, Theoretical Computer Science, 411(31–33): pp.2784–2797 (2010).
- 6) Levin, A., Paulusma, D., Woeginger, J.G.: The Computational Complexity of Graph Contractions I: Polynomially Solvable and NP-Complete Cases, Networks, 51: pp.178–189 (2008).
- 7) 名古屋 孝幸, 谷 聖一, 戸田 誠之助: グラフ同型写像の数え上げ問題, 信学技報, COMP2000–61 (1998).
- 8) 戸田 誠之助: グラフ同型性判定問題, 日本大学文理学部叢書, (2001).
- 9) Yamasaki, H., Sasaki, Y., Shoudai, T., Uchida, T., and Suzuki, Y.: Learning block-preserving graph patterns and its application to data mining, Machine Learning, 76(1), pp.137–173 (2009).
- 10) Yamasaki, H., and Shoudai, T.: Mining of Frequent Externally Extensible Outerplanar Graph Patterns, Proc. 7th Inter. Conf. on Machine Learning and Applications (ICMLA2008), pp.871–876 (2008).